МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ф. Г. Шигабутдинов

СБОРНИК ЗАДАЧ

ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Часть 3. ДИНАМИКА

Учебное пособие

Казань
2018

УДК 531.8
ББК 22.2
Ш55

Шигабутдинов Ф.Г.

Ш55 Сборник задач по теоретической механике. Ч.3. Динамика: Учебное пособие / Ф.Г. Шигабутдинов.– Казань: Изд-во Казанск. гос. архитект.-строит. ун-та, 2018. – 112 с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

В пособии представлены все разделы теоретической механики, предусмотренные современными образовательными программами отечественных технических вузов. Пособие адресовано студентам технических вузов очного и заочного обучения, в программах которых предусмотрено изучение курса «Теоретическая механика», и имеет своей целью повышение эффективности самостоятельной работы. Пособие может быть использовано аспирантами и преподавателями, специализирующимися в различных отраслях механики.

Рис. 193, табл. 3

Рецензенты:

Засл. деятель науки РТ, доктор физ.-матем. наук, профессор кафедры «Механика» Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Р.А. Каюмов

Засл. деятель науки РФ и РТ, академик АН РТ, РАЕН, доктор физ.-матем. наук, профессор, заведующий кафедрой «Теоретическая механика» Казанского (Приволжского) федерального университета

Ю.Г. Коноплев

УДК 531.8
ББК 22.2

© Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 2018
© Шигабутдинов Ф.Г., 2018

От автора

Развиваясь вместе с техникой, теоретическая механика сегодня стала одной из научных основ конкретных инженерных расчетов при проектировании образцов новой техники и строительных сооружений. Наибольшие трудности при изучении теоретической механики вызывают задачи. Именно при решении конкретных задач проверяются знание теоретического материала, приобретенные навыки в моделировании и построении расчетных схем. При изучении теоретической механики закрепляются и расширяются компетенции, приобретенные в математике и физике.

Актуальность предлагаемого пособия вызвана еще тем, что задачники с решениями, например, [11],[12] или не переиздаются, или переиздаются малым тиражом.

Данное учебное пособие написано для сопровождения теоретического курса по динамике, изложенного в нашем пособии «Краткий курс теоретической механики. Ч.3. Динамика» (Казань, КГАСУ, 2018). Оно содержит задачи с решениями по динамике точки, динамике механической системы, аналитической механике и теории удара, которые собраны в отдельные главы. В каждой главе есть параграф справочного характера с кратким изложением теоретических сведений. При подборе задач акцент делался на задачи, вызывающие у студентов особые трудности при решении, а также на задачи, близкие к тем, которые чаще всего предлагаются в вузвх для выполнения самостоятельных расчетно-графических работ. При решении задач механики очень важно не только получение ответа, но и его обсуждение. Это позволяет получить новые знания, связать их с известными научными фактами и сделать выводы для практики. Везде, где это возможно, мы это делали. В пособии приводятся три приложения: моменты инерции достаточно большого числа тел, встречающихся как элементы механизмов, краткие сведения из математики и биографии ученых, отражающие историю развития классической механики.

Работа с пособием станет эффективнее, если разбор задач будет сопровождаться повторным просмотром теоретического материала.

Задачник адресован в первую очередь студентам, изучающим динамику по программе специалитета. Мы думаем, что он будет очень полезен студентам заочной формы обучения, людям, получающим второе высшее образование, обучающимся дистанционно, всем нуждающимся в повышении своих знаний в области классической механики, в том числе магистрам и аспирантам. Преподавателям данный задачник поможет несколько облегчить преподавательский труд.

Автор искренне благодарен рецензентам за советы и замечания, высказанные при рецензировании пособия. Это первое издание данного пособия. Автор осознает, что в пособии могут быть недостатки, описки. Он будет благодарен всем, кто отметит положительные стороны пособия, укажет на недостатки. Замечания и пожелания можно направлять по электронному адресу E-mail: shigfg@mail.ru

ГЛАВА 1. ДИНАМИКА ТОЧКИ

§ 1.1. Краткие сведения из теоретического материала к гл.1

Законы Ньютона

1 закон Ньютона. *Если на материальную точку не действуют силы или действует система сил, эквивалентная нулю, то точка находится в состоянии покоя или прямолинейного равномерного движения.*

2 закон Ньютона (основное уравнение динамики). *Произведение массы точки* m *на ее ускорение* $\bar{a}$ *равно действующей на точку силе* $\bar{F}$ *:* $m\bar{a} = \bar{F}$ **.**

3 закон Ньютона. *Две точки действуют друг на друга силами, равными по величине, противоположно направленными и действующими вдоль одной прямой, проходящей через эти точки.*

Силы в динамике

1.Сила тяжести $P = mg$, $g = 9{,}83 м/с^2$, где m, g – масса точки и ускорение свободного падения, соответственно.

2.Сила сухого трения скольжения. $F_{тр} = f \cdot N$, где f, N – коэффициент трения и модуль нормальной реакции, соответственно.

3.Сила упругости $F_{упр} = c \cdot \lambda = c \cdot |x|$, где λ – удлинение (укорочение) пружины.

4.Сила вязкого сопротивления $R_{вяз} = \beta \cdot v$, β, v – экспериментальный коэффициент пропорциональности и скорость точки, соответственно.

Дифференциальные уравнения движения точки

а) В прямоугольных осях:

1. $ma_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}$, $\quad ma_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}$, $\quad ma_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}$ или

2. $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}$, $\quad m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}$, $\quad m\dfrac{d^2z}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}$ или

3. $m\ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}$, $\quad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}$, $\quad m\ddot{z} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}$.

Начальные условия: $t = 0$: $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_x(0) = v_{x0}$;

$y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = v_y(0) = v_{y0}$; $\quad \dot{z}(0) = v_z(0) = v_{z0}$.

б) В осях естественного трехгранника:

$$m \cdot a_\tau = \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau}, \qquad m \cdot a_n = \sum_{k=1}^{n} F_{kn}, \qquad 0 = \sum_{k=1}^{n} F_{kb} .$$

$$m \cdot \frac{d^2s}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau}, \quad m \cdot \frac{v^2}{\rho} = \sum_{k=1}^{n} F_{kn}, \quad 0 = \sum_{k=1}^{n} F_{kb} .$$

Две задачи динамики

Под первой задачей динамики понимается задача об определении равнодействующей сил $\bar{F}_k$*, действующих на точку, по известному закону движения точки* $x(t), y(t), z(t)$ *и ее массе* m*. То есть по известной левой части дифференциальных уравнений движения точки определяется их правая часть*

При решении второй (или основной) задачи динамики при известных силах $\overline{F}_k$, *действующих на точку, и ее массе* m, *из дифференциальных уравнений движения точки определяется ее закон движения* $x(t), y(t), z(t)$.

Основное уравнение динамики относительного движения точки

$$m\overline{a}_{отн} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k + \overline{\Phi}_{пер}^{ин} + \overline{\Phi}_{кор}^{ин} .$$

$$\overline{\Phi}_{пер}^{ин} = -m \cdot \overline{a}_{пер}, \quad \overline{\Phi}_{кор}^{ин} = -m\overline{a}_{кор}, \; \overline{a}_{кор} = 2 \cdot (\overline{\omega}_{пер} \times \overline{v}_{отн})$$

Общие теоремы динамики точки

1. Теорема об изменении количества движения точки

$\overline{q} = m\overline{v}$, $d\overline{S} = \overline{F} \cdot dt$ - количество движения точки и элементарный импульс силы

Импульс силы и его проекции

$$\overline{S} = \int_{t_0}^{t_1} \overline{F} dt, \; S_x = \int_{t_0}^{t_1} F_x dt, \quad S_y = \int_{t_0}^{t_1} F_y dt, \; S_z = \int_{t_0}^{t_1} F_z dt .$$

1.1. Дифференциальная формулировка теоремы об изменении количества движении точки:

$$\frac{d(m\overline{v})}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k .$$

1.2. Интегральная формулировка теоремы об изменении количества движении точки:

$m\overline{v}_1 - m\overline{v}_0 = \overline{S}$, *(векторная формулировка),*

$mv_{1x} - mv_{0x} = S_x$, $mv_{1y} - mv_{0y} = S_y$, $mv_{1z} - mv_{0z} = S_z$ *(в проекциях на оси).*

Алгебраический момент количества движения точки $m_0(m\overline{v}) = \pm h \cdot mv$ вычисляется так же, как и алгебраический момент силы относительно центра.

Формула для вычисления момента количества движения точки относительно вертикальной оси Oz:

$$m_z(m\overline{v}) = x \cdot mv_y - y \cdot mv_x .$$

2.Теорема об изменении момента количества движения точки относительно вертикальной оси Oz***:***

$$\frac{d}{dt}[m_z(m\overline{v})] = m_z(\overline{F}) .$$

Элементарная работа силы вычисляется по одной из формул:

$$dA = (\overline{F} \cdot d\overline{r}), \quad dA = (\overline{F} \cdot dt) \cdot \overline{v}, \quad dA = F_\tau \cdot ds, \quad dA = F \cdot ds \cdot \cos\alpha,$$

$$dA = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz .$$

Работа силы на конечном перемещении:

$$A = \int_{M_0}^{M_1} \overline{F} \cdot d\overline{r}, \quad A = \int_{M_0}^{M_1} F_\tau \cdot ds, \quad A = \int_{M_0}^{M_1} (F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz) .$$

Формулы для вычисления работы силы тяжести, упругой силы и силы трения:

$$A_P = \pm P \cdot h = \pm mgh, \quad A_{упр} = -\frac{c}{2} \cdot \lambda^2 . \quad A_{тр} = -f \cdot N \cdot s .$$

Мощность силы (работа силы в единицу времени):

$$W = dA/dt, \quad \text{или} \quad W = \overline{F} \cdot \overline{v}, \quad \text{или} \quad W = F_\tau \cdot v .$$

$$1кВт \cdot ч = 10^3 Вт \cdot 3600с = 36 \cdot 10^5 Дж \approx 367100 кг с \cdot м .$$

3. Теорема об изменении кинетической энергии точки

3.1. Кинетическая энергия точки: $E = mv^2/2$ *(Дж)*

3.2. Дифференциальная формулировка теоремы: $d(\frac{mv^2}{2}) = \sum_{k=1}^{n} dA_k$ *(Дж)*.

3.3. Интегральная формулировка теоремы: $\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} A_k$ *(Дж)*.

Свободные колебания точки под действием только восстанавливающих сил

Движение точки, обладающее свойством повторяемости, называется колебательным движением. Колебание точки по прямолинейной траектории называется прямолинейным колебанием точки.

Линейное дифференциальное уравнение малых свободных колебаний материальной точки и начальные условия:

$$m\ddot{x} = -cx(t) \quad \text{или} \quad \ddot{x} + k^2 x = 0, \quad (t=0: \quad x(0) = x_0, \ v_x(0) = \dot{x}(0) = v_0).$$

Решение уравнения колебаний в амплитудной форме: $x = A\sin(kt + \varphi)$,

где $k^2 = c/m$, $A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/k^2}$, $tg\varphi = \frac{x_0 k}{v_0}$, $\varphi = arctg(x_0 k / v_0)$.

Параметр c *называется в общем случае коэффициентом упругости, а в случае, когда точка движется, будучи прикрепленной к концу пружин, – коэффициентом жесткости пружины.*

Коэффициент A, определяющий максимальное удаление точки от состояния равновесия, называется амплитудой колебаний. $\psi = kt$ *и* φ *называются фазой и начальной фазой колебаний точки.*

Промежуток времени T*, за который точка совершает одно полное колебание, называется периодом свободных колебаний.*

Число колебаний точки, происходящее за одну секунду, называется частотой колебаний и обозначается ν.

Коэффициент k *- число колебаний точки за промежуток времени в* 2π *сек, называется циклической или круговой частотой колебаний. Имеют место формулы:*

$$T = 2\pi/k, \ k = 2\pi/T, \ \nu = 1/T, \ k = \sqrt{c/m}, \ k = 2\pi/T = 2\pi\nu.$$

Свободные прямолинейные колебания точки с учетом силы тяжести

В этом случае: $k^2 = g/\lambda_{cm}\,(c^{-2})$, $T = 2\pi/k\ (c)$ или $T = 2\pi\sqrt{\lambda_{cm}/g}$,

$\nu = 1/T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\lambda_{cm}}}\,(1/c)$. $\lambda_{cm}\,(см, м)$ – упругое удлинение пружины под действием силы тяжести точки. λ_{cm} определяется из уравнения: $F_{упр} = c \cdot \lambda_{cm} = mg$.

Сила тяжести точки не меняет гармонического характера свободных колебаний, но центр колебаний смещается на величину первоначального статического растяжения пружины λ_{cm}.

Свободные затухающие прямолинейные колебания точки. Движение точки в сопротивляющейся среде (учитывается еще сила сопротивления среды $R = \beta \cdot v$*)*

Дифференциальное уравнение колебаний (движений) и начальные условия имеют вид:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0 \qquad (t=0: \quad x(0) = x_0, \quad v_x(0) = \dot{x}(0) = v_0).$$

$$k^2 = c/m \ (c^{-2}), \ \ 2n = \beta/m \ (c^{-1}).$$

Величина $\beta > 0$ *называется* ***коэффициентом сопротивления.*** *Коэффициент* β *зависит в первую очередь от плотности (вязкости) жидкости и определяется экспериментальным методом. Для разных жидких сред значения* β *приводятся в специальных таблицах.*

Различаются три вида движения. При: а) $n < k$ *– случай малого сопротивления. б)* $n > k$ *– случай большого сопротивления. в)* $n = k$ *– случай критического сопротивления.*

Случай малого сопротивления ($n < k$), $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} > 0$: $x = B(t)\sin(k_1 t + \varphi)$,

$$B(t) = Ae^{-nt} > 0., \quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{k^2 - n^2}} \quad , \quad tg\varphi = \frac{x_0\sqrt{k^2 - n^2}}{v_0 + nx_0} = \frac{x_0 k_1}{v_0 + nx_0}.$$

Сила сопротивления, пропорциональная скорости, приводит к затухающим колебаниям с увеличением периода колебаний и уменьшением круговой частоты свободных колебаний.

Случай большого сопротивления (n>k). Движение материальной точки становится затухающим апериодическим, то есть движение точки теряет колебательный характер.

Случай критического сопротивления (n=k). Точка совершает затухающие апериодические движения.

Вынужденные колебания материальной точки при отсутствии сил сопротивления (действует сила величиной $S = G \cdot \sin(pt + \alpha)$ *)*

Дифференциальное уравнение колебаний: $\ddot{x} + k^2 x = G_0 \cdot \sin(pt + \alpha)$.

Здесь $k^2 = c/m = g/\lambda_{cm}$, $G_0 = G/m$, p *- круговая частота изменения возмущающей силы, величины* G, p *и* α *считаются известными. Решение дифференциального уравнения имеет вид:* $x(t) = A \cdot \sin(kt + \varphi) + [G_0/(k^2 - p^2)] \cdot \sin(pt + \alpha)$.

Как видим, действие возмущающей силы приводит к сложному колебательному движению, складывающемуся из двух гармонических колебаний – свободных и вынужденных колебаний точки. Свободные колебания точки описываются первым слагаемым. Второе слагаемое описывает вынужденные колебания.

Вынужденные прямолинейные колебания материальной точки с учетом силы сопротивления, пропорциональной скорости

Дифференциальное уравнение колебаний и его частное решение:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = G_0 \sin(pt + \alpha), \qquad x_* = \left[G_0 / \sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}\right] \cdot \sin(pt + \alpha - \psi).$$

Частное решение часто называют уравнением вынужденных колебаний.

Амплитуда A_{**} *и сдвиг фаз вынужденных колебаний* ψ *не зависят от начальных условий и могут быть вычислены по формулам:*

$$A_{**} = [G_0 / \sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}], \qquad tg\psi = 2np/(k^2 - p^2),$$

$$\sin\psi = \frac{2np}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}, \qquad \cos\psi = \frac{k^2-p^2}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}.$$

Дифференциальные уравнения движения точки по неподвижной плоской гладкой кривой: $m\cdot\frac{d^2s}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau}^{акт}, \qquad m\cdot\frac{v^2}{\rho} = \sum_{k=1}^{n} F_{kn}^{акт} + N_n.$

Принцип Даламбера

Векторная величина $\overline{F}^{ин}$, равная взятому со знаком минус произведению массы точки на вектор ее ускорения, называется силой инерции точки.

$$\overline{F}^{ин} = -m\overline{a}, \quad \text{ее величина} \quad F^{ин} = ma.$$

Формулировка принципа. *Если в произвольный момент времени к действующим на точку активным силам и реакциям связей прибавить силу инерции точки, то полученная система сходящихся сил окажется уравновешенной.*

$$\overline{F}^{a} + \overline{N} + \overline{F}^{ин} = 0.$$

В проекциях на оси координат последнее равенство получает вид:

$$F_x^a + N_x + F_x^{ин} = 0, \qquad F_y^a + N_y + F_y^{ин} = 0, \qquad F_z^a + N_z + F_z^{ин} = 0.$$

§ 1.2. Решение первой задачи динамики

Задача 1.1. Движение свободной точки M массой $m = 5кг$, совершающей прямолинейное движение под действием силы $\overline{F}$, направленной параллельно траектории движения точки, задается уравнением $x(t) = \sin\pi t\ (м)$. Определить величину и направление силы $\overline{F}$ в момент времени $t_1 = 0{,}5c$.

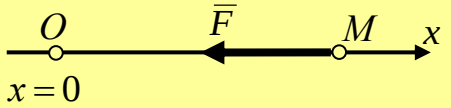


Рис. к задаче 1.1

Решение. Движение точки задано координатным способом. Совместим с траекторией точки ось Ox, как показано на рис. к задаче. В такой системе координат положение точки на траектории определяется только координатой $x(t)$, а $y = z = 0$. Например, в момент времени $t_1 = 0{,}5c$ координата точки $x(t_1) = \sin(\pi/2) = 1(м) > 0$. Другими словами, $OM = 1м$. Так как и проекции силы $F_y = F_z = 0$, то из трех дифференциальных уравнений движения точки остается только одно. Запишем его в виде: $F_x = m\ddot{x}$. Вычислим вторую производную по времени от координаты $x(t)$ и найдем проекцию вектора ускорения a_x на ось Ox. Тогда $\dot{x}(t) = v_x = \pi\cos\pi t$, $\ddot{x}(t) = a_x = -\pi^2\sin\pi t$. Следовательно, $F_x = -\pi^2 m\cdot\sin\pi t$. Видим, что точка движется под действием переменной силы $\overline{F}$, явно зависящей от времени. В момент времени $t_1 = 0{,}5c$ имеем: $F_x(t_1) = -\pi^2 m = -49{,}3(H)$. Проекция F_x полностью определяет величину и направление действия силы. Так как $F_x(t_1) < 0$, то при $t_1 = 0{,}5c$ сила направлена к началу координат. **Ответ.** Сила $\overline{F}$ направлена к началу координат и $|\overline{F}| = 49{,}3(H)$.

Задача 1.2. Движение материальной точки M массой $m = 10кг$ описывается уравнениями $x(t) = 2t^2$ $(м)$, $y(t) = t^3 - 6\,(м)$. Определить модуль равнодействующей сил, действующих на точку в момент времени $t_1 = 2c$.

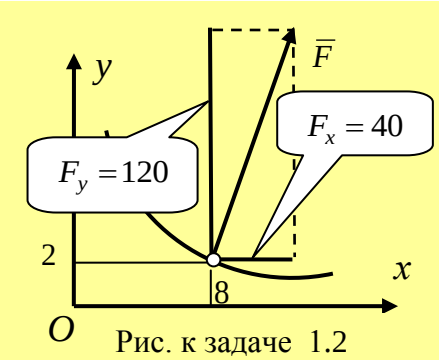


Рис. к задаче 1.2

Решение. Заметим, что в условии задачи не сказано, сколько сил действует на точку. Из закона движения точки это тоже не следует. Если на точку действует несколько сил, то они приводятся к равнодействующей. Равнодействующая всегда существует, так как силы, приложенные к точке, образуют систему сходящихся сил и, следовательно, могут быть просуммированы по правилу параллелограмма или построением силового многоугольника. Дифференциальные уравнения движения точки примут вид: $m\ddot{x} = F_x$, $m\ddot{y} = F_y$. Здесь F_x, F_y – проекции равнодействующей системы сил, действующих на точку. Вычислим проекции вектора ускорения $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$ последовательным дифференцированием уравнений движения. Получим $v_x(t) = \dot{x} = 4t(м/с)$, $v_y(t) = \dot{y} = 3t^2(м/с)$. Далее $a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = 4(м/с^2)$, $a_y(t) = \dot{v}_y = \ddot{y} = 6t(м/с^2)$. Одна из проекций вектора ускорения, а, следовательно, и модуль вектора ускорения зависят от времени. Движение точки не является равнопеременным. Вычислим проекции равнодействующей: $F_x = m\ddot{x} = 4m = 40(H)$, $F_y = m\ddot{y} = 6t \cdot m = 60t$. В момент времени $t_1 = 2c$ (см. рис. к задаче): $x = 2t_1^2 = 8(м)$, $y = t_1^3 - 6 = 2(м)$, $F_x = 40(H)$, $F_y(t_1) = 60t_1 = 120(H)$. Тогда $|\overline{F}| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{40^2 + 120^2} = 401{,}96(H)$. **Ответ.** $F = 401{,}96(H)$.

Задача 1.3. Снегоход разгоняется с ускорением $a = 2м/с^2$ по горизонтальному участку пути и перемещает нагруженные сани массой $m = 150кг$. Определить силу тяги, действующую на сани, если коэффициент трения скольжения $f = 0{,}02$.

Рис.1 к задаче 1.3

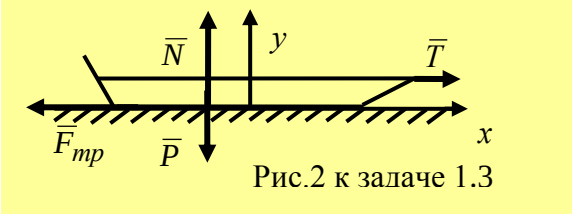


Рис.2 к задаче 1.3

Решение. На прямолинейном участке пути снегоход и сани движутся поступательно и могут быть приняты за точку. Мысленно отсоединим сани и рассмотрим их прямолинейное движение (рис.2). На сани действуют сила тяжести $\overline{P}$, равнодействующая нормальных реакций поверхности $\overline{N}$, сила тяги снегохода (реакция сцепки) $\overline{T}$, сила трения $\overline{F}_{тр}$, величина которой $F_{тр} = f \cdot N$. Введем систему координат, как показано на рисунке. Дифференциальные уравнения движения точки примут вид: $ma_x = T - F_{тр}$, $ma_y = N - P$. Второе уравнение, с учетом равенств $y = 0$, $a_y = 0$, дает

$N = P = mg$. Полагая $a = a_x$, первое уравнение записывается в виде: $ma = T - F_{тр} = T - fN$. Отсюда $T = ma + fmg = 329H$. **Ответ.** $T = 329H$.

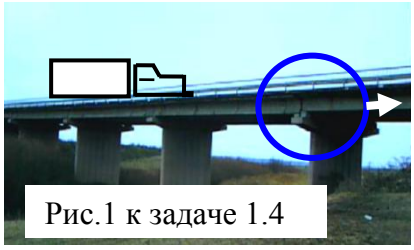


Рис.1 к задаче 1.4

Рис.2 к задаче 1.4

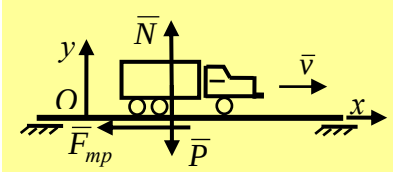


Рис.3 к задаче 1.4

Задача 1.4. Грузовой автомобиль массой $m = 20000кг$, двигаясь по мосту со скоростью $v_0 = 10м/с$, совершил экстренное торможение и остановился пройдя путь длиной $l = 20м$. Считая движение автомобиля после начала торможения равнозамедленным, определить равнодействующую горизонтальных сил, действующих на мост, вызванных торможением автомобиля.

Решение. На рис.1 и 2 к задаче в качестве примера показан действующий автомобильный мост, построенный по «балочной схеме» из тавровых железобетонных балок. Продольные силы, действующие на мост в моменты резких торможений, могут вызвать продольные перемещения балок на опорах (рис.2). Поэтому эти силы должны быть учтены еще на стадии проектирования моста.

«Тело» автомобиля совершает поступательное движение и может быть принято за точку. Силы, действующие на него в произвольный момент торможения, показаны на рис.3. Уравнения основного закона динамики для материальной точки, в показанной на рис.3 системе координат с началом в точке начала торможения O, запишем в форме: $ma_x = -F_{тр}$, $ma_y = N - P$. Учитывая, что $y = const$ и $a_y = \ddot{y} = 0$, из второго уравнения находим $N = P$. То есть величина вертикальной реакции моста равна весу автомобиля. Горизонтальную силу, действующую на автомобиль (по своей механической природе – это сила трения скольжения), находим из первого уравнения $F_{тр} = -ma_x$. По условию задачи при торможении автомобиль двигался равнозамедленно. Тогда путь, пройденный автомобилем, меняется по закону: $x = a_x t^2/2 + v_{x0}t$, а ускорение дается формулой: $a_x = (v - v_{x0})/t$. Если время t отсчитывать с момента начала торможения, то при $t = 0$ надо положить $v_{x0} = v_0$. Так как пройдя путь $x = l$ (при этом $t = \tau$) автомобиль останавливается, то $v = 0$, и $a_x = -v_0/\tau$. Отсюда $\tau = -v_0/a_x$. Подставляя τ в закон равнопеременного движения, получим: $l = a_x v_0^2/2a_x^2 - v_0^2/a_x = -v_0^2/2a_x$. Отсюда $a_x = -v_0^2/2l$. Тогда $F_{тр} = -ma_x = mv_0^2/2l = 5\cdot 10^4 H$. По третьему закону Ньютона, с такой же, но направленной в обратную сторону силой $\overline{T} = -\overline{F}_{|тр}$, автомобиль действует на мост. **Ответ.** $T = 5\cdot 10^4 H$.

Задача 1.5. Свободная материальная точка массой $m = 2кг$ совершает криволинейное движение в плоскости по закону: $s = 0{,}25t^2 + 1{,}25t + 0{,}07\,(м)$. Определить модуль равнодействующей сил, действующих на точку, в момент времени $t_1 = 1c$, если радиус кривизны траектории в данный момент времени $\rho = 1м$.

Решение. Точка движется в плоскости. Дифференциальные уравнения движения точки (2.17) имеют вид: $m\cdot d^2s/dt^2 = F_\tau$, $m\cdot v^2/\rho = F_n$. Здесь F_τ, F_n – проекции равнодействующей на касательную и нормаль к траектории в точке, соответственно.

Алгебраическое значение скорости вычисляется по формуле: $v = ds/dt = 0{,}5t + 1{,}25$. Проекции вектора ускорения $a_\tau = \dot{v} = 0{,}5(м/с^2)$, $a_n = v^2/\rho = (0{,}5t + 1{,}25)^2/\rho$. В момент времени $t_1 = 1c$ получаем $v_1 = 1{,}75 м/с$, $a_n = (0{,}5t_1 + 1{,}25)^2/\rho = 3{,}06(м/с^2)$. Модуль равнодействующей $F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = m\sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$. **Ответ.** $F = 6{,}21(H)$.

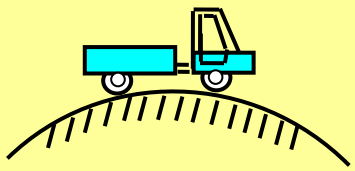


Рис. 1 к задаче 1.6

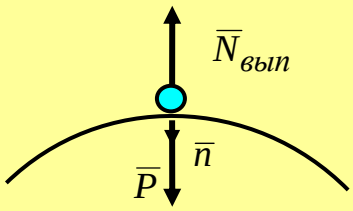


Рис. 2 к задаче 1.6

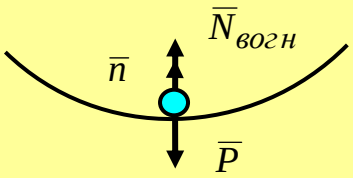


Рис. 3 к задаче 1.6

Задача 1.6. Автомобиль весом P движется с постоянной скоростью v по криволинейному мосту. Определить силу давления автомобиля на мост в момент прохождения автомобилем середины моста радиуса r.

Решение. Тело автомобиля (рис. 1) в рассматриваемый момент времени совершает поступательное движение и может быть принят за точку. Рассмотрим два варианта движения – движение по выпуклому мосту (рис. 2) и движение по вогнутому мосту (рис. 3). За положительное направление нормали $\overline{n}$ принимается направление к центру кривизны траектории.

Составим второе из уравнений движения точки по выпуклому мосту в естественных осях. $m\dfrac{v^2}{r} = P - N_{вып}$. Отсюда $N_{вып} = P - m\dfrac{v^2}{r}$. (1)

Далее составим аналогичное уравнение для движения точки по вогнутому мосту:

$$m\frac{v^2}{r} = N_{вогн} - P. \qquad \text{Отсюда} \qquad N_{вогн} = P + m\frac{v^2}{r}. \qquad (2)$$

Здесь $N_{вып}$, $N_{вогн}$ - значения равнодействующих реакций выпуклого и вогнутого мостов, соответственно. Значение $N_{вып}$ из (1) меньше веса автомобиля, а значение $N_{вогн}$ из (2) больше веса автомобиля. Такие же по величине силы действуют на мост со стороны автомобиля. Кроме того, при движении по выпуклому мосту при некоторых скоростях реакция моста может быть равна или близка к нулю. Полагая $N_{вып} = 0$, из (1) можно найти соответствующую этому случаю скорость движения автомобиля $v = \sqrt{gr}$ (опасная скорость). На практике при движении с такой скоростью по выпуклому мосту происходит нарушение управляемости автомобиля из-за уменьшения сил сцепления автомобиля с дорогой.

Задача 1.7 (13.3.14 [10]). Тело движется по горизонтальной поверхности, и в точке примыкания криволинейного участка отрывается от нее. Определить минимальную скорость тела в момент отрыва, если радиус закругления $R = 6м$.

Решение. Введем плоскую криволинейную систему координат с началом в точке примыкания O прямолинейного и криволинейного участков. Изобразим точку M

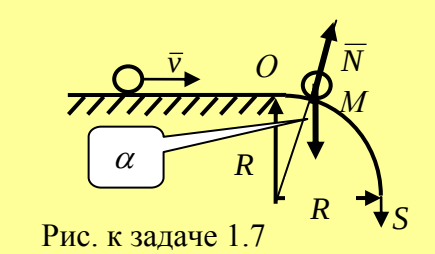


Рис. к задаче 1.7

в бесконечно малой окрестности начала координат. Воспользуемся вторым из уравнений движения точки в естественных осях $mv^2/R = -N + mg\cdot\cos\alpha$. Отсюда реакция плоскости $N = mg\cdot\cos\alpha - mv^2/R$. Так как угол α – бесконечно малая величина и $\cos\alpha \approx 1$, то $N = mg - mv^2/R$. Если точка давит на поверхности, то величина $N > 0$.

При некотором значении скорости $v = v_1$, которая определяется из уравнения $N = mg - m\cdot\frac{v_1^2}{R} = 0$, происходит отрыв точки от плоскости. Отсюда $v_1 = \sqrt{gR} = 7{,}67 м/с = v_{\min}$. При значениях скорости $v > v_1$ будем иметь $N < 0$, что означает разрыв связи точки с поверхностью. **Ответ.** $N_{в\ ы\ =n} P - m\frac{v^2}{r}$, $N_{вогн} = P + m\frac{v^2}{r}$, $v_{\min} = 7{,}67 м/с$.

§ 1.3. Решение второй задачи динамики

А. Движение точки по прямолинейной траектории

Задача 1.8. Тело массой $m = 20кг$ движется поступательно вниз по наклонной шероховатой плоскости AB, наклоненной к горизонту под углом $\alpha = 30^0$. Коэффициент трения скольжения $f = 0{,}2$. В точке A центр тяжести тела C имел скорость $v_A = 12 м/с$. Определить скорость точки и путь, пройденный точкой в момент времени $t_1 = 0{,}5с$. Кроме того, найти скорость тела в точке B, если $AB = 10м$.

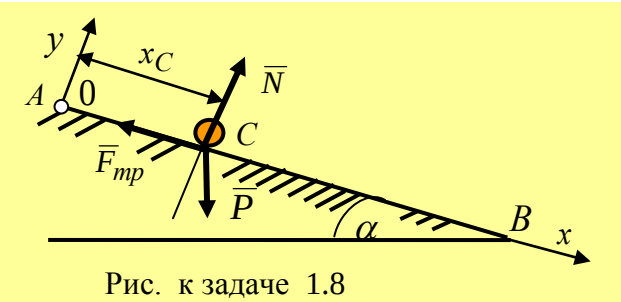


Рис. к задаче 1.8

Решение. В этой задаче показано интегрирование дифференциального уравнения движения точки при действии постоянных сил. Тело движется поступательно, поэтому его можно принять за точку. На рис.1 к задаче точка показана в произвольный момент времени. На точку действуют сила тяжести $\bar{P}$ и реакция шероховатой поверхности $\bar{R}_{тр}$. Силу $\bar{R}_{тр}$ разложим на силу трения $\bar{F}_{тр}$ и нормальную реакцию плоскости $\bar{R}_{тр} = \bar{F}_{тр} + \bar{N}$. Направление силы трения на рисунке соответствует движению точки вниз. Дифференциальные уравнения движения составим в системе координат, показанной на рис. к задаче. Тогда положение точки определяется одной координатой $x_C = AC$. За время $t = 0$ примем момент начала движения материальной точки C из положения A. Дифференциальные уравнения движения (2.7) примут вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = P\cdot\sin\alpha - F_{\text{тр}}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = N - P\cos\alpha, \quad z = 0.$$

В принятой системе координат $y = 0$ для любых значений времени, так как точка C движется по оси Ax. Следовательно, $d^2y/dt^2 = 0$. Тогда из второго уравнения получим $N - P\cos\alpha = 0$ и $N = P\cos\alpha = mg\cos\alpha$, где P – вес точки. Подставляя $P = mg$ и $F_{\text{тр}} = f\cdot N = fmg\cdot\cos\alpha$ в первое дифференциальное уравнение, получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

Чтобы найти закон движения точки $x = x(t)$, уравнение надо проинтегрировать два раза с учетом начальных условий $t = 0$, $v_x = v_A$, $x = x_0 = 0$. Представим вторую производную как первую от первой, и проинтегрируем уравнение. Проекция вектора скорости на ось Ax: $v_x = v = dx/dt$. Так как вектор скорости других проекций не имеет, индекс x, указывающий на координатную ось, стало возможным опустить.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = g(\sin\alpha - f\cos\alpha). \quad \text{Отсюда} \quad dv = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cdot dt.$$

Далее, $\int dv = \int g\cdot(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cdot dt$. Окончательно: $v = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cdot t + C_1$.

Константу интегрирования C_1 определим из начальных условий. При $t = 0$ скорость точки была $v = v_A = 12 м/с$. Это приводит к алгебраическому уравнению:

$v(0) = v_A = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cdot 0 + C_1$. Отсюда $C_1 = v_A = 12 м/с$. Тогда формула, пригодная для вычислений проекции вектора скорости на ось Ax, приобретает вид:

$$v = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cdot t + v_A. \qquad (1)$$

Подставляя в (1) $v = dx/dt$ и интегрируя полученное равенство, имеем:

$$dx = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cdot tdt + v_A dt, \quad x = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cdot t^2/2 + v_A t + C_2.$$

Постоянная интегрирования C_2 определяется из второго начального условия $x(0) = 0$: $x(0) = 0 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cdot 0^2/2 + v_A\cdot 0 + C_2$. Отсюда $C_2 = 0$. Окончательно:

$$x = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cdot t^2/2 + v_A t \qquad (2)$$

Скорость точки в момент $t_1 = 0{,}5c$ получим из (1): $v_1 = v(0{,}5) = 9{,}81\cdot(\sin 30^0 - 0{,}2\cdot\cos 30^0)\cdot 0{,}5 + 12 = 13{,}6(м/с)$. Координату точки в момент $t_1 = 0{,}5c$ получим из уравнения (2). $x_1 = x(0{,}5) = 9.81\cdot(\sin 30^0 - f\cos 30^0)\cdot 0{,}5^2/2 + v_A\cdot 0{,}5 = 6{,}4(м)$. Время движения t_2 от точки A до точки B найдем по длине спуска $AB = 10м$. Используя (2), записываем: $10 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cdot t_2^2/2 + v_A t_2$. Или $1{,}6t_2^2 + 12t_2 - 10 = 0$. Последнее уравнение имеет два корня: $t_{2,1} = 0{,}76(c)$ и $t_{2,2} = -8{,}26(c)$. Второй корень противоречит механическому смыслу. Подставляя в (1) $t = t_2 = 0{,}76(c)$, получим $v_B = 14{,}44(м/с)$. **Ответ.** $x_1 = 6{,}4(м)$, $v_1 = 13{,}6(м/с)$, $v_B = 14{,}44(м/с)$.

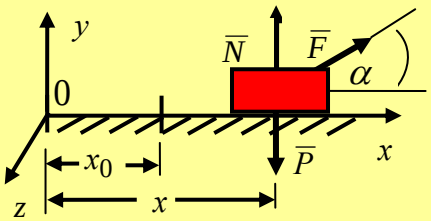


Рис. к задаче 1.9

Задача 1.9. Тело массой m движется по горизонтальной идеально гладкой плоскости под действием силы $\overline{F}$, направленной под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту. Модуль силы меняется по закону $F = kmt$, где k – положительная константа,

определяемая в эксперименте. Найти закон движения тела, если в начальный момент времени $t=0$ тело находилось в точке с координатой $x(0)=x_0$ и имело скорость $v_x(0)=v_0$.

Решение. В этой задаче интегрируется дифференциальное уравнение движения точки с правой частью, явно зависящей от времени. Тело совершает прямолинейное поступательное движение и может быть принято за точку. В системе координат, показанной на рисунке к задаче, изобразим точку в произвольный момент времени со всеми приложенными к ней силами. Две координаты точки известны заранее ($y=z=0$). Поэтому положение точки на траектории будет определяться только координатой $x=x(t)$. Дифференциальное уравнение движения точки запишем в вид: $m\ddot{x}=F\cdot\cos\alpha$ или $\ddot{x}=kt\cdot\cos\alpha$. Так как $\dot{x}=dx/dt=v_x$, дифференциальное уравнение можно записать так: $dv_x/dt=kt\cos\alpha$. Так как вектор скорости точки других проекций не имеет ($v_y=v_z=0$), у проекции вектора скорости на ось Ox можно опустить индекс и обозначить: $v_x=dx/dt=v$. Разделим переменные и проинтегрируем полученное уравнение: $dv=kt\cos\alpha\cdot dt$:

$$\int dv=\int kt\cos\alpha\cdot dt, \qquad v=k\cos\alpha\int tdt, \qquad v=kt^2\cos\alpha/2+C_1. \tag{1}$$

Первое начальное условие ($t=0$, $v_x=v_0$) с учетом (1) приводит к алгебраическому уравнению $v_0=0+C_1$. Отсюда $C_1=v_0$. Закон изменения проекции вектора скорости точки принимает вид:

$$v=kt^2\cos\alpha/2+v_0. \tag{2}$$

Чтобы найти закон движения точки $x=x(t)$, в уравнении (2) заменим v по формуле: $v=dx/dt$, разделим переменные и проинтегрируем. Получим равенства:

$$dx/dt=kt^2\cos\alpha/2+v_0, \qquad dx=(kt^2\cos\alpha/2+v_0)\cdot dt,$$

$$\int dx=\int(kt^2\cos\alpha/2)dt+\int v_0dt, \qquad x=(kt^3/6)\cos\alpha+v_0t+C_2. \tag{3}$$

Постоянная интегрирования C_2 определяется из второго начального условия ($t=0$, $x=x_0$), которое с учетом (3) приводит к уравнению $x_0=C_2$. Закон движения принимает вид:

$$x=(kt^3/6)\cos\alpha+v_0t+x_0 \tag{4}$$

Ответ. $x=(kt^3/6)\cos\alpha+v_0t+x_0$, $y(t)=z(t)=0$.

Задача 1.10. Материальная точка массой $m=100кг$ из состояния покоя начинает совершать прямолинейное движение под действием переменной силы, направленной по траектории движения. Величина силы меняется по закону $F=10t$. Определить промежуток времени t_1, за который скорость точки увеличится с 5 до $25м/с$, и путь l, пройденный точкой за это время.

Решение. С траекторией точки совместим ось Ox и направим ее в направлении вектора скорости точки. Так как $y=z=0$, дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки будет имеет вид: $m\ddot{x}=F_x=10t$. Правая часть уравнения явно зависит от времени. Интегрируя уравнение один раз, получим: $m\dot{x}=10t^2/2+C_1$. Так как $v_y=v_z=0$, то индекс можно опустить и положить $\dot{x}=v_x=v$, а последнему уравнению придать вид: $mv=10t^2/2+C_1$. Константа интегрирования C_1 определяется из начальных условий. За начальное время примем момент времени, с которого начинается изменение скорости с 5 до 25 *м/с*. Тогда начальные условия принимают вид: $t=0$, $v_0=5м/с$, $x=x_0=0$. Из первого

начального условия для определения C_1 получаем уравнение: $mv_0 = 10 \cdot 0^2/2 + C_1$. Отсюда $C_1 = mv_0$, и для проекции вектора скорости точки на ось Ox получим формулу:

$$mv = 10t^2/2 + mv_0. \qquad (1)$$

По условию задачи в некоторый момент времени $t = t_1$ величина скорости $v(t_1) = v_1 = 5v_0$. Подставляя $v(t_1) = 5v_0$ в (1) и решая уравнение относительно t_1, получим: $t_1 = \sqrt{2mv_0(5-1)/10} = \sqrt{2 \cdot 100 \cdot 5 \cdot 4/10} = 20(c)$. Другими словами, скорость точки возросла в пять раз за $20c$. Чтобы определить путь l, пройденный точкой за это время, найдем предварительно закон движения точки. Подставим $v = dx/dt$ в равенство (1) и проинтегрируем его еще один раз. Тогда $mx = 10t^3/6 + mv_0t + C_2$. Используя второе начальное условие ($t = 0$, $x = x_0 = 0$), получим $m0 = 10 \cdot 0/6 + mv_0 \cdot 0 + C_2$. Отсюда $C_2 = 0$. Уравнение движения принимает вид:

$$x = 5t^3/3m + v_0t.$$

В момент $t = t_1 = 20c$ получим $x(t_1) = l = 233{,}3(м)$. **Ответ.** $t_1 = 20c$, $l = 233{,}3м$.

Задача 1.11. На точку с массой $m = 30кг$, которая движется по горизонтальной прямой, действует сила сопротивления, зависящая от скорости. Модуль силы изменяется со временем по закону $R = 0{,}3v^2$. За сколько секунд скорость точки уменьшится с величины $v_0 = 10м/с$ до величины $v_1 = 5м/с$. **Решение. В этой задаче показано интегрирование дифференциального уравнения движения точки при действии силы, зависящей от квадрата скорости.** Изобразим точку на траектории в произвольный момент времени. Ось Ox направим по траектории в сторону движения точки. Проекции вектора скорости $v_x = v, v_y = v_z = 0$. Дифференциальное уравнение движения запишем в форме (2.9): $mdv/dt = -0{,}3v^2$. Разделяя переменные (поделив на v^2 и умножив на dt), получим уравнение $mdv/v^2 = -0{,}3dt$. Интегрируя один раз, получим закон изменения скорости в виде:

$$-m/v = -0{,}3t + C_1. \qquad (1)$$

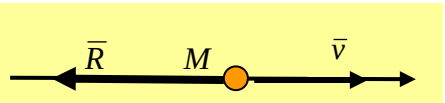


Рис. к задаче 1.11

Определим C_1. За начальный момент времени $t = 0$ примем момент начала торможения (уменьшения модуля вектора скорости). По условию задачи при $t = 0$ должно быть $v_0 = 10м/с$. Используя (1) и начальные условия, получим уравнение для определения постоянной интегрирования C_1: $-m/v_0 = -0{,}3 \cdot 0 + C_1$. Отсюда $C_1 = -m/v_0$, а закон изменения скорости (1) принимает окончательный вид: $-m/v = -0{,}3t - m/v_0$ или $v = m/(0{,}3t + m/v_0)$. (2)

Пользуясь этим решением, ответим на вопрос задачи. По условию задачи при некотором значении $t = t_1$ величина скорости уменьшается в два раза, и будет равна: $v_1 = 0{,}5v_0$. Подставим $v = v_1 = 0{,}5v_0$ и $t = t_1$ в соотношение (2). Решая полученное уравнение относительно t_1, имеем: $t_1 = -m(1/v_0 - 1/0{,}5v_0)/0{,}3 = 10(c)$. **Ответ.** $t_1 = 10c$.

Б. Движение свободной материальной точки в вертикальной плоскости при отсутствии сил сопротивления

Задача 1.12. Материальная точка M брошена под углом α к горизонту с начальной

скоростью $\bar{v}_0$. На точку действует сила тяжести $\bar{P} = m\bar{g}$. Определить траекторию движения точки, максимальную высоту полета и горизонтальную дальность, полное время полета точки до падения на Землю.

Решение. Система координат и материальная точка M в произвольный момент времени показаны на рис. 1. к задаче. Начало системы координат O примем в «точке бросания». Такой выбор осей обеспечит положительность значений координат точки в процессе всего ее движения, что удобно для вычислений.

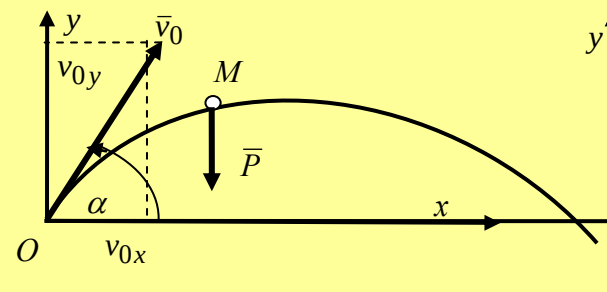


Рис. 1 к задаче.1.12

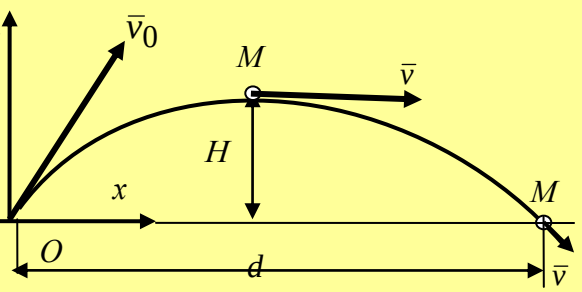


Рис. 2. к задаче 1.12

1. Уравнения движения и начальные условия. Так как точка движется в вертикальной плоскости, а проекции силы тяжести $P_x = 0,\ P_y = -P = -mg$ (см.рис.1), то дифференциальные уравнения движения примут вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -P \tag{1}$$

Уравнение движения в направлении оси z обращается в тождество, т.к. $z = 0$, и силы не проецируются на эту ось. Пусть время отсчитывается от момента начала движения точки. Проекции вектора начальной скорости $\bar{v}_0$ на оси координат равны: $v_{0x} = v_0\cos\alpha$, $v_{0y} = v_0\sin\alpha$. Следовательно, имеем следующие начальные условия:

При $t = 0$: $\quad x_0 = 0,\ y_0 = 0,\quad (2) \qquad v_{0x} = v_0\cos\alpha,\ v_{0y} = v_0\sin\alpha. \qquad (3)$

Здесь введены обозначения: $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$, $v_{0x} = v_x(0)$, $v_{0y} = v_y(0)$.

2.Интегрирование дифференциальных уравнений движения. Проинтегрируем первое дифференциальное уравнение из (1):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \text{или} \quad m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0. \quad \text{Тогда} \quad d\left(\frac{dx}{dt}\right) = dv_x = 0, \text{ где } v_x = \frac{dx}{dt}.$$

Отсюда $v_x = C_1$. Другими словами, проекция вектора скорости v_x – постоянна и, следовательно, равна своему начальному значению. С учетом (3) получаем: $C_1 = v_0\cos\alpha$. Окончательно: $v_x = v_0\cos\alpha$, то есть по оси Ox материальная точка движется равномерно с постоянной скоростью $v_x = v_0\cos\alpha$. Далее определим закон движения вдоль оси Ox. Так как $v_x = dx/dt$, последнее равенство перепишем в виде: $dx = v_0\cos\alpha\cdot dt$. Интегрируя, получим: $x = v_0 t\cos\alpha + C_2$. Константу C_2 определим из условия (2) с учетом равенства $x = v_0 t\cos\alpha + C_2$. Отсюда $x(0) = (v_0\cos\alpha)\cdot 0 + C_2 = 0$ или $C_2 = 0$. Окончательно:

$$v_x = v_0\cos\alpha, \qquad x = (v_0\cos\alpha)\cdot t. \tag{4}$$

Проинтегрировав второе из уравнений (1), получим закон изменения проекции вектора скорости (скорости) $v_y = dy/dt$. Проделаем очевидные действия и получим:

$m\frac{d^2y}{dt^2}=-P$, $m\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt})=-mg$. Тогда $d(\frac{dy}{dt})=-gdt$ и $\frac{dy}{dt}=v_y=-gt+C_3$.

Второе из начальных условий (3) с учетом последнего равенства дает $C_3=v_0\sin\alpha$, а закон изменения скорости точки вдоль оси Oy принимает вид: $v_y=-gt+v_0\sin\alpha$. Подставляя сюда $v_y=dy/dt$ и умножая последнее равенство на dt, после второго интегрирования получим уравнение движения точки вдоль оси Oy: $y=-gt^2/2+v_0t\sin\alpha+C_4$. Константа $C_4=0$ определяется из второго из начальных условий (2). Окончательно: $v_y=-gt+v_0\sin\alpha$, $y=-gt^2/2+v_0t\sin\alpha$. (5)

Итак, движение точки определяется уравнениями (4), (5). Используя эти уравнения, продолжим исследование движения точки.

3. Определение положения и скорости точки. Подставляя в (4) и (5) значения моментов времени, определяются координаты точки $x(t), y(t)$ и проекции вектора скорости точки $v_x(t)$, $v_y(t)$ в любой момент времени.

4. Определение траектории движения точки. Для определения траектории точки надо во вторых уравнениях движения (4), (5) избавиться от параметра времени t. Выражая t из второго уравнения (4), получим $t=x/(v_0\cos\alpha)$. Подставляя t во второе из уравнений (5), находим уравнение траектории:

$$y=-gx^2/(2v_0^2\cos^2\alpha)+x\cdot tg\alpha. \qquad (6)$$

Уравнением траектории является квадратный трехчлен, графиком которого, является парабола с осью, параллельной оси Oy. Ветви параболы направлены вниз (знак «-» перед квадратом x). Уравнению параболы удобно придать вид: $y=e\cdot(x-d/2)^2+h$. В нашем случае по уравнению траектории (6) получим:

$$y=-\frac{g}{2v_0^2\cdot\cos^2\alpha}\left(x-\frac{1}{2g}v_0^2\cdot\sin 2\alpha\right)^2+\frac{v_0^2\cdot\sin^2\alpha}{2g} \qquad (7)$$

5. Определение максимальной высоты траектории H. В некоторый момент времени $t=t_1$ материальная точка достигает максимальной высоты. Этот момент времени соответствует максимальному значению ординаты $y_{\max}$. При $t=t_1$ функция (6) достигает максимального значения, а вектор скорости точки $\bar{v}$, направленный по касательной к траектории, принимает горизонтальное положение, при котором $v_y=0$. Точка на мгновение зависает на высоте $y(t_1)=y_{\max}=H$. Пологая в (5) $v_y=0$, находим момент времени t_1: $v_y=-gt_1+v_0\sin\alpha=0$. Отсюда $t_1=(v_0/g)\cdot\sin\alpha$. При этом из (5) следует: $y_{\max}=y(t_1)=-gt_1^2/2+v_0t_1\sin\alpha=(v_0^2/2g)\cdot\sin^2\alpha$. Итак,

$$H=(v_0^2/2g)\cdot\sin^2\alpha. \qquad (8)$$

6. Горизонтальная дальность полета d. Чтобы найти дальность полета d, нужно найти точку пересечения траектории с осью Ox (рис. 2). Полагая в (6) $y=0$, получим: $-gx^2/(2v_0^2\cos^2\alpha)+x\cdot tg\alpha=0$. Отсюда $x_1=0$ и $x_2=(v_0^2\cdot\sin 2\alpha)/g$. Нулевой корень соответствует началу координат. Второй корень определяет дальность полета d:

$$d=(v_0^2\cdot\sin 2\alpha)/g. \qquad (9)$$

Как видно из (9), при постоянной скорости «бросания» v_0 наибольшая дальность $d_{\max}$ достигается для «угла бросания» $\alpha = 45^0$, когда имеем $\sin 2\alpha = 1$. Она равна: $d_{\max} = v_0^2 / g$. Интересно отметить, что так как $\sin 2\alpha = \sin(180^0 - 2\alpha) = \sin 2\beta$, где $\beta = 90^0 - \alpha$, то одна и та же дальность $d < d_{\max}$ достигается по двум траекториям. При «угле бросания» $\alpha < 45^0$ (в артиллерии она называется настильной траекторией), и при «угле бросания» $\alpha = 90^0 - \beta > 45^0$ (в артиллерии она называется навесной траекторией). Другими словами, при заданной начальной скорости v_0 (один и тот же снаряд) в одну и ту же точку оси Ox можно попасть двумя способами.

7. Полное время движения (полета) точки. Первое из соотношений (4) показывает, что в направлении оси Ox точка движется с постоянной скоростью $v_x = v_0 \cos\alpha$. Следовательно, поделив максимальную горизонтальную дальность d на значение этой скорости, можно определить полное время движения точки T.

$$T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} . \qquad (11)$$

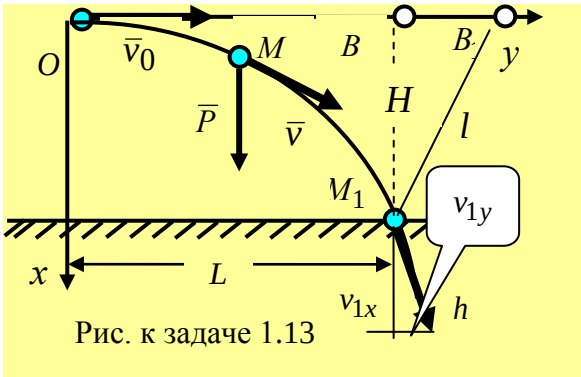


Рис. к задаче 1.13

Задача 1.13. С самолета, летящего на высоте $H = 200 м/с$ с постоянной скоростью $v = 40 м/с$, сброшен груз. Определить траекторию падения груза, горизонтальную дальность l падения груза от точки сбрасывания, расстояние L между самолетом и грузом в момент удара груза о Землю и величину скорости удара груза о Землю v_1. Сопротивлением пренебречь.

Решение. Примем груз за точку. В момент сбрасывания груза ($t = 0$) «тело» самолета совершает поступательное движение и принимается за точку. Начало правой прямоугольной системы координат совместим с положением груза (с самолетом) в момент его сбрасывания. Ось Ox направим перпендикулярно к Земле, ось Oy – по направлению движения самолета. Если не учитывать силы сопротивления, движение груза будет происходить в плоскости Oxy под действием только постоянной силы тяжести $\bar{P} = m\bar{g}$, $g = 9{,}81 м/с^2$. Дифференциальные уравнения движения точки и начальные условия принимают вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg , \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = 0 . \qquad (1)$$

$$t = 0: \quad x(0) = x_0 = 0,\ y(0) = y_0 = 0; \qquad \dot{x} = v_x = 0, \quad \dot{y} = v_y = v_0 = v . \qquad (2)$$

Другими словами, величина начальной скорости груза в вертикальном направлении равна нулю, а в горизонтальном направлении $v_0 = v$, то есть совпадает со скоростью самолета. Решения уравнений (1) известны (см. предыдущую задачу):

$$v_x = gt + C_1, \quad x = gt^2/2 + C_1 t + C_2; \qquad v_y = C_3, \quad y = C_3 t + C_4 .$$

Из начальных условий (2) получим: $C_1 = C_2 = C_4 = 0, C_3 = v$. Тогда

$$v_x = gt, \quad x = gt^2/2, \qquad v_y = v, \quad y = vt . \qquad (3)$$

Выразим $t = y/v$ из четвертого уравнения (3) и подставим во второе. Имеем:

$$x = \frac{g}{2v^2} \cdot y^2 . \qquad (4)$$

Это уравнение параболы с ветвями, вытянутыми вдоль оси Ox. Траекторией движения точки является правая ветвь параболы, лежащая в положительной четверти системы координат. Время падения груза на Землю t_1 найдем из второго уравнения (3) по условию $x(t_1) = H$. Тогда $H = gt_1^2/2$. Отсюда, $t_1 = \sqrt{2H/g} = 6{,}39c$. Горизонтальная дальность полета груза соответствует координате $y(t_1) = L = vt_1 = v \cdot \sqrt{2H/g} = 255{,}42м$. Такое же расстояние $OB = L$, судя по решению, за это время пролетит и самолет, если будет продолжать двигаться с той же скоростью $v = 40м/c$ (144 *км/час*). Следовательно, расстояние между самолетом и грузом в момент его падения на Землю будет *H*. На практике, скорость груза в горизонтальном направлении станет меньше скорости самолета из-за сил сопротивления, которые в этом решении не учитываются, но будут рассмотрены в следующей задаче. Если после сбрасывания груза самолет резко увеличит скорость, например, до $v^* = 60м/c$ $(216км/час)$, то за время падения груза он пролетит расстояние $OB_1 = v^* \cdot t_1 = 383{,}4м.$ Расстояние между грузом и самолетом $l = \sqrt{H^2 + (v^* - v)^2 \cdot t_1^2} = 237{,}35м.$ Потребность в увеличении расстояния l может возникать, например, при бомбометании. Наконец, найдем скорость груза v_1 в момент времени t_1 (в момент падения на Землю). С учетом первой и третьей формул из (3) получаем: $v_1 = \sqrt{v_x^2(t_1) + v_y^2(t_1)} = \sqrt{g^2 t_1^2 + v^2} = 74{,}36м/c.$ Отсюда видно, что скорость удара груза о Землю тем больше, чем больше высота сбрасывания (чем больше t_1) и скорость сбрасывания v. Недопустимо большие скорости ведут к разрушению груза. Другими словами, сбрасывать груз нужно с допустимо минимальных высот и при минимально допустимых скоростях полета.

В. Движение свободной материальной точки в вертикальной плоскости при учете сил сопротивления, пропорциональных скорости

Задача 1.14. Тело массой m, двигаясь поступательно по наклонной плоскости AB, в некоторый момент времени, принятый за нулевой, покидает ее со скоростью $\bar{v}_B$. Далее, находясь в свободном полете под действием силы тяжести $\bar{P}$ и силы сопротивления $\bar{R} = -km\bar{v}$, пропорциональной вектору скорости, тело в точке C падает на наклонную плоскость BC. Определить горизонтальную дальность полета тела d, величину скорости v_C, с которой тело упадет на наклонную плоскость BC и время полета T от точки B до точки C, если $k = 0{,}15$, $v_B = 10м/c$, $\alpha = 30^0$, $\beta = 60^0$, $m = 0{,}5кг$.

Решение. 1. Дифференциальные уравнения движения точки. Введем прямоугольную декартову систему координат Bxy**,** как показано на рис. 2 к задаче.

Изобразим точку в произвольный момент времени с действующими на нее силами. Принимая во внимание, что проекции вектора силы $\bar{R}$ на оси соответственно равны $R_x = -kmv_x$, $R_y = -kmv_y$, где $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, дифференциальные уравнения движения точки и начальные условия примут вид (1) и (2), соответственно:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - km\frac{dx}{dt}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -km\frac{dy}{dt}. \quad \text{Или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} = g, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + k\frac{dy}{dt} = 0. \quad (1)$$

$$t = 0: \qquad x(0) = y(0) = 0, \quad v_x(0) = v_B \sin\alpha, \quad v_y(0) = v_B \cos\alpha. \qquad (2)$$

2. Решение дифференциальных уравнений движения точки (1). Общее решение $x(t)$ первого из уравнений (1) складывается из общего решения $x^0(t)$ однородного уравнения и частного решения $\bar{x}(t)$ неоднородного уравнения. То есть $x(t) = x^0 + \bar{x}$. Решение однородного уравнения будем искать в виде $x = \exp(\lambda t)$. Подставляя это в первое из уравнений (1), приходим к характеристическому уравнению: $\lambda^2 + k\lambda = 0$, имеющему два корня: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -k$. Тогда $x^0(t) = C_1 + C_2 \exp(-kt)$. Частное решение уравнения (1) ищем в виде: $\bar{x} = At$, где A – пока неизвестная константа. Подставляя это решение в неоднородное уравнение (1) для координаты $x(t)$, находим: $A = g/k$. Тогда $\bar{x} = gt/k$.

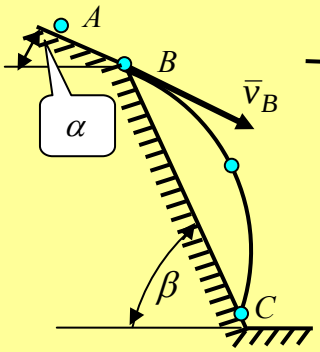


Рис.1 к задаче 1.14

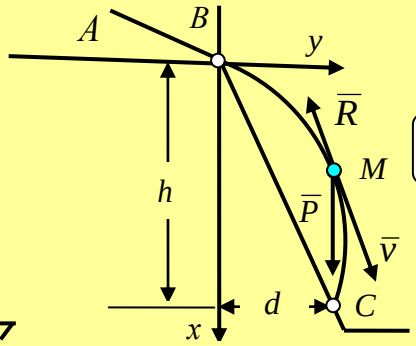


Рис.2 к задаче 1.14

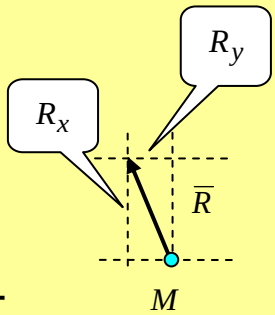


Рис.3 к задаче 1.14

Аналогично можно найти общее решение $y(t) = y^0(t)$ второго уравнения, которое описывает движение по оси By Окончательно:

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{-kt} + gt/k, \qquad y(t) = C_3 + C_4 e^{-kt} \quad . \qquad (3)$$

Проекции вектора скорости точки определим, продифференцировав по времени (3):

$$v_x = \dot{x}(t) = -k \cdot C_2 e^{-kt} + g/k, \qquad v_y = \dot{y}(t) = -k \cdot C_4 e^{-kt}. \qquad (4)$$

Постоянные интегрирования определяются с помощью начальных условий (2). Первые два из них с учетом (3) дают: $C_1 + C_2 = 0$, $C_3 + C_4 = 0$. Отсюда $C_1 = -C_2$ и $C_3 = -C_4$. Вторые два условия с учетом (4) приводят к уравнениям: $-k \cdot C_2 + g/k = v_B \sin\alpha$ и $-k \cdot C_4 = v_B \cos\alpha$. Отсюда $C_1 = -C_2 = v_B \sin\alpha / k - g/k^2$. $C_3 = -C_4 = v_B \cos\alpha / k$. Подставляя найденные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 в формулы (3) и (4), получим закон движения точки и закон изменения ее скорости. Итак,

$$x(t) = \left(\frac{v_B \sin\alpha}{k} - g/k^2\right)(1 - e^{-kt}) + gt/k, \qquad y(t) = \frac{v_B \cos\alpha}{k}(1 - e^{-kt}). \qquad (5)$$

$$v_x = (v_B \sin\alpha - g/k) \cdot e^{-kt} + g/k, \qquad v_y = (v_B \cos\alpha) \cdot e^{-kt}. \qquad (6)$$

3. Определение горизонтальной дальности полета точки. Определим траекторию движения точки. Выразим t из второго из уравнений (5).

$$e^{-kt} = 1 - \frac{\kappa \cdot y(t)}{v_B \cos\alpha}. \quad \text{Логарифмируя, имеем:} \quad t = -\frac{1}{k}\ln\left(1 - \frac{\kappa \cdot y(t)}{v_B \cos\alpha}\right). \qquad (7)$$

Подставляя найденные выражения e^{-kt} и t в первое из уравнений (5), после простых преобразований получим уравнение траектории точки.

$$x(t) = y(t)\cdot(tg\alpha - \frac{g}{kv_B\cos\alpha}) - \frac{g}{k^2}\ln(1-\frac{\kappa\cdot y(t)}{v_B\cos\alpha}) \ . \qquad (8)$$

Зная уравнение траектории, определим горизонтальную дальность полета точки. Материальная точка M падает на наклонную плоскость в точке C, координаты которой обозначим $x_{\max} = h, y_{\max} = d$ (рис.2). Величину d принято называть горизонтальной дальностью полета точки. Точка C лежит на траектории движения материальной точки, поэтому ее координаты должны удовлетворять уравнению траектории (8). Подставляя координаты точки C ($x_{\max} = h, y_{\max} = d$) в уравнение (8) и учитывая, что $h = d\cdot tg\beta$ (рис.1 и 2), получим уравнение для определения d:

$$d\cdot tg\beta = d\cdot(tg\alpha - \frac{g}{kv_B\cos\alpha}) - \frac{g}{k^2}\ln(1-\frac{\kappa\cdot d}{v_B\cos\alpha}). \qquad (9)$$

Произведем в (9) замену переменных. Пусть $z = \dfrac{\kappa\cdot d}{v_B\cos\alpha}$, тогда $d = z\cdot v_B\cos\alpha/k$.

После преобразований уравнение (9) примет вид, содержащий только переменную z:

$$\ln(1-z) = -z\cdot\gamma, \quad \text{где} \quad \gamma = \left[1+(tg\beta - tg\alpha)\cdot\frac{kv_B\cos\alpha}{g}\right] = 1{,}153. \qquad (10)$$

Избавляясь от логарифмической функции, получим уравнение для определения z:

$$1 - z = \exp(-\gamma z). \qquad (11)$$

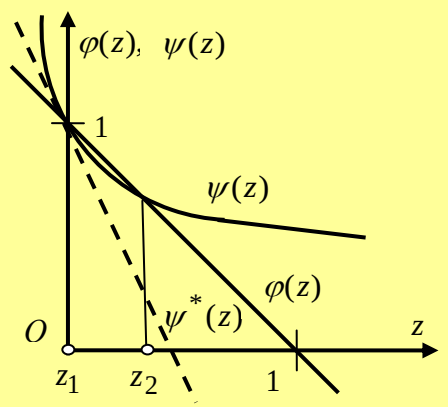


Рис. 4. к задаче 1.14

Уравнение (11) решается графическим методом. Обозначим $\varphi(z) = 1 - z$ и $\psi(z) = \exp(-\gamma z)$. По одной оси на рисунке отложены значения переменной z, а по другой оси отложены вычисленные соответствующие значения функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ (рис.4). График функции $\varphi(z)$ – прямая, которая отсекает на осях отрезки, равные единице. Тангенс угла наклона прямой $\varphi(z) = 1 - z$ равен минус единице. График функции $\psi(z)$ – кривая экспоненциальная. При $z = 0$ значения функций совпадают и равны $\varphi(0) = \psi(0) = 1$.

Следовательно, $z = z_1 = 0$ является первым корнем уравнения (11). Но ему соответствует значение $d = 0$, которое нам не интересно. В интервале $0 \le z \le 1$ поищем другие корни. Производная $\psi'(z) = -\gamma\cdot\exp(-\gamma z)$. В начале координат $\psi'(0) = -\gamma = -1{,}153 < -1$. То есть тангенс угла наклона касательной к функции $\psi(z)$ в точке $z = 0$ (штрихпунктирная линия на рисунке) больше тангенса угла наклона прямой $\varphi(z) = 1 - z$. Следовательно, в окрестности начала координат $\psi(z) \le \varphi(z)$ (кривая $\psi(z)$ проходит ниже прямой $\varphi(z)$), а в силу монотонности функций, в интервале $0 < z < 1$ существует еще один корень z_2 уравнения (11). Чтобы найти этот корень, вычислим разность функций $\eta(z) = \varphi(z) - \psi(z)$ в интервале $0 < z < 1$ с шагом $\Delta z = 0{,}1$. Счет останавливаем, как только функция $\eta(z)$ поменяет знак. Результаты вычислений сведем в таблицу.

z	0,1	0,2	0,3	0,4
$\eta(z)$	+0,009	+0,006	-0,008	-0,031

Как видим, корень уравнения лежит в интервале $0{,}2 < z < 0{,}3$. Это уже приближенное решение, которое мы уточним. Для этого функцию $\eta(z)$ в интервале $0{,}2 < z < 0{,}3$ вычислим с шагом $\Delta z = 0{,}01$. Результаты сведем в таблицу.

z	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26	0,27
$\eta(z)$	+0,005	+0,004	+0,003	+0,002	+0,00043	-0,001	0,002

Функция $\eta(z)$ меняет знак при $0{,}25 < z < 0{,}26$. За приближенное значение второго корня уравнения (11) можно взять значение $z_2 = 0{,}25$. Тогда горизонтальная дальность равна: $d = z_2 \cdot v_B \cos\alpha / k = 0{,}25 \cdot 10 \cdot 0{,}866 / 0{,}15 = 14{,}43 м$. $h = d \cdot tg\beta = 24{,}99 м$.

4. Определение времени полета T. Для параметра t имеем выражение (7):

$$\mathrm{t} = -\frac{1}{k}\ln(1 - \frac{\kappa \cdot y(t)}{v_B \cos\alpha}). \qquad (12)$$

Тогда расстояние, равное дальности полета d, точка пролетит за время:

$$\mathrm{T} = -\frac{1}{k}\ln(1 - \frac{\kappa \cdot d}{v_B \cos\alpha}) = -\frac{1}{0{,}15}\ln(1 - \frac{0{,}15 \cdot 14{,}43}{10 \cdot 0{,}866}) = 1{,}917 c. \qquad (13)$$

Другими словами, между геометрическими точками B и C материальная точка будет падать 1,917с.

5. Определение скорости падения в точке C. Проекции вектора скорости точки определяются по формулам (6). В момент падения точки на плоскость, то есть при $t = T$ будем иметь:

$$v_{Cx} = (10 \cdot \sin 30 - 9{,}81/0{,}15) \cdot e^{-0{,}15 \cdot 1{,}917} + 9{,}81/0{,}15 = 20{,}1 м/с,$$

$$v_{Cy} = (10 \cdot 0{,}866) \cdot 0{,}75 = 6{,}45 м/с,$$

$$v_C = \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2} = \sqrt{20{,}1^2 + 6{,}45^2} = 20{,}11 м/с.$$

Точка ударится о наклонную плоскость со скоростью $v_C = 20{,}11 м/с$.

6. Решение задачи без учета сил сопротивления. Все функции в этой задаче отметим звездочкой. Пусть на участке BC на точку действует только сила тяжести. Тогда, полагая в уравнениях (1) $k = 0$, получим дифференциальные уравнения задачи: $\ddot{x}^* = g$ и $\ddot{y}^* = 0$. Решение этих уравнений, удовлетворяющее начальным условиям (2), будет записано так (см. задачу 2.13): $v_x^* = gt + v_B \cdot \sin\alpha$, $v_y^* = v_B \cdot \cos\alpha$, $x^* = gt^2/2 + v_B \cdot t \cdot \sin\alpha$, $y^* = v_B \cdot t \cdot \cos\alpha$. Параметр времени находится из второго уравнения движения и равен $t^* = y^*/(v_B \cos\alpha)$. Уравнение траектории: $x^* = gy^{*2}/(2v_B^2 \cos^2\alpha) + y^* tg\alpha$. В точке C $x^* = h^*$, $y^* = d^*$ и $h^* = d^* \cdot tg\beta$. Подставляя координаты точки C в уравнение траектории, получим: $d^* tg\beta = gd^{*2}/(2v_B^2 \cos^2\alpha) + d^* tg\alpha$. Из последнего уравнения находим горизонтальную дальность полета: $d^* = 2(tg\beta - tg\alpha)v_B^2 \cos^2\alpha / g = 17{,}656 м$. Высота падения $h^* = d^* \cdot tg\beta = 30{,}58 м/с$. Время полета от точки B до точки C равно: $t^* = T^* = d^*/v_B \cos\alpha = 17{,}66/10 \cdot 0{,}866 = 2{,}04 c$. Теперь можно определить и скорость

точки в момент падения: $v_{Cx}^{*} = gt + v_B \cdot \sin\alpha = 25{,}01 м/с$, $v_{Cy}^{*} = v_B \cdot \cos\alpha = 8{,}66 м/с$.

Модуль вектора скорости в точке падения: $v_C^{*} = \sqrt{v_{Cx}^{*2} + v_{Cy}^{*2}} = 26{,}47 м/с$.

7. Влияние сил сопротивления. Итак, получили: $v_C = 20{,}11 м/с$, $v_C^{*} = 26{,}47 м/с$; $T = 1{,}917 с$, $T^{*} = 2{,}04 с$; $d = 14{,}43 м$, $d^{*} = 17{,}656 м$. **Вывод:** наличие сопротивления уменьшает горизонтальную дальность полета, время полета и скорость падения.

§ 1.4. Задачи на относительное движение точки

Задача 1.15. Трубка OA вращается вокруг оси Ox, перпендикулярной плоскости рисунка, по закону $\varphi = 2t^2 + 1$ (рис.1). По трубке от точки O к точке A движется материальная точка M массой $m = 3{,}2 кг$ по закону $S = 0{,}1t^2 + 0{,}6 (м)$. Определить модуль и направление вектора ускорения Кориолиса точки и соответствующую силу инерции точки при $t = t_1 = 1с$.

Решение. Введем две системы координат. Неподвижную систему координат $Oxyz$ и подвижную систему координат Os, жестко связанную с вращающейся трубкой. В подвижной системе координат рассматривается относительное движение точки M. Искомая сила инерции Кориолиса вычисляется по формуле $\bar{\Phi}_{кор}^{ин} = -m\bar{a}_{кор}$, где $\bar{a}_{кор} = 2 \cdot (\bar{\omega}_{пер} \times \bar{v}_{отн})$. Найдем скорость точки $\bar{v}_{отн}$ в относительном движении. Мысленно останови трубку в заданный момент времени $t = t_1 = 1с$. Точка находится на расстоянии $OM = S(t_1) = 0{,}1 + 0{,}6 = 0{,}7 (м)$ от начала координат. Алгебраическое значение скорости изменятся по закону $v_{отн}(t) = \dot{s} = 0{,}2t$. При $t = t_1 = 1с$ имеем $v_{отн}(t_1) = 0{,}2 (м/с)$. Так как $v_{отн} > 0$, вектор скорости $\bar{v}_{отн}$ направлен по оси трубки от точки M к точке A.

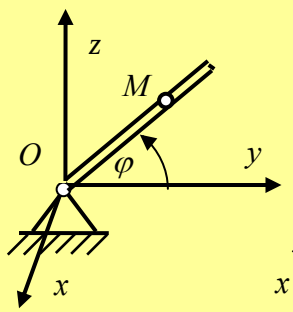


Рис. 1 к задаче 1.15

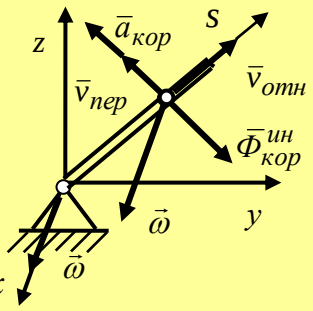


Рис. 2 к задаче 1.15

Переносным движением точки является движение точки вместе с вращающейся трубкой. Угловая скорость подвижной системы координат (трубки) и есть угловая скорость в переносном движении. $\omega_{пер} = \dot{\varphi} = 4t$. При $t = t_1 = 1с$ имеем $\omega_{пер} = 4 (рад/с)$. Когда трубка вращается против часовой стрелки, как показано на рис.1, вектор $\bar{\omega}_{пер}$ направлен по оси Ox, то есть на наблюдателя. Следовательно, векторы $\bar{\omega}_{пер}$ и $\bar{v}_{отн}$ – взаимно перпендикулярны. При этом вектор $\bar{v}_{отн}$ лежит в плоскости, перпендикулярной к вектору $\bar{\omega}_{пер}$. Повернув вектор $\bar{v}_{отн}$ вокруг точки M на угол 90^0 в сторону вращения трубки, определяем направление вектора ускорения Кориолиса $\bar{a}_{кор}$. Модуль этого вектора равен: $a_{кор} = 2\omega_{пер} \cdot v_{отн} \cdot \sin 90^0 = 2 \cdot 4 \cdot 0{,}2 = 1{,}6 (м/с^2)$. Вектор $\bar{\Phi}_{кор}^{ин} = -m\bar{a}_{кор}$ приложен в

точке M и направлен противоположно вектору $\bar{a}_{кор}$. Модуль $\Phi^{ин}_{кор} = ma_{кор} = 3{,}2 \cdot 1{,}6 = 5{,}12(H)$. **Ответ.** $a_{кор} = 1{,}6(м/с^2)$, $\Phi^{ин}_{кор} = 5{,}12(H)$.

Задача 1.16.(9.64 [9]). Грузовой автомобиль везет в кузове тяжелую бетонную плиту, двигаясь со скоростью v_0. При каком минимальном тормозном пути (движение при торможении считать равнозамедленным) плита не сместится относительно кузова, если коэффициент трения скольжения между плитой и кузовом равен f.

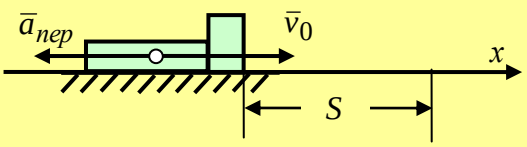


Рис. 1 к задаче 1.16

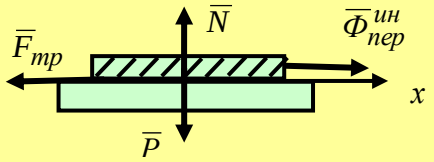


Рис. 2 к задаче 1.16

Решение. Автомобиль совершает прямолинейное поступательное движение вдоль неподвижной оси x и может быть принят за точку (рис.1). Направление движения совпадает с направлением вектора скорости. Тогда путь, пройденный автомобилем, при торможении, в зависимости от величины ускорения (замедления) a может быть определен по закону равнопеременного движения точки. Определим сначала время торможения из формулы $v = -at + v_0$. В момент остановки $v = 0$. Тогда автомобиль будет двигаться от начала торможения до полной остановки $t = v_0 / a$ (*сек*) и пройдет путь $S = -at^2/2 + v_0 t$. Подставляя найденное t, найдем: $a = v_0^2 / 2S$ ($м/с^2$). Далее рассмотрим движение самой плиты в кузове автомобиля (относительное движение). Силы, действующие на плиту, показаны на рис. 2. По условию задачи плита должна оставаться в покое относительно платформы кузова, то есть должно быть: $\bar{a}_{отн} = 0$. Кроме того, и $\bar{a}_{кор} = 0$, так как $\bar{\omega}_{пер} = 0$. Следовательно, приходим к уравнению относительного равновесия точки. Модуль переносной силы инерции $\Phi^{ин}_{пер} = ma_{пер}$. Переносное ускорение плиты $a_{пер}$ равно по величине ускорению автомобиля. То есть $a_{пер} = v_0^2 / 2S$, а сама сила направлена против вектора $\bar{a}_{пер}$ вправо. Составим уравнение относительного равновесия точки (ось x). Получим: $-F_{тр} + ma_{пер} = 0$. Или $-fN + ma_{пер} = 0$. Но $N = mg$, $a_{пер} = v_0^2 / 2S$. Тогда уравнение принимает вид: $-fmg + mv_0^2 / 2S = 0$. Отсюда $S = v_0^2 / 2fg$. **Ответ.** Торможение должно начаться не менее чем за $S = v_0^2 / 2fg$ ($м$) до полной остановки.

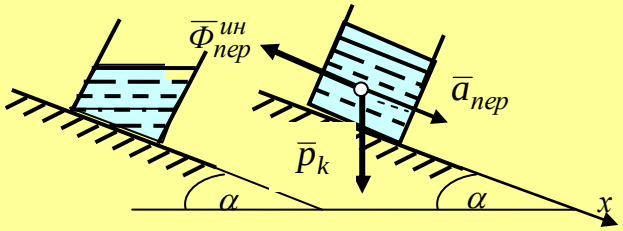


Рис. 1 к задаче 1.17 Рис. 2 к задаче 1.17

Задача 1.17.(13.7.7 [10]). С каким ускорением $\bar{a}$ должен двигаться сосуд, наполненный водой, чтобы свободная поверхность воды стала параллельной наклонной плоскости, если угол наклона плоскости $\alpha = 20^0$?

Решение. Известно, что свободная поверхность воды в сосуде в состоянии покоя всегда

горизонтальна, как показано на рис.1 к задаче. Рассмотрим движение бесконечно малых объемов (частиц) воды с массой m_k. Пусть сосуд начинает поступательно двигаться с увеличивающимся ускорением до тех пор, пока свободная поверхность воды не станет параллельной наклонной плоскости. Дальнейшее движение сосуда должно быть равноускоренным, то есть ускорение должно оставаться постоянным и равным некоторому $\bar{a}_{пер}$. Движение частиц воды вместе с сосудом – это их переносное движение. Движение воды в сосуде – это их относительное движение. При движении сосуда с ускорением $\bar{a}_{пер}$ частицы воды приходят в состояние покоя, так как поверхность воды остается параллельной плоскости. Следовательно, их относительное ускорение в этом состоянии $\bar{a}_{отн} = 0$. Кроме того, при поступательном переносном движении $\bar{\omega}_{пер} = 0$, тогда $\bar{a}_{кор} = 0$ и $\bar{\Phi}^{ин}_{кор} = 0$. При этом уравнение относительного движения переходит в уравнение относительного покоя.

Предположим, что трением между частицами воды и стенками сосуда можно пренебречь. В этом случае на частицу воды действуют только ее сила тяжести и сила инерции переносного движения, как показано на рисунке 2. Запишем условия равновесия в проекциях на ось x: $p_k \sin\alpha - m_k a_{пер} = 0$. Учитывая, что $p_k = m_k g$, получим: $a_{пер} = g \cdot \sin\alpha = 9{,}81 \cdot 0{,}342 = 3{,}36 м/с$. **Ответ.** $a_{пер} = 3{,}36 м/с$.

Задача 1.18. Кабина лифта, в которой находятся четыре человека, поднимается с ускорением $a = 0{,}25g$. Определить суммарную силу давления пассажиров на пол лифта, если массы пассажиров: $m_1 = 50кг$, $m_2 = 76кг$, $m_3 = 81кг$, $m_4 = 30кг$.

Решение. На пол лифта действуют четыре параллельные силы тяжести пассажиров $\bar{p}_1 = m_1\bar{g}$, $\bar{p}_2 = m_2\bar{g}$, $\bar{p}_3 = m_3\bar{g}$, $\bar{p}_4 = m_4\bar{g}$. В процессе движения пассажиры неподвижны (рис.1 к задаче). Система параллельных сил $\bar{p}_k$ имеет равнодействующую $\bar{P} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_3 + \bar{p}_4 = m\bar{g}$, где $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 237кг$ – суммарная масса всех пассажиров. Тогда можно считать, что на пол кабины лифта в точке приложения равнодействующей $\bar{P}$ действует груз с массой, равной m. Этот груз можно принять за точку M. Лифт движется поступательно. Угловая скорость переносного движения $\bar{\omega}_{пер} = 0$, ускорение Кориолиса точки $\bar{a}_{кор} = 2(\bar{\omega}_{пер} \times \bar{v}_{отн}) = 0$ и сила инерции $\bar{\Phi}^{ин}_{кор} = -m\bar{a}_{кор} = 0$. Так как точка M находится в покое по отношению к полу лифта, то относительное ускорение точки $\bar{a}_{отн} = 0$. С учетом сказанного, уравнение относительного движения точки принимает вид: $\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k + \bar{\Phi}^{ин}_{пер} = 0$. Спроецируем это уравнение на ось z. Силы, которые входят в это уравнение, показаны на рис. 2. Получим: $N - P - ma_{пер} = 0$, где $P = mg$, $a_{пер} = a = 0{,}25g$, и тогда

$$N = mg + 0{,}25mg = 1{,}25mg.$$

Подставляя числовые значения,

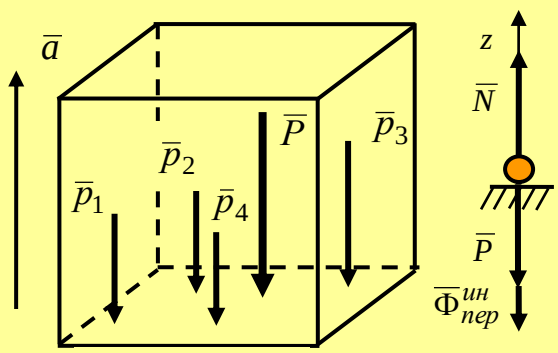


Рис. 1
к задаче 1.18

Рис. 2
к задаче 1.18

находим $N = 2906{,}2H$. Это пока реакция пола лифта. По третьему закону Ньютона сила давления пассажиров на пол $\overline{N}^* = -\overline{N}$. **Ответ.** $N^* = N = 2906{,}2H$.

§ 1.5. Задачи на применение теоремы об изменении количества движения точки

Задача 1.19. Вектор скорости точки массой $m = 5кг$ в процессе движения меняется по закону: $\overline{v} = 2t^2 \cdot \overline{i} + 3t^3 \cdot \overline{j} + t \cdot \overline{k}$. Определить модуль равнодействующей действующих на точку сил в момент времени $t_1 = 1c$.

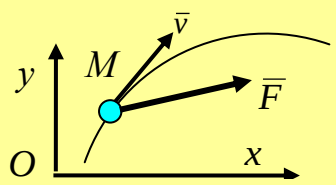


Рис. к задаче 1.19

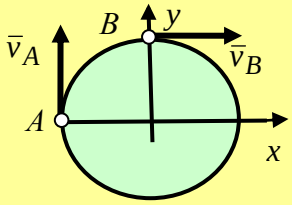


Рис.1 к задаче 1.20

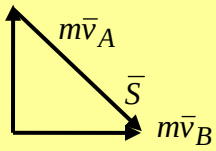


Рис.2 к задаче 1.20

Решение. Воспользуемся дифференциальной формулировкой теоремы. Тогда равнодействующая сил, приложенных к точке, равна $\overline{F} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k = d(m\overline{v})/dt$. Вектор количества движения материальной точки можно разложить: $m\overline{v} = 5 \cdot \overline{v} = 5(2t^2 \cdot \overline{i} + 3t^3 \cdot \overline{j} + t \cdot \overline{k}) = 10t^2 \cdot \overline{i} + 15t^3 \cdot \overline{j} + 5t \cdot \overline{k}$, а $d(m\overline{v})/dt = 20t \cdot \overline{i} + 45t^2 \cdot \overline{j} + 5 \cdot \overline{k}$. Следовательно, и $\overline{F} = 20t \cdot \overline{i} + 45t^2 \cdot \overline{j} + 5 \cdot \overline{k}$. При $t = t_1$ имеем $|\overline{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{20^2 + 45^2 + 5^2} = 49{,}5H$. **Ответ.** $|\overline{F}| = 49{,}5H$.

Задача 1.20. Материальная точка массой $m = 5кг$ совершает равномерное движение по окружности. Величина скорости $v = 10м/с$. Определить модуль импульса равнодействующей всех сил, действующих на точку, при ее перемещении из точки A в точку B (рис. 1 к задаче). Задачу решить геометрическим и аналитическим способами.

Решение. а) Геометрический способ. Обратимся к векторной форме записи теоремы об изменении количества движения точки и изобразим разность векторов $m\overline{v}$ на рис. 2 к задаче. По условию задачи треугольник является прямоугольным и равнобедренным. Длины катетов равны величинам количества движения точки $mv_A = mv_B = 50Hc$. Тогда длина гипотенузы равна импульсу равнодействующей и вычисляется по теореме Пифагора $S = \sqrt{(mv_A)^2 + (mv_B)^2} = 50\sqrt{2} = 70{,}71Hc$.

б) Аналитический способ. Определим проекции вектора импульса $\overline{S}$ равнодействующей сил, действующих на точку . В принятых осях координат (рис.1) $S_x = mv_B$, $S_y = -mv_A$. Отсюда $S = \sqrt{(S_x)^2 + (S_y)^2} = 70{,}71Hc$. Результаты а) и б) совпали. **Ответ.** $S = 70{,}71Hc$.

Задача 1.21. Тело M массой $m = 10кг$ движется поступательно и прямолинейно из состояния покоя по шероховатой плоскости под действием постоянной силы $\overline{F}$,

направленной под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту. Величина силы $F = 50(H)$. Определить M скорость тела в момент времени $t_1 = 4c$, если коэффициент трения $f = 0{,}2$.

Решение. Так как тело совершает поступательное движение, его можно принять за точку. Силы показаны на рис. к задаче. Воспользуемся аналитической формой записи теоремы об изменении количества движения точки.

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \sum_{k=1}^{n} S_{kx} = S_x, \qquad (1)$$

где $v_{0x} = 0$ (движение начинается из состояния покоя).

$$S_x = \sum_{k=1}^{n} S_{kx} = \int_0^{t_1} (F \cdot \cos\alpha - F_{\text{тр}})dt = \int_0^{t_1} (F \cdot \cos\alpha - fN)dt. \qquad (2)$$

Для определения величины нормальной реакции N составим дифференциальное уравнение движения в проекциях на ось Oy: $md^2y/dt^2 = N + F\sin\alpha - P$. Так как $y = 0$, то $N + F\sin\alpha - P = 0$. Тогда $N = P - F\sin\alpha = mg - F\sin\alpha$. Подставим N в (2) и вычислим интеграл. Тогда уравнение (1) при $v_{0x} = 0$ принимает вид:

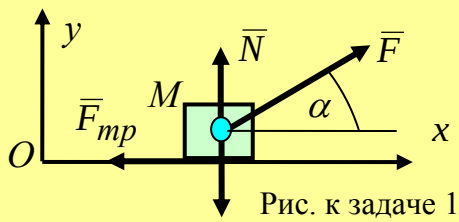


Рис. к задаче 1.21

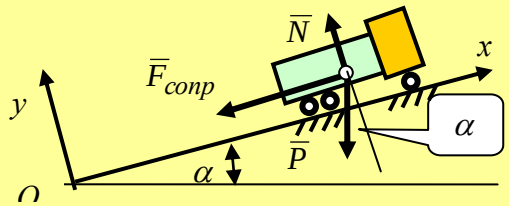


Рис. к задаче 1.22

$v_{1x} = \dfrac{t_1}{m}(F\cos\alpha - fmg + fF\sin\alpha) = 11{,}472(м/с)$. **Ответ.** $v_{1x} = v_1 = 11{,}472 м/с$.

Задача 1.22. Автомобиль движется по инерции на подъем с углом наклона $\alpha = 30^0$. На автомобиль действует сила сопротивления $\overline{F}_{сопр}$ величиной $0{,}1mg$. У основания подъема величина скорости автомобиля была $v_0 = 70 км/час$, а вектор скорости и вектор силы сопротивления параллельны склону. Определить (в сек.) время подъема автомобиля до наивысшей точки, если масса автомобиля $m = 10 тонн$.

Решение. Автомобиль движется поступательно и может быть принят за точку. На автомобиль действуют: сила тяжести автомобиля $\overline{P} = m\overline{g}$, равнодействующая нормальной реакции наклонной плоскости $\overline{N}$, сила сопротивления $\overline{F}_{сопр}$. Если обозначить $v_0 = v_{0x}, v_1 = v_{1x}$, то уравнение теоремы в проекциях на ось Ox принимает вид:

$$mv_1 - mv_0 = -\int_0^{t_1} (mg\sin\alpha + 0{,}1mg)dt.$$

Так как в наивысшей точке подъема $v_1 = 0$, получим $-v_0 = -(g\sin\alpha + 0{,}1g)\cdot t_1$. Отсюда $t_1 = v_0/(g\sin\alpha + 0{,}1g) = 3{,}3(c)$. **Ответ.** $t_1 = 3{,}3c$.

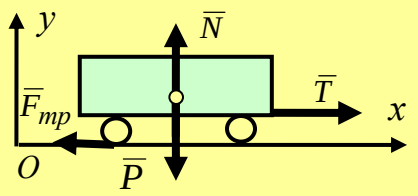


Рис. к задаче 1.23

Задача 1.23 (28.5[8]). Для определения массы m груженого железнодорожного состава между тепловозами и вагонами установили динамометр. Среднее показание динамометра за две минуты оказалось $10^6 H$. За то же время состав набрал скорость $16 м/с$ (вначале состав стоял на месте). Найти массу состава, если коэффициент трения $f = 0{,}02$.

Решение. Состав движется поступательно и прямолинейно, поэтому может быть принят за точку. Силы, действующие на состав, показаны на рисунке. $\overline{P}, \overline{N}, \overline{F}_{mp}$ – суммарная сила тяжести вагонов, равнодействующие нормальных реакций опор и сил трения вагонов, соответственно. $F_{mp} = fN$. Величина силы $\overline{N}$ определяется из дифференциального уравнения движения точки $m \cdot d^2 y / dt^2 = N - P$. Так как $y = 0$, то $N - P = 0$. Отсюда $N = P = mg$. $\overline{T}$ – осредненная сила тяги. Ее осредненное значение получено после обработки показаний динамометра, приравнивая импульс осредненной силы импульсу истинной силы $\overline{Q}(t)$ из уравнения $T \cdot t_1 = \int_0^{t_1} Q(t)dt$, где время испытания $t_1 = 120c = 2мин$. Так так $\overline{v}_0 = 0$, то теорема об изменении количества движения точки в этой задаче принимает вид (все силы постоянны, величины трех из них зависят от массы точки):

$$m\overline{v}_1 = \int_0^{t_1} [\overline{P} + \overline{N} + \overline{T} + \overline{F}_{mp}]dt. \qquad (1)$$

Спроецируем (1) на ось Ox, учитывая, что проекции сил $\overline{P}$ и $\overline{N}$ на эту ось равны нулю. $mv_{1x} = \int_0^{t_1} [T_x + F_{mp,x}]dt$ или $mv = [T - fmg] \cdot t_1$. Тогда $m = T \cdot t_1 / (\cdot v + fgt_1) = 3036 тонн$. При вычислениях принималось: $T = T_x$, $v = v_{1x}$, $g = 9{,}8 м/с^2$. **Ответ.** $m = 3036$ тонн.

§ 1.6. Задачи на применение теорем об изменении моментов количества движения точки

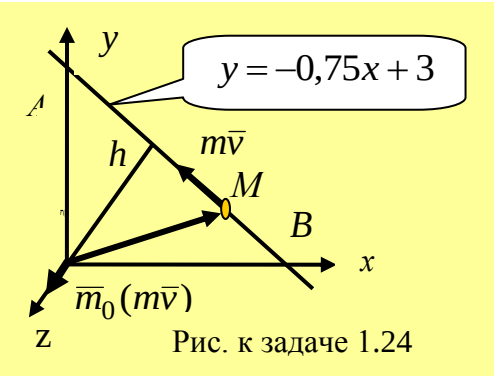


Рис. к задаче 1.24

Задача 1.24. Движение точки M массой $m = 2кг$ задано координатным способом: $x = -4t + 4$, $y = 3t$, $z = 0$ (x, y, z – в *метрах*, t – *в секундах*). Определить в момент времени $t_1 = 0{,}25c$ положение точки и модуль момента количества движения точки $m_0(m\overline{v})$ относительно начала координат.

Решение. Судя по уравнениям движения, точка движется в плоскости Oxy. В момент времени $t_1 = 0{,}25c$ точка M имеет

координаты $x = -4 \cdot 0{,}25 + 4 = 3(м)$, $y = 3 \cdot 0{,}25 = 0{,}75(м)$. Проекции вектора скорости $v_x = \dot{x} = -4(м/с)$, $v_y = \dot{y} = 3(м/с)$. Величина скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 5(м/с)$.

Чтобы определить траекторию движения точки, выразим время t из второго уравнения движения ($t = y/3$) и подставим в первое, которое в итоге примет вид: $y = -0{,}75x + 3$. Траектория точки – прямая AB, показанная на рисунке к задаче. Тогда плечо вектора $m\bar{v}$ относительно центра O совпадает с высотой h треугольника OAB. По уравнению траектории находим: $OA = 3м$, $OB = 4м$, $AB = 5м$, $h = OA \cdot OB / \sqrt{OA^2 + OB^2} = 2{,}4(м)$. Тогда модуль момента $m_0(m\bar{v}) = mv \cdot h = 24(H \cdot с \cdot м)$, а вектор $\bar{m}_0(m\bar{v})$ направлен по оси Oz. Отметим, что в данной задаче плоскость, в которой движется точка, постоянна и известна. Поэтому о движении точки можно было судить и по алгебраическому моменту количества движения.

Ответ. $x = 3(м)$, $y = 0{,}75(м)$, $m_0(m\bar{v}) = 24H \cdot с \cdot м$.

Задача 1.25 (28.8 [8]). Точка M движется вокруг неподвижного центра под действием силы притяжения к этому центру. Найти величину скорости v_2 в наиболее удаленной от центра точке траектории, если величина скорости точки в наиболее близком к нему положении $v_1 = 30см/с$, а r_2 в пять раз больше чем r_1.

Решение. Траектория движения точки расположена в плоскости рисунка, ось Oz направлена на наблюдателя. Воспользуемся теоремой об изменении момента количества движения (3.15). $d[\bar{m}_0(m\bar{v})]/dt = \bar{m}_0(\bar{F})$. Линия действия силы $\bar{F}$ проходит через центр O, поэтому момент силы $\bar{m}_0(\bar{F}) = 0$. Следовательно, и $d[\bar{m}_0(m\bar{v})]/dt = 0$. Отсюда следует, что вектор $\bar{m}_0(m\bar{v})$ – вектор постоянный, приложенный в центре O и направленный по оси Oz в отрицательную сторону. Тогда и $m_z(m\bar{v}) = const$. Другими словами, момент количества движения относительно оси не зависит от положения точки на траектории. $m_z(m\bar{v}_1) = -r_1 m v_1$, $m_z(m\bar{v}_2) = -r_2 m v_2$. Приравняв эти моменты, получаем: $v_2 = r_1 v_1 / r_2 = r_1 v_1 / 5r_1 = 6(см/с)$. **Ответ.** $v_2 = 6см/с$.

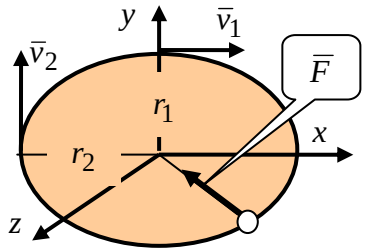


Рис. к задаче 1.25

Задача 1.26 (28.4 [8]). Гирька M привязана к концу нерастяжимой нити MOA, часть которой OA пропущена через вертикальную трубку; гирька движется вокруг оси трубки по окружности радиуса $MC = R$, делая $n_0 = 120об/мин$. Медленно втягивая нить OA в трубку, укорачивают наружную часть нити до длины OM_1, при которой гирька описывает окружность радиусом $R/2$. Сколько оборотов в минуту делает гирька по этой окружности?

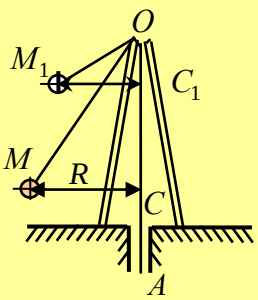


Рис. 1 к задаче 1.26

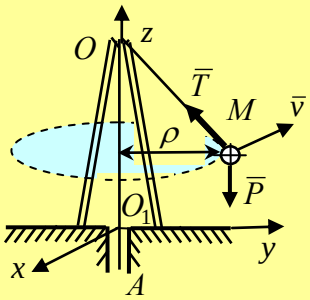


Рис.2 к задаче 1.26

Решение. В этой задаче воспользуемся теоремой об изменении моментов количества движения относительно оси. Искомое число оборотов обозначим n_1. Силы,

действующие на гирьку, которую примем за материальную точку, показаны на рис.2 к задаче. Здесь $\overline{T}$ – реакция нерастяжимой нити, направленная «к точке подвеса», $\overline{P}$ – сила тяжести точки. Система сил $\{\overline{T}, \overline{P}\}$ – система сходящихся сил, имеет равнодействующую. По теореме Вариньона момент равнодействующей $m_z(\overline{F})$ равен алгебраической сумме моментов составляющих. Но $m_z(\overline{T}) = m_z(\overline{P}) = 0$, так как линия действия первой из них пересекает ось, а вторая параллельна оси. Следовательно, момент $m_z(\overline{F}) = 0$ и $m_z(m\overline{v}) = const$ (следствие 2). Так как нить втягивается медленно, вертикальной составляющей вектора скорости точки можно пренебречь. Тогда полный вектор скорости точки $\overline{v}$ лежит в плоскости, перпендикулярной к оси Oz, и направлен по касательной к окружности перпендикулярно к текущему радиусу ρ. Вычислим моменты $m_z(m\overline{v})$ в два момента времени, когда $\rho = \rho_0 = R$ и $\rho = \rho_1 = R/2$. Имеем: $m_z(m\overline{v}_0) = mv_0 \cdot R$, $m_z(m\overline{v}_1) = mv_1 \cdot R/2$, где $v_0 = \omega_0 \cdot R = (\pi n_0/30)R$ и $v_1 = \omega_1 \cdot R/2 = (\pi n_1/30)R/2$ вычислены по теории вращения твердого тела (радиуса ρ) относительно неподвижной оси Oz. Так как $m_z(m\overline{v}) = const$, моменты $m_z(m\overline{v}_0)$ и $m_z(m\overline{v}_1)$ можно приравнять. Это приводит к уравнению: $mv_0 \cdot R = mv_1 \cdot R/2$ или $mR \cdot \frac{\pi n_0}{30} \cdot R = m\frac{R}{2} \cdot \frac{\pi n_1}{30} \cdot \frac{R}{2}$. Отсюда $n_1 = 4n_0 = 480(об/мин)$. **Ответ**. $n_1 = 480 об/мин$.

§ 1.7. Задачи на вычисление работы, мощности и применение теоремы об изменении кинетической энергии точки

Задача 1.27. Пружина длиной $2\lambda = 0{,}3м$ вставлена в трубку с идеально гладкой внутренней поверхностью и сжата шариком на половину своей длины. Жесткость пружины $c = 205 Н/м$. Определить скорость шарика массы $m = 100гр$ в момент вылета из трубки.

Решение. Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии точки и вычислим работы сил, действующих на шарик, на его горизонтальном конечном перемещении величиной λ. На шарик действуют три силы – упругая сила, сила тяжести и реакция гладкой поверхности. Две последние силы перпендикулярны к направлению перемещения (к вектору скорости) шарика, поэтому их работа равна нулю. Работа упругой силы вычисляется по формуле: $A_{упр} = c\lambda^2/2 = 205 \cdot 0{,}15^2/2 = 2{,}31 Дж$. Скорость шарика в начальный момент времени $v_0 = 0$, так как движение начинается из состояния покоя. Теорема принимает вид: $mv_1^2/2 = 2{,}31$. Отсюда искомая скорость $v_1 = \sqrt{2 \cdot 2{,}31/m} = 6{,}8(м/с)$. **Ответ.** $v_1 = 6{,}8 м/с$.

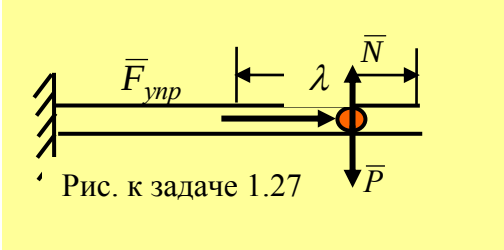


Рис. к задаче 1.27

Задача 1.28. На наковальню, закрепленную на конце невесомой цилиндрической пружины с прямолинейной осью, с высоты h падает груз массой m. Коэффициент жесткости пружины – C. Определить максимальную усадку пружины $\lambda_{дин}$, если после соприкосновения груз и наковальня движутся вместе вплоть до максимального сжатия пружины. Массой наковальни пренебречь.

Решение. Будем считать, что коэффициент жесткости пружины – C не зависит

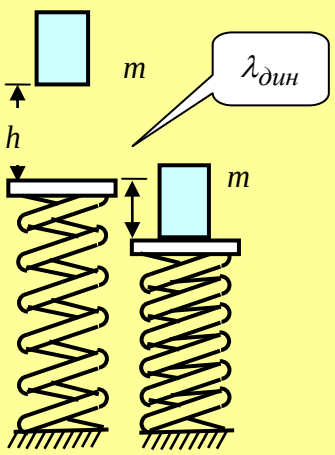


Рис. к задаче 1.28

от способа приложения нагрузки (статически или динамически). Тогда можно записать: $P = mg = C \cdot \lambda_{ст}$, $P_{дин} = C \cdot \lambda_{дин}$. Так как падающий груз движется поступательно вплоть до сжатия пружины на $\lambda_{дин}$, его можно принять за точку и воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии точки.

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} A_k \ . \qquad (1)$$

Пусть тело сбрасывается на пружину без начальной скорости, тогда v_1=0. v_2 – скорость груза в момент максимального сжатия пружины, следовательно, и $v_2 = 0$. Работу совершает сила тяжести падающего груза на перемещении $h + \lambda_{дин}$ и реакция пружины (упругая сила): $A_P = mg(h + \lambda_{дин})$, $A_{упр} = -C \cdot \lambda_{дин}^2 / 2$. Уравнение (1) принимает вид: $\sum_{k=1}^{n} A_k = mg(h + \lambda_{дин}) - C \cdot \lambda_{дин}^2 / 2 = 0$. Подставляя сюда $C = mg / \lambda_{ст}$, после некоторых преобразований получим уравнение: $\lambda_{дин}^2 - 2\lambda_{ст}\lambda_{дин} - 2h\lambda_{ст} = 0$. Отсюда

$$\lambda_{дин} = \lambda_{ст}(1 + \sqrt{1 + 2h / \lambda_{ст}}) . \qquad (2)$$

Второй корень квадратного уравнения отбрасывается, как противоречащий физике явления. Из (2) видно, что укорочение пружины при динамическом приложении силы больше, чем при статическом ее приложении, и зависит как от высоты падения груза, так и от $\lambda_{ст}$. В частности, если $h = 0$ (груз подносится к наковальне и резко отпускается), динамическая осадка пружины будет в два раза больше статической.

Замечание. К этим же результатам можно было бы придти, разбивая движение на два этапа: движение падающего груза до касания с наковальней и сжатие пружины после удара груза по наковальне. На первом этапе «работает» только сила тяжести. Работа равна $A_P^{(I)} = +Ph$. Упругой силы пока нет. На втором этапе «работают» обе силы: $A_P^{(II)} = +P\lambda_{дин}$ и $A_{упр}^{(II)} = -C\lambda_{дин}^2 / 2$. Уравнение (1) замещается уравнениями:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_P^{(I)} = +Ph, \qquad \frac{mv_3^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = A_P^{(II)} + A_{упр}^{(II)} = P\lambda_{дин} - C\lambda_{дин}^2 / 2 .$$

Здесь $v_1 = 0$ – начальная скорость груза в момент начала падения. $v_2 \neq 0$ – величина скорости груза в начальный момент удара по наковальне. $v_3 = 0$ скорость груза и наковальни в момент максимальной осадки пружины ($\lambda = \lambda_{дин}$). Подставляя найденное из первого уравнения значение кинетической энергии $mv_2^2 / 2 = +Ph$ во второе уравнение и заменяя коэффициент жесткости по формуле: $C = mg / \lambda_{ст} = P / \lambda_{ст}$, получим предыдущий результат в виде уравнения (2):

$$Ph = P\lambda_{дин} - C\lambda_{дин}^2 / 2, \quad P\lambda_{дин}^2 / 2\lambda_{ст} - P\lambda_{дин} + Ph = 0, \quad \lambda_{дин}^2 - 2\lambda_{ст}\lambda_{дин} - 2h\lambda_{ст} = 0 .$$

Рис.1 к задаче 1.29

Задача 1.29. Поезд массой $m = 1100$ тонн после преодоления подъема имеет скорость $v_0 = 10 м/с$ и начинает двигаться равноускоренно по горизонтальному участку пути. После преодоления расстояния $s_1 = 110 м$ скорость тепловоза (поезда) стала $v_1 = 12 м/с$. Определить мощность, которую в этот момент развивает тепловоз, если на данном участке пути на поезд действовала постоянная сила сопротивления $\overline{F}_{сопр}$, равная $0{,}01$ от веса поезда.

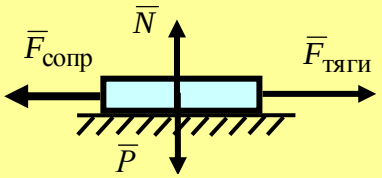


Рис. 2 к задаче 1.29

Решение. Так как тепловоз и вагоны движутся поступательно, то весь состав можно принять за точку. Мощность тепловоза (силы тяги, приложенной к сцепке тепловоза) вычислим согласно формуле: $W = F_{тяги} \cdot v_1$. Здесь $F_{тяги}$ – величина силы тяги тепловоза, приложенной к сцепке первого вагона. Равнодействующие сил, действующих на отдельные вагоны, показаны на рис. 2 к задаче. Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии точки. Так как на перемещении s_1 отличную от нуля работу совершают только силы $\overline{F}_{тяги}$ и сопротивления $\overline{F}_{сопр}$ ($F_{сопр} = 0{,}01mg$), то теорема принимает вид: $mv_1^2/2 - mv_0^2/2 = F_{тяги} \cdot s_1 - 0{,}01mg \cdot s_1$. Отсюда $F_{тяги} = m(v_1^2 - v_0^2)/2s_1 + 0{,}01mg$. Подставляя исходные значения величин, получаем:

$$F_{тяги} = 1100000 \cdot (144 - 100)/(2 \cdot 110) + 0{,}01 \cdot 1100000 \cdot 9{,}81 = 327910(Н) = 327{,}91(кН).$$

Тогда $W = F_{тяги} \cdot v_1 = 327910 \cdot 12 = 3934{,}92(кВт)$.

Ответ. Мощность тепловоза равна $3934{,}92(кВт)$.

Задача 1.30. (9.44. [9]). Автомобиль, двигающийся со скоростью $60 км/час$ по горизонтальному участку пути, при экстренном торможении проходит тормозной путь длиной $l_1 = 30 м$. Как изменится длина тормозного пути, если автомобиль будет двигаться со скоростью $90 км/час$? При решении задачи считать, что со стороны дороги на автомобиль с заторможенными колесами действует постоянная сила трения скольжения, кузов движется поступательно и прямолинейно. Сопротивлением воздуха пренебречь.

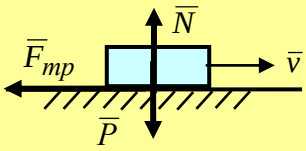


Рис. к задаче 1.30

Решение. Автомобиль с действующими на него силами показан на рис к задаче: $\overline{P} = m\overline{g}$ – сила тяжести, $\overline{N}$ – нормальная реакция шероховатой поверхности, $\overline{F}_{тр}$ – сила трения скольжения.

Вектор скорости на рисунке введен для указания на направление движения тела. Так как тело движется поступательно, оно может быть принято за точку. Тормозной путь – отрезок пути, пройденный транспортным средством от момента начала торможения до полной остановки. В первом случае величина начальной скорости, при которой начинается торможение, $v_1 = 60 км/час$, величина скорости при полной остановке $v_2 = 0$. Тормозной путь по условию задачи $l_1 = 30 м$. Так как проекции векторов $\overline{P}, \overline{N}$ на направление вектора скорости $\overline{v}$ равны нулю, то и работы этих сил равны нулю. Работа постоянной силы трения равна $A_{тр}^{(1)} = -F_{тр} \cdot l_1$. Во втором случае: $u_1 = 90 км/час$, $u_2 = 0$, l_2 - пока неизвестна. $A_{тр}^{(2)} = -F_{тр} \cdot l_2$. Теорема об изменении кинетической энергии в этих двух случаях имеет вид:

$$-mv_1^2/2 = -F_{тр} \cdot l_1, \qquad -mu_1^2/2 = -F_{тр} \cdot l_2.$$

Поделив второе уравнение на первое и подставляя заданные величины скоростей, получаем: $l_2/l_1 = u_1^2/v_1^2 = 90^2/60^2 = 2{,}25$. Тогда $l_2 = 2{,}25 \cdot l_1 = 67{,}5 м$. **Ответ.** Увеличение скорости в полтора раза ведет к увеличению тормозного пути в 2, 25 раза.

Задача 1.31. (9.56. [9]). Груз массой m находится на гладкой плоскости с углом наклона α и связан пружиной жесткости C с неподвижной точкой B. Пружину сжимают из свободного состояния на величину s, после чего груз отпускают без начальной скорости. Определить: 1) скорость груза в тот момент, когда его удаление от точки B будет равно длине свободной пружины l_0. 2) максимальное растяжение пружины будет равно $\lambda_{мах}$.

Решение. Итак, свободная пружина имеет длину l_0. Тело передвинули по наклонной плоскости вверх на расстояние s (сжатие пружины) и отпустили без начальной скорости. Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии и найдем скорость тела v_1 в момент, когда пружина разожмется до первоначальной длины l_0. На изменение скорости тела влияет сила тяжести и упругая сила. Нормальная реакция гладкой поверхности не показана, так как ее работа на перемещениях, параллельных плоскости, равна нулю. Кроме того, надо положить начальную скорость равной нулю ($v_0 = 0$). Теорема примет вид:

$$mv_1^2/2 = \sum_{k=1}^{n} A_k = s \cdot P \cdot \sin\alpha + C \cdot s^2/2. \quad \text{Отсюда} \quad v_1 = \sqrt{(2g \cdot \sin\alpha + C \cdot s/m)s}.$$

Итак, когда пружина примет свою первоначальную длину l_0, тело приобретает скорость v_1 и будет продолжать двигаться вниз. Но теперь пружина будет растягиваться, и упругая сила поменяет свое направление на обратное. Максимального удлинения $\lambda = \lambda_{мах}$ пружина достигает тогда, когда тело остановится ($v_2 = 0$). Работу совершают сила тяжести и упругая сила, тогда $\sum_{k=1}^{n} A_k = \lambda mg \sin\alpha - C\lambda^2/2$.

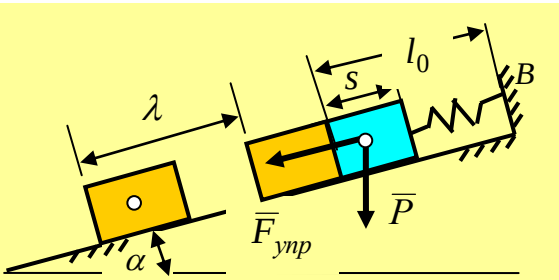


Рис. к задаче 1.31

С учетом сказанного, теорема принимает вид: $-mv_1^2/2 = \lambda mg \sin\alpha - C\lambda^2/2$. Для определения удлинения пружины приходим к квадратному алгебраическому

уравнению $\lambda^2 - 2\lambda mg\sin\alpha / C - v_1^2 m / C$. Подставляя сюда найденное ранее значение скорости v_1 и решая квадратное уравнение, получим два корня:

$$\lambda_{1,2} = mg\sin\alpha / C \pm \sqrt{m^2 g^2 \sin^2\alpha / C^2 + 2smg\sin\alpha / C + s^2} =$$

$= mg\sin\alpha / C \pm \sqrt{(mg\sin\alpha / C + s)^2}$. Отсюда $\lambda_1 = \lambda_{max} = 2mg\sin\alpha / C + s,\ \ \lambda_2 = -s$.

Второй корень не соответствует механическому смыслу задачи, т.к. длины не бывают отрицательными. **Ответ.** $v_1 = \sqrt{(2g \cdot \sin\alpha + C \cdot s / m)s}$, $\lambda_{max} = 2mg\sin\alpha / C + s$.

Рис.1 к задаче 1.32

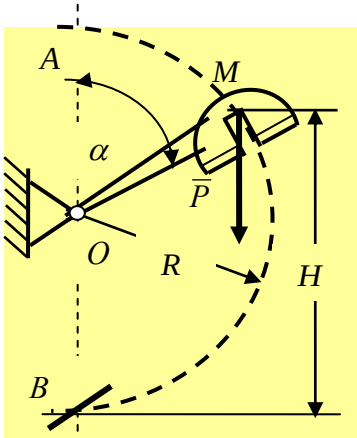


Рис.2 к задаче 1.32

Задача 1.32. Для испытаний материалов на ударную вязкость в лабораториях используются маятниковые копры (см. рис. 1 к задаче). Тяжелый молот M массой m закреплен на конце стержня OM, который вращается в плоскости относительно точки O. Образец, по которому наносится удар, закрепляется в точке B. Принимая молот (ударник) за точку, пренебрегая массой стержня OM и трением в подшипнике O, определить скорость ударника в точке B, если он падает из положения $\alpha = 60^0$, показанного на рисунке без начальной скорости. Центр масс ударника движется по окружности радиуса $R = 1м$.

Решение. Принимая молот за точку, для решения задачи используем теорему об изменении кинетической энергии точки. Обозначим v_0 – величину начальной скорости точки в положении, показанном на рисунке. По условию задачи $v_0 = 0$. Через v_1 обозначим скорость точки в нижнем положении B. С такой скоростью наносится удар по образцу. На молот действует только сила тяжести $\overline{P}$ ($P = mg$), точка приложения которой в процессе движения точки перемещается вниз. Поэтому работа силы тяжести положительна: $A = mg \cdot H$, где H – «перепад высот». По рисунку $H = R + R\cos\alpha = R(1 + \cos\alpha)$. Теорема принимает вид: $mv_1^2 / 2 = mg \cdot R(1 + \cos\alpha)$. Отсюда $v_1 = \sqrt{2gR(1 + \cos\alpha)} = 5{,}42(м/с)$. **Ответ.** $v_1 = 5{,}42\,(м/с)$.

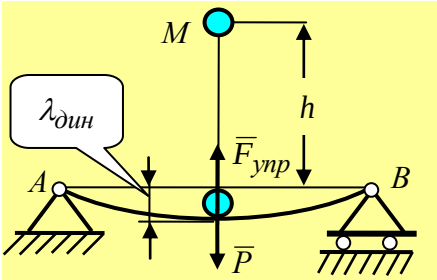


Рис. к задаче 1.33

Задача 1.33. На середину шарнирно опертой балки с высоты h падает груз массы m. Считая балку невесомой, определить прогиб балки в точке падения груза.

Решение. Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии точки. До соприкосновения груза с балкой на точку M действует только сила тяжести $\overline{P} = m\overline{g}$. Теорема в этой фазе движения точки примет вид:

$$mv_1^2/2 - mv_0^2/2 = \sum_{k=1}^{n} A_k \quad . \qquad (1)$$

В этом уравнении надо положить: $v_0 = 0$, так как движение начинается из состояния покоя. Работа силы тяжести $A_P = +Ph = +mgh$. Подставляя эти значения в (1), получим величину скорости в момент столкновения груза с балкой: $v_1^2 = 2gh$. Это формула Галилея для скорости свободного падения: $v_1 = \sqrt{2gh}$.

Теперь рассмотрим движение груза вместе с упругой балкой, которую можно считать листовой пружиной. Эксперименты с балками показывают, что упругие прогибы балки пропорциональны действующим силам. Это свойство листовых балок используется, например, в конструкциях рессор для тяжелой техники. В нашем случае, если груз весом P статически приложить в точке удара, получим соотношение: $P = c\lambda_{стат}$ или $mg = c\lambda_{стат}$, где $\lambda_{стат}$ – максимальный статический прогиб балки в точке приложения силы. Значит, зная P и замерив в эксперименте $\lambda_{стат}$, можно всегда найти коэффициент упругости c листовой балки (пружины). Предполагая в дальнейшем, что коэффициент упругости c не зависит от скорости приложения нагрузки, рассмотрим ударное движение груза вместе с балкой вплоть до его остановки после достижения максимального динамического прогиба $\lambda_{дин}$. Уравнение (3.41) на этом этапе принимает вид: $mv_2^2/2 - mv_1^2/2 = +mg\lambda_{дин} - \frac{c}{2}\lambda_{дин}^2$. Первое слагаемое в правой части – это полная работа силы тяжести на пути, равном динамическому прогибу балки, второе слагаемое – работа силы упругости самой балки. Она берется со знаком минус, так как эта сила направлена вверх, а перемещение происходит вниз. Кроме того, надо положить в этом уравнении $v_2 = 0$, так как при максимальном прогибе балки груз останавливается, а скорость удара v_1 уже вычислена по формуле Галилея. После не сложных преобразований, получим:

$-mgh = +mg\lambda_{дин} - \frac{c}{2}\lambda_{дин}^2$ или $\lambda_{дин}^2 - 2mg\lambda_{дин}/c - 2mgh/c = 0$. Подставляя сюда $mg/c = \lambda_{стат}$, приходим к уравнению для определения динамического прогиба балки: $\lambda_{дин}^2 - 2\lambda_{стат}\lambda_{дин} - 2\lambda_{стат}h = 0$. Корень этого уравнения, не противоречащий физике явления, имеет вид:

$$\lambda_{дин} = \lambda_{стат}(1 + \sqrt{1 + 2h/\lambda_{стат}}) = k_{дин} \cdot \lambda_{стат} \, . \qquad (2)$$

Величина $k_{дин} = (1 + \sqrt{1 + 2h/\lambda_{стат}}) > 1$ называется коэффициентом динамичности. Формула (3) показывает, что динамический прогиб $\lambda_{дин}$ балки более чем в два раза больше статического прогиба $\lambda_{стат}$. В частном случае, когда $h = 0$, имеем $k_{дин} = 2$. Такой случай может иметь место, когда кран подает на плиту перекрытия поддон с кирпичом. Поддон коснулся плиты, и в этот момент его резко отпустили (например, из-за отсутствия регулировки тормоза тросов). Плита ощутит удар с высоты $h = 0$.

§ 1.8. Задачи на свободные прямолинейные колебания точки

Задача 1.34. На рис. 1 показана пружинная подвеска. Она состоит из двух параллельных пружин с коэффициентами жесткости $c_1 = 2$ *Н/м,* $c_2 = 4$ *Н/м,* и пружины с коэффициентом жесткости $c_3 = 5$ *Н/м.* Третья пружина введена в подвеску

последовательно относительно первых двух в некоторой точке *M* абсолютно жесткой пластины *AB*, которая остается параллельной самой себе в процессе работы пружинной подвески. К нижнему концу третьей пружины подвешено тело весом *P*. Определить коэффициент жесткости пружинной подвески.

Решение. Мысленно отбросим третью пружину, и рассмотрим упругую систему, состоящую из двух параллельных пружин. ***Условие параллельности пластины AB самой себе в любой момент времени работы подвески позволяет утверждать, что удлинения первых двух пружин одинаковы (см. рис. 2).*** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda^*$, (1)

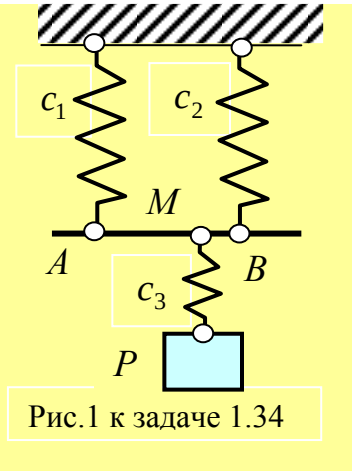


Рис.1 к задаче 1.34

Рассмотрим равновесие пластины *AB* под действием силы тяжести груза $\overline{P}$ и восстанавливающих сил упругости пружин $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$. При этом $F_1 = c_1 \cdot \lambda_1$, $F_2 = c_2 \cdot \lambda_2$. В состоянии равновесия (пружины растянулись и пришли в состояние покоя): $P = F_1 + F_2$, (2)

С другой стороны, система параллельных сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ имеет равнодействующую $\overline{F}^*$, приложенную в центре параллельных сил – в точке *M*. Точка *M* смещена к более жесткой пружине, и ее точное местоположение для этой задачи не актуально. При этом $\overline{F}^* = -\overline{P}$, а $F^* = P$. Тогда равенство (2) приобретает вид: $F^* = F_1 + F_2$. Разделив последнее равенство на λ^*, с учетом системы равенств (1), получим: $F^* / \lambda^* = F_1 / \lambda_1 + F_2 / \lambda_2$ или $c^* = c_1 + c_2$, где c^* называется приведенным коэффициентом жесткости упругой системы из двух параллельных пружин. Величина c^* определяется равенством: $F^* = c^* \cdot \lambda^*$. Последнее означает, что две параллельные пружины, образующие упругий элемент (систему), эквивалентны одной пружине с коэффициентом жесткости c^*, с осью, проходящей через точку *M* параллельно осям первых двух пружин.

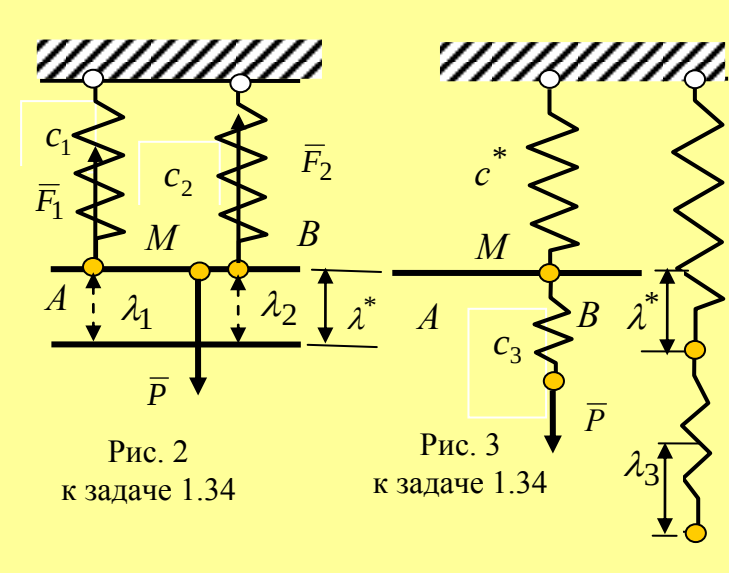


Рис. 2
к задаче 1.34

Рис. 3
к задаче 1.34

Рассматривая теперь подвеску в целом, найдем ее коэффициент жесткости *c*. Подвеску представим теперь в виде двух пружин, соединенных последовательно (рис. 3). ***Суммарное удлинение такого соединения упругих элементов*** λ ***равно полному удлинению всей пружинной подвески, растянутой силой тяжести*** $\overline{P}$**:** $\lambda = \lambda^* + \lambda_3$. (3)

Заметим, что обе пружины растягиваются одной и той же силой, равной силе тяжести

груза $\overline{P}$. Тогда равенство (3) можно переписать в виде: $P/c = P/c^* + P/c_3$. Поделив это равенство на величину P и с учетом равенства $c^* = c_1 + c_2$, будем иметь:

$$1/c = 1/(c_1 + c_2) + 1/c_3 = (c_1 + c_2 + c_3)/[c_3(c_1 + c_2)].$$

или $c = [c_3(c_1 + c_2)]/(c_1 + c_2 + c_3)$. Подставляя исходные данные задачи, получим: $c = 6(2+4)/12 = 3 \cdot (H/м)$. **Ответ.** $c = 3H/м$.

Задача 1.35. Груз M весом P опирается на однородную балку постоянного сечения длиной l. Пренебрегая массой балки, определить коэффициент жесткости балки и частоту свободных вертикальных колебаний груза.

Замечание. Из курса сопротивления материалов известно, что статический прогиб балки равен: $\Delta_{cm} = Pl_1^2(l - l_1)^2 / 3lEI$, где l_1 – расстояние от левого конца балки до точки приложения силы тяжести груза $\overline{P}$. В знаменателе стоит изгибная жесткость балки EI, она является величиной постоянной.

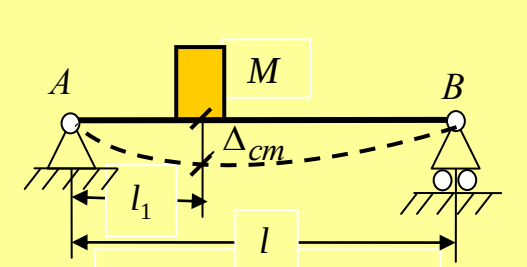


Рис. к задаче 1.35

Решение. Рассматривая балку как упругую пластинчатую пружину, можно найти коэффициент жесткости этой пружины (читай: балки). Пусть сечение балки имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, одна из которых перпендикулярна плоскости рисунка. Предполагается, что вертикальные нагрузки вызывают только вертикальные перемещения. Тогда по определению для упругой восстанавливающей силы имеет место равенство: $P = c \cdot \Delta_{cm}$. Отсюда: $c = P/\Delta_{cm} = 3lEI/l_1^2(l - l_1)^2$. Учитывая, что в этой задаче $\lambda_{cm} = \Delta_{cm}$, получим частоту свободных вертикальных колебаний груза $\nu\,(c^{-1})$. **Ответ.** $\nu = 1/T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g/\Delta_{cm}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{3glEI/Pl_1^2(l - l_1)^2}\ (c^{-1})$.

Задача 1.36. (32.2 [8]). При равномерном спуске груза массой $M = 2\,m$ со скоростью $v = 5$м/с произошла неожиданная задержка верхнего конца троса, на котором опускался груз, из – за защемления троса в обойме блока. Пренебрегая массой троса, определить его наибольшее натяжение при последующих колебаниях, если коэффициент жесткости троса $c = 4 \cdot 10^6$ Н/м.

Рис. 1 к задаче 1.36

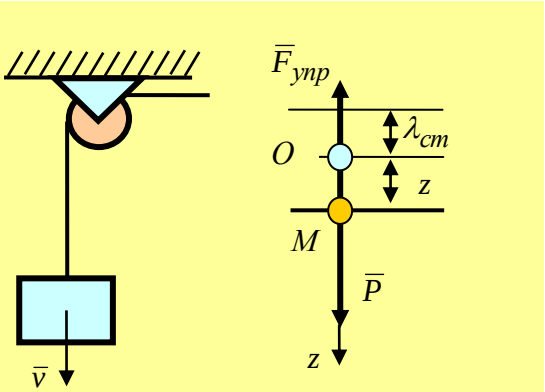


Рис.2 к задаче 1.36

Решение. Груз движется поступательно и может быть принят за точку. С траекторией точки совместим ось координат Oz, направив ее вниз, а за начало координат примем точку пространства, в которой оказалась материальная точка в

момент защемления троса. Эта точка является и точкой статического равновесия груза, так как до защемления троса груз опускался с постоянной скоростью, и в каждый момент этого движения выполняются условия равновесия сил, действующих на груз. Величину статического удлинения троса λ_{cm} определяем из условия равновесия точки $mg - c\lambda\text{ст} = 0$. Откуда $c\lambda_{cm} = mg$. Точка M с действующими на нее силами $\overline{P}$ и $\overline{F}_{упр}$ показана на рис. 2. $P = mg$, $F_{\text{упр}} = c\cdot(\lambda_{cm} + z)$. Основное уравнение динамики точки в проекциях на ось Oz с учетом равенства $c\lambda_{cm} = mg$ приводит к следующему уравнению: $m\ddot{z} = mg - c\cdot(\lambda_{\text{ст}} + z)$, или $\ddot{z} = -cz$, и, наконец, получаем $\ddot{z} + k^2 z = 0$, где $k^2 = c/m$. Общее решение полученного уравнения известно: $z = A\sin(kt + \varphi)$, амплитуда $A = \sqrt{z_0^2 + v_0^2/k^2}$, начальная фаза колебаний $\varphi = arctg(z_0 k / v_0)$. Учитывая, что $k^2 = c/m = 4\cdot 10^6 кг\cdot м/(2000 кг\cdot м\cdot c^2) = 2000\ (c^{-2})$ и начальные условия задачи ($t = 0,\ z_0 = 0, v_0 = v = 5 м/с$), получим:

$$z(t) = (5/\sqrt{2000})\sin(\sqrt{2000}t)\ (м). \qquad (1)$$

Как видим, колебания происходят с амплитудой $A = 5/\sqrt{2000} = 0{,}112(\text{м})$. При максимальном натяжении троса упругая сила достигает максимального значения:

$$F_{\text{упр}}^{\max} = c\lambda_{cm} + c\cdot A = mg + c\cdot A = 2000\cdot 9{,}81 + 4\cdot 10^6\cdot 0{,}112 = (19{,}62 + 448)\cdot 10^3 = 467{,}62 кН$$

Ответ. 467,62*кН*.

Задача 1.37. Определить период свободных колебаний фундамента массы $m_1 = 2500 кг$, на котором установлен двигатель массы $m_2 = 500 кг$, в окрестности статического равновесия, если площадь основания фундамента $S = 1 кв.м.$, удельная жесткость основания $\xi = 5{,}88\cdot 10^5 (Н/м^3)$, приведенный коэффициент жесткости упругого основания «c» вычисляется по формуле $c = \xi\cdot S$.

Решение. Колебания фундамента с двигателем происходят оттого, что движущиеся неуравновешенные части двигателя (поршень, шатун) совершают движение попеременно вверх и вниз и раскачивают всю механическую систему двигатель-фундамент-основание. Вертикальные движения фундамента будем рассматривать как поступательные. Поэтому колебания фундамента с двигателем можно рассматривать как колебания точки. Для описания механических свойств основания примем самую простую модель – модель Винклера. По этой модели грунт, в котором заложен фундамент, можно с известным приближением считать упругим телом, а его реакцию можно условно заменить реакцией пружины (точнее говоря, системой параллельных пружин) с приведенной жесткостью «*c*». При параллельном включении в систему равномерно распределенных пружин с прямолинейными осями их жесткости складываются, что показано на рис. 1, для двух параллельных пружин. Таким образом, приходим к задаче колебания материальной точки M на пружине с приведенной жесткостью «с» (рис. 2).

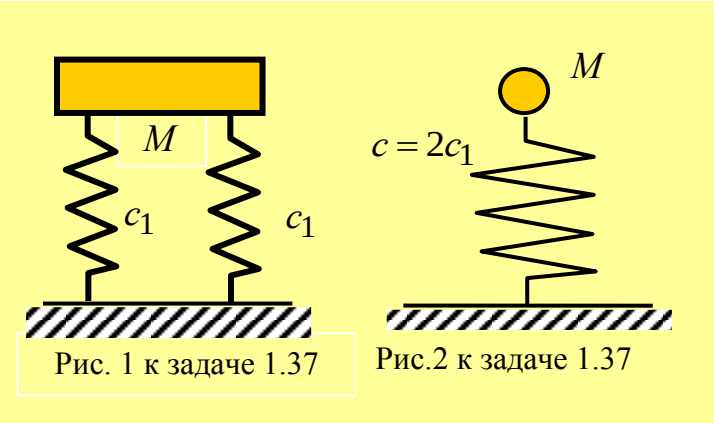


Рис. 1 к задаче 1.37 Рис.2 к задаче 1.37

По условию задачи требуется определить период свободных колебаний точки. Эти колебания происходят при выключенном двигателе, точнее, двигатель был включен и затем его выключили. В этот период точка находится под действием силы тяжести и упругой (восстанавливающей) силы. Уравнение свободных колебаний имеет вид: $\ddot{x}+k^2x=0$, где в нашем случае $k^2=c/m=\xi\cdot S/(m_1+m_2)$, где $m=m_1+m_2$ – приведенная масса точки, $c=\xi\cdot S$ – приведенный коэффициент жесткости упругого основания. Период колебаний вычисляется по формуле: $T=2\pi/k$. Тогда получим:

$$T=2\pi/k=\ 2\pi\sqrt{m/\xi S}=(6{,}28/100)\sqrt{3000/58{,}8\cdot 1}=0{,}45(сек).$$

Период колебаний T (*в секундах*) численно можно выразить и в долях от статической осадки основания λ_{cm} (*в сантиметрах*), g (*сантиметр / сек*^{2}) по формуле: $T=2\pi\cdot\sqrt{\lambda_{cm}/g}=6{,}28\cdot\sqrt{\lambda_{cm}}/31{,}321=0{,}2\sqrt{\lambda_{cm}}$ (*сек*). Итак,

$$T=0{,}2\cdot\sqrt{\lambda_{cm}}\ (сек).$$

Последнее равенство удобно в «прикидочных» расчетах. Статическая осадка фундамента λ_{cm} находится, как всегда, из условия равновесия сил тяжести фундамента, оборудования и реакции основания. В нашем случае $mg=c\cdot\lambda_{cm}$. Или $(m_1+m_2)\cdot g=\xi\cdot S\cdot\lambda_{cm}$. Отсюда $\lambda_{cm}=(m_1+m_2)\cdot g/\xi\cdot S$. **Ответ.** $T=0{,}2\cdot\sqrt{\lambda_{cm}}$ (*сек*).

§ 1.9. Задачи на прямолинейные свободные затухающие колебания материальной точки

Задача 1.38. (13.5.12[10]). Дифференциальное уравнение движения материальной точки имеет вид: $3\ddot{x}+\beta\dot{x}+48x=0$. Найти наименьшее значение коэффициента сопротивления среды β, при котором движение точки будет апериодическим.

Решение. Точка совершает свободные затухающие колебания. Приведем исходное уравнение к уравнению свободных затухающих прямолинейных колебаний вида: $\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=0$. Сравнивая коэффициенты уравнений, имеем: $2n=\dfrac{\beta}{3}$, $n=\dfrac{\beta}{6}$, $k^2=16$, $k=4$. Движение материальной точки будет апериодическим, если $n\geq k$. В нашем случае должно быть: $\beta/6\geq 4$. Отсюда $\beta\geq 24$. **Ответ.** $\beta\geq 24$.

Задача 1.39. (13.5.17[10]). Груз массой $m=2кг$ подвешен к пружине с коэффициентом жесткости $c=30H/м$ и находится в колебательном движении. Определить круговую частоту затухающих колебаний, если сила сопротивления движению груза $\overline{R}=-4\overline{v}$.

Решение. Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний материальной точки имеет вид: $\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=0$. Условно периодическими являются затухающие колебания при $n<k$. Коэффициент затухания n определяется по формуле: $2n=\beta/m$. Так как $\overline{R}=-4\overline{v}$, коэффициент сопротивления среды $\beta=4$, $n=\beta/2m=1$. По данным задачи получим: $k^2=c/m=30/2=15(c^{-2})$. Видим, что условие $n<k$ в данной задаче выполняется. Круговую частоту затухающих колебаний вычислим по формуле:

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{15-1} = \sqrt{14} = 3{,}74(1/c).$$ **Ответ.** $k_1 = 3{,}74(1/c)$.

§ 1.10. Задачи на вынужденные колебания точки с учетом сил сопротивления, пропорциональных скорости

Задача 1.39. (13.6.19.[10]). Определить амплитуду вынужденных колебаний материальной точки, если дифференциальное уравнение ее движения имеет вид: $\ddot{x} + 6\dot{x} + 30x = 4\sin 2t$.

Решение. По виду дифференциального уравнения движений видим, что оно описывает вынужденные колебания точки при наличии силы сопротивления, линейно зависящей от скорости, и соответствует уравнению (4.72). Тогда, сравнивая коэффициенты уравнений, имеем: $2n = \beta / m = 6c^{-1}, k^2 = c/m = 30c^{-2}$, $p = 2c^{-1}$ и $G_0 = G/m = 4(м/сек^2)$. Амплитуда вынужденных колебаний вычисляется по формуле:

$$A_{**} = G_0 / \sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} = 4/\sqrt{(30-4)^2 + 36\cdot 4} = 0{,}139686(м).$$

Ответ. Амплитуда вынужденных колебаний материальной точки $A_{**} = 0{,}14(м)$.

Задача 1.41. (13.6.23.[10]). Дифференциальное уравнение колебаний материальной точки массой $m = 12кг$ имеет вид $\ddot{y} + 8\dot{y} + 60y = 15\sin 3t$. Проекция силы сопротивления движению на ось Oy равна $R = -\beta \cdot \dot{y}$. Определить коэффициент сопротивления β.

Решение. По виду дифференциального уравнения движения точки видим, что оно описывает вынужденные колебания точки при наличии силы сопротивления, зависящей от скорости. Оно записывается в общем виде так: $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0$. Тогда по условию задачи имеем: $2n = \beta / m = 8(c^{-1})$. Отсюда $\beta = 2nm = 96$ (кг/с). **Ответ.** $\beta = 96$ (кг/с).

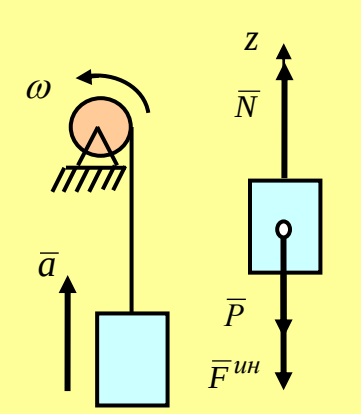


Рис. к задаче 1.42

§ 1.11. Задачи на применение принципа Даламбера для точки

Задача 1.42. Груз весом P поднимается подъемным краном. Движение груза можно считать поступательным. Первые две секунды груз движется с постоянным ускорением $\bar{a}$, затем его движение становится равномерным. Определить реакцию траса.

Решение. Для решения задачи воспользуемся принципом Даламбера. При ускоренном движении на груз действуют постоянная активная сила тяжести $\bar{P} = m\bar{g}$ и реакция связи (троса) $\bar{N}_{дин}$. Сила инерции груза $\bar{F}^{ин} = -m\bar{a}$. Уравнение принципа Даламбера принимает вид:

$$\bar{P} + \bar{N}_{дин} + \bar{F}^{ин} = 0.$$

Введем систему координат, и ось z направим по направлению перемещения груза. Спроецируем уравнение принципа Даламбера на эту ось:

$$-P + N_{дин} - ma = 0. \qquad (1)$$

Или $N_{дин} = mg + ma$. Вынося за скобку величину $mg = P$, получим динамическую реакцию троса: $$N_{дин} = mg \cdot (1 + a/g). \qquad (2)$$

Такая же по величине, но противоположная по направлению сила $\overline{N}^*_{дин}$ действует на трос (3-й закон Ньютона). Обозначим $k_{дин} = 1 + a/g$ и назовем эту величину коэффициентом динамичности данной задачи. Видим, что $k_{дин} > 1$. Он тем больше, чем больше величина ускорения a, с которым происходит подъем груза.

Другими словами, при подъеме груза с ускорением трос растягивается силой, модуль которой всегда больше веса поднимаемого груза.

Пусть теперь груз поднимается с постоянной скоростью. Тогда полагая в (2) $a = 0$, получим $k_{дин} = 1$ и $N_{дин} = mg = P = N_{ст}$. *Другими словами, при подъеме груза с постоянной скоростью трос растягивается только силой тяжести, как в статической задаче о равновесии груза, подвешенного к тросу.* Сказанное позволяют переписать формулу (2) в виде: $$N_{дин} = k_{дин} \cdot N_{стат}. \qquad (3)$$

Ответ. Трос растягивается силой, равной $N^*_{дин} = mg \cdot (1 + a/g)$.

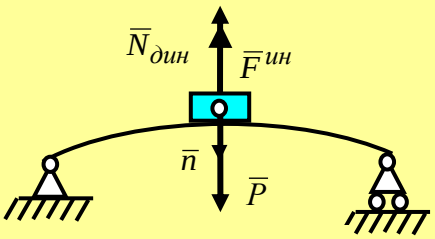


Рис. 1 к задаче 1.43

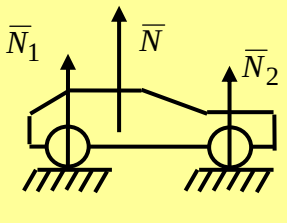


Рис. 2 к задаче 1.43

Задача 1.43. Автомобиль массой $m = 1280 кг$. движется по выпуклой эстакаде с постоянной скоростью $v = 10$м/с (36км/час). Определить силу давления автомобиля на мост в момент прохождения середины моста, если радиус кривизны моста $\rho = 55 м$.

Решение. Для решения задачи воспользуемся принципом Даламбера. Автомобиль в середине моста показан на рис. 1 к задаче. В показанный момент времени автомобиль совершает мгновенно поступательное движение, его можно принять за материальную точку M – центр тяжести автомобиля. На точку действуют сила тяжести автомобиля $\overline{P}$ и направленная вверх реакция моста $\overline{N}$. В случае двухосного автомобиля (рис. 2 к задаче) под силой $\overline{N}$ понимается равнодействующая двух параллельных реактивных сил $\overline{N}_1, \overline{N}_2$. Величина $N = N_1 + N_2$. Уравнение принципа Даламбера принимает вид: $\overline{P} + \overline{N}_{дин} + \overline{F}^{ин} = 0$. Вектор полного ускорения точки $\overline{a}$ геометрически складывается из векторов нормального и касательного ускорений, то есть $\overline{a} = \overline{a}_n + \overline{a}_\tau$. По условию задачи алгебраическое значение скорости v постоянно. Поэтому $a_n = mv^2/\rho \neq 0$, $a_\tau = dv/dt = 0$. Тогда вектор полного ускорения точки $\overline{a} = \overline{a}_n$, а $\overline{F}^{ин} = -m\overline{a}_n$. Итак, сила инерции точки направлена по вектору $\overline{a}_n$, но в противоположном направлении.

Модуль силы инерции равен: $F^{ин} = ma_n = mv^2/\rho$. Тогда предполагая, что силы трения ничтожно малы, приходим к силовой схеме, показанной на рис. 1. Спроецируем уравнение принципа Даламбера на единичный вектор нормали к траектории $\overline{n}$. Получим: $+P - N_{дин} - ma_n = 0$. Отсюда $N_{дин} = mg - mv^2/\rho$. Вынося за скобку вес точки $P = mg$, получим: $$N_{дин} = mg(1 - v^2/g\rho). \qquad (1)$$

Во-первых, как видим, при скорости $v=0$ реакция моста равна весу автомобиля $P=mg$. Это случай «двигатель заглох». Соответствующее значение реакции назовем статическим значением и обозначим: $N_{ст}=mg=P$. Во-вторых, при $v\neq 0$ имеем: $N_{дин}=k_{дин}\cdot N_{ст}$, где $k_{дин}=1-v^2/g\rho$ – безразмерный динамический коэффициент. Механический смысл имеют значения $0\le k_{дин}\le 1$. Случай $k_{дин}=1$ соответствует рассмотренному выше случаю: $v=0$, а случай $k_{дин}=0$ приводит к значению $N_{дин}=0$. В последнем случае происходит потеря сцепления автомобиля с дорогой и, как следствие, потеря управляемости – автомобиль «не слушается руля». Полагая $N_{дин}=0$, из (1) можно найти критическую скорость автомобиля при движении по «горбатому» мосту или эстакаде, при приближении к которой «снизу» надо ожидать ухудшение управляемости автомобилем. Эта скорость равна:

$$v=\sqrt{g\rho}\,. \qquad (2)$$

Подставим числовые значения. $P=mg=1280кг\cdot 9{,}81м/с^2=12556{,}8Н$. При скорости $v=10м/с=36км/час$ коэффициент динамичности $k_{дин}=1-v^2/g\rho=$ $=1-100/(9{,}81\cdot 55)=1-0{,}185=0{,}815$. Реакция моста $N_{дин}=k_{дин}\cdot N_{ст}=0{,}815\cdot 12556{,}8=$ $=10233{,}792Н$. Сила давления автомобиля на мост $\overline{N}^*_{дин}$ равна этой силе по величине, но прямо противоположна по направлению. Наконец, скорость движения, при которой теоретически возможен отрыв автомобиля от моста и потеря управляемости равна: $v=\sqrt{9{,}81\cdot 55}=23{,}282(м/с)=83{,}6км/час$. **Ответ.** Сила давления $\overline{N}^*_{дин}=10{,}234кН$.

Задача 1.44. (17.1.6[10]). Автомобиль массой $m=8\cdot 10^3кг$, двигаясь по мосту, тормозит с замедлением $a=6м/с^2$ (рис.1). Принимая автомобиль за материальную точку, определить модуль горизонтальной силы, действующей на опору моста.

Решение. Движение автомобиля при торможении является поступательным, и он может быть принят за точку. В качестве этой точки примем центр тяжести автомобиля. Пусть автомобиль движется вправо, что показано вектором скорости $\overline{v}$ на рис. 1. При торможении вектор ускорения $\overline{a}$ направлен в обратную сторону. Силы, действующие на автомобиль в рассматриваемый промежуток времени торможения, показаны на рис.2. Здесь $\overline{N}$, $\overline{F}_{тр}$ – равнодействующие нормальных реакций и сил сопротивления движению, $\overline{P}$ – сила тяжести автомобиля, $\overline{F}^{ин}=-m\overline{a}$ – сила инерции автомобиля,

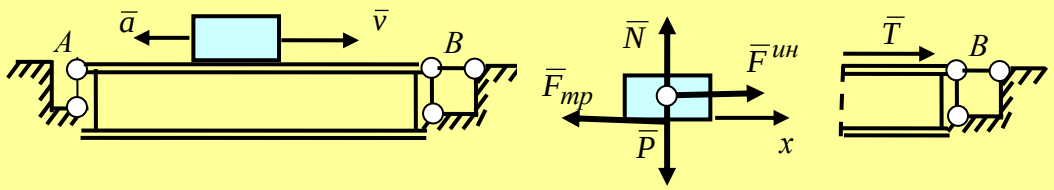


Рис. 1 к задаче 1.44 Рис. 2 к задаче 1.44 Рис. 3 к задаче 1.44

направление которой определяется по направлению вектора ускорения $\overline{a}$. Уравнение принципа Даламбера принимает вид: $\overline{F}_{тр}+\overline{N}+\overline{P}+\overline{F}^{ин}=0$. (1)

Направим ось Ox по вектору скорости точки и спроецируем уравнение (1) на эту ось. Получим: $-F_{тр}+F^{ин}=0$. Отсюда $F_{тр}=F^{ин}=ma=8\cdot10^3\cdot6=48\cdot10^3(H)$. Получили силу, с которой мост в горизонтальном направлении действует на автомобиль. По третьему закону Ньютона, автомобиль действует на мост (см. рис.3) силой $\overline{T}=-\overline{F}_{тр}$. При этом $T=48\cdot10^3(H)=48(кН)$. **Ответ.** $T=48(кН)$.

Рис.1 к задаче 1.45

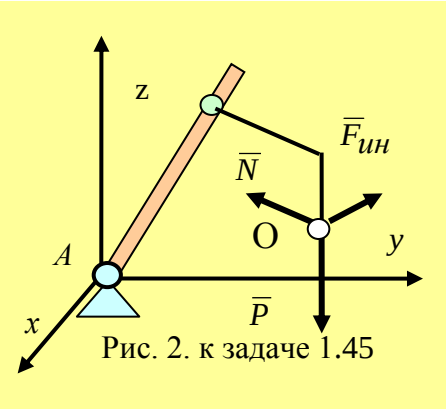


Рис. 2. к задаче 1.45

Задача 1.45. Грейферные погрузчики, один из которых изображен на рис.1 к задаче, используются при разборе завалов, погрузке металлического лома и при других работах. Определить реакцию сферического шарнира O при перемещении груза массой $m=500кг$, если груз движется по закону $x=0{,}2t^2$, $y=0{,}25t^2$, $z=0{,}1t$ $(x, y, z-в\ метрах,\ t-в\ сек)$.

Решение. При решении задачи воспользуемся принципом Даламбера. Так как расстояние между центром тяжести поднимаемого груза и сферическим шпрниром захвата мало, будем в первом приближении считать эти точки совпадающими. Тогда приходим к системе сходящихся в точке O сил. Уравнение принципа Даламбера (6.3) имеет вид: $\overline{F}^a+\overline{N}+\overline{F}^{ин}=0$, где $\overline{N}$ – реакция сферического шарнира, $\overline{F}^a=\overline{P}=m\overline{g}$ – сила тяжести поднимаемого груза. Проецируя это уравнение на оси координат, приходим к уравнениям принципа Даламбера в проекциях:

$$F_x^a+N_x+F_x^{ин}=0,\quad F_y^a+N_y+F_y^{ин}=0,\quad F_z^a+N_z+F_z^{ин}=0, \qquad (1)$$

где $F_x^a=P_x=F_y^a=P_y=0$, $F_z^a=-mg$. Так как проекции на оси сила инерции $\overline{F}^{ин}$ и вектор ускорения $\overline{a}$ имеют противоположные знаки, то $F_x^{ин}=-m\ddot{x}=-0{,}4m$, $F_y^{ин}=-m\ddot{y}=-0{,}5m$, $F_z^{ин}=-m\ddot{z}=0$. Тогда из (1) получим: $N_x=-F_x^{ин}=+0{,}4m$, $N_y=-F_y^{ин}=+0{,}5m$, $N_z=-F_z^a-F_z^{ин}=+mg=9{,}81m$. $N=\sqrt{N_x^2+N_y^2+N_z^2}$ = $m\sqrt{0{,}16+0{,}25+96{,}24}$ = $4915{,}54(H)$. **Ответ.** Величина реакции $N=4{,}912(кН)$.

Задача 1.46. Для повышения точности бомбометания во второй мировой войне широко использовалось так называемое пикирование на цель. В зависимости от типа бомбардировщика это происходило под углом к горизонту от 45 до 80 градусов. С появлением самонаводящихся боеприпасов этот тип пилотирования сохранился при ведении воздушных боев и в демонстрационных полетах пилотажных групп. При выходе из «пике» конструкция самолета и пилот испытывают большие перегрузки.

Определить вертикальную силу $\overline{Q}$, действующую на пилота массы m, при выходе самолета из пикирования по окружности радиуса r с горизонтальной скоростью $\overline{v}$.

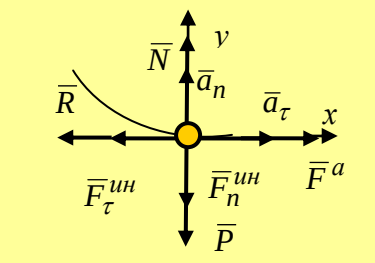


Рис. к задаче 1.46

Решение. В момент, когда самолет достигает нижней точки траектории, пилот вместе с самолетом движутся мгновенно поступательно, поэтому пилот может быть принят за точку. Силы, действующие на точку, показаны на рисунке к задаче. $\overline{P} = m\overline{g}$ – сила тяжести пилота, $\overline{N}$ – реакция опоры, $\overline{F}_n^{ин}$, $\overline{F}_\tau^{ин}$ – нормальная и касательная составляющие силы инерции точки, $\overline{F}^a$ – сила тяги, $\overline{R}$ – равнодействующая сил сопротивления. Уравнение принципа Даламбера принимает вид:

$$(\overline{F}^a + \overline{P} + \overline{R}) + \overline{N} + (\overline{F}_n^{ин} + \overline{F}_\tau^{ин}) = 0. \qquad (1)$$

Введем систему координат, как показано на рисунке, и спроицируем уравнение (1) на вертикальную ось y. Получим: $-P + N - F_n^{ин} = 0$ или $-P + N - ma_n = 0$. Отсюда $N = P(1 + v^2/gr)$, где $a_n = v^2/r$, а на пилота в этот момент действует сила $\overline{Q} = -\overline{N}$.

Следовательно,
$$Q = P(1 + v^2/gr). \qquad (2)$$

Принимая среднюю скорость пикирующих бомбардировщиков времен второй мировой войны $v = 450$*км/час* и радиус траектории $r = 400$м, найдем, для примера, величину $Q = P[1 + 2025 \cdot 10^8/(400 \cdot 9{,}81 \cdot 1296 \cdot 10^4)] = P(1 + 0{,}0398 \cdot 10^2) \approx 5P$. То есть пилот будет испытывать пятикратную перегрузку. **Ответ.** $Q = P(1 + v^2/gr)$.

ГЛАВА 2. ЗАДАЧИ ПО ДИНАМИКЕ СИСТЕМЫ

§ 2.1. Краткие сведения из теоретического материала к гл.2

Механической системой *называется совокупность материальных точек, движения которых взаимозависимы.*

Система называется неизменяемой, *если расстояния между точками механической системы не изменяются. Абсолютно твердые тела в динамике механической системы рассматриваются как неизменяемые механические системы, состоящие из материальных точек, расстояния между которыми не меняется. В противном случае она называется изменяемой механической системой.*

Внутренними силами *называются силы взаимодействия точек механической системы между собой. Обозначаются* $\overline{F}_k^i$ $(k = 1,2,3,...,n)$.

Внешними силами *называются силы взаимодействия точек механической системы с точками или телами, не вошедшими в систему. Обозначаются* $\overline{F}_k^e$.

Массой механической системы M *называется сумма масс* m_k *отдельных точек или тел механической системы*: $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$.

Центром масс механической системы *называется геометрическая точка, координаты которой вычисляются по формулам:*

$$x_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot x_k , \qquad y_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot y_k , \qquad z_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot z_k .$$

Моментом инерции J_z ***механической системы или твердого тела относительно оси*** Oz *называется сумма произведений масс точек механической системы или твердого тела на квадраты соответствующих кратчайших расстояний* h_k *от точек до оси:* $J_z = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot h_k^2$.

Радиусом инерции твердого тела относительно оси Oz *называется величина* i_z, *которая определяется по формулам:* $i_z = \sqrt{J_z / M}$ или $J_z = M \cdot i_z^2$.

Общие теоремы динамики системы

Теорема о движении центра масс. *Центр масс механической системы под действием внешних сил, действующих на отдельные точки механической системы, движется как свободная материальная точка с массой, равной массе всей системы.*

$$M \cdot \overline{a}_C = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e , \quad \text{где} \quad M = \sum_{k=1}^{n} m_k .$$

В проекциях на оси это уравнение принимает вид:

$$M \cdot \ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e , \qquad M \cdot \ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e , \qquad M \cdot \ddot{z}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}^e .$$

Закон сохранения движения центра масс. *1) Если* $\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e = 0$, *то* $\overline{a}_C = 0$ *и* $\overline{v}_C(t) = const$. *Другими словами, центр масс движется прямолинейно и равномерно.*

2) Если $\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e = 0$, *то* $a_{Cx} = 0$ *и* $v_{Cx}(t) = const$. *Другими словами, центр масс движется вдоль оси* Ox *равномерно.*

2а) Пусть условие 2 выполнено. Кроме того в начальный момент времени скорость центра масс вдоль оси Ox *равна нулю, то есть:* $v_{Cx}(0) = 0$. *Тогда:* $x_C(t) = const$. *Другими словами, центр масс вдоль оси* Ox *не перемещается.*

Когда условия 2 и 2а) выполнены, то по перемещениям одной части механической системы можно определить перемещения другой части системы. Для системы из трех точек это уравнение имеет вид: $m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 + m_3 \cdot u_3 = 0$. *Здесь* u_1, u_2, u_3 *- проекции векторов перемещений трех точек на ось* x.

Теорема об изменении количества движения системы

Количеством движения механической системы *называется векторная величина* $\overline{Q}$, *равная геометрической сумме количеств движения всех точек механической системы (1 – е определение):* $\overline{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \overline{v}_k$.

Количеством движения механической системы *называется векторная величина* $\overline{Q}$, *равная произведению массы всей системы* M *на вектор скорости центра масс* $\overline{v}_C$ *(2 – е определение.):* $\overline{Q} = M \cdot \overline{v}_C$.

Теорема *(Дифференциальная формулировка теоремы). Первая производная по времени от количества движения механической системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил* $\overline{F}_k^e$ *:* $d\overline{Q} / dt = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e$.

Теорема (Интегральная формулировка). *Изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов* $\overline{S}_k^e$ *всех действующих на систему внешних сил* $\overline{F}_k^e$ *за тот же промежуток времени, то есть:* $\overline{Q}_2 - \overline{Q}_1 = \sum_{k=1}^{n} \overline{S}_k^e$.

Закон сохранения количества движения*. Если сумма проекций всех внешних сил, например, на ось* Ox, *равна нулю, то проекция вектора количества движения на эту же ось есть величина постоянная, то есть* $Q_x = const$ *(или* $Q_{2x} = Q_{1x}$ *).*

Теорема об изменении момента количества движения системы

Моментом количества движения механической системы относительно оси *Oz называется сумма моментов количества движения отдельных точек системы относительно той же оси* Oz *:* $K_z = \sum_{k=1}^{n} m_z(m_k \overline{v}_k)$.

Момент количества движения однородного тела, *вращающегося относительно неподвижной оси, равен произведению момента инерции тела относительно оси на угловую скорость вращения:* $K_z = \sum_{k=1}^{n} m_z(m_k \overline{v}_k) = J_z \omega$, *где* $J_z = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot h_k^2$.

Формулировка теоремы. *Первая производная по времени от момента количества движения механической системы относительно оси равна сумме моментов всех внешних сил относительно той же оси, то есть:* $\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k^e)$.

Закон сохранения момента количества движения относительно оси*. Если сумма моментов внешних сил относительно некоторой оси равна нулю, то момент количества движения механической системы относительно этой же оси есть величина постоянная (* $K_z = const$ *).*

Теорема об изменении кинетической энергии системы

Кинетической энергией механической системы *называется сумма кинетических энергий точек механической системы:* $T = \sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2 / 2$.

Кинетическая энергия твердого тела зависит от вида движения.

1. При поступательном движении $T_{пост} = \dfrac{M \cdot v_C^2}{2}$.

2. При вращении твердого тела относительно неподвижной оси $T_{вр} = J_z \dfrac{\omega^2}{2}$.

3. При плоскопараллельном движении $T_{пл.пар} = M v_C^2 / 2 + J_{C\mu}\, \omega^2 / 2$.

Теорема 1. *(дифференциальная формулировка для изменяемых механических систем). Первый дифференциал от кинетической энергии* ***изменяемой*** *механической системы при любом ее перемещении равен сумме элементарных работ внешних и внутренних сил, приложенных к точкам механической системы, на перемещениях их точек приложения:* $dT = \sum_{k=1}^{n} dA_k^e + \sum_{k=1}^{n} dA_k^i$.

Теорема 2 *(интегральная формулировка для изменяемых механических систем). Изменение кинетической энергии* ***изменяемой*** *механической системы при любом ее перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, приложенных к точкам механической системы, на перемещениях их точек приложения:* $T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i$.

Теорема 3 *(дифференциальная формулировка для неизменяемых систем). Первый дифференциал от кинетической энергии* ***неизменяемой*** *механической системы или твердого тела равен сумме элементарных работ внешних сил, приложенных к точкам механической системы, на перемещениях их точек приложения:* $dT = \sum_{k=1}^{n} dA_k^e$.

Теорема 4 *(интегральная формулировка теоремы для неизменяемых систем)****.*** *Изменение кинетической энергии* ***неизменяемой*** *механической системы или твердого тела при любом ее перемещении равно сумме работ внешних сил на перемещениях их точек приложения:* $T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e$.

Теорема 5 *(дифференциальная формулировка для систем с идеальными связями). Первый дифференциал от кинетической энергии механической системы с идеальными стационарными связями при любом ее перемещении равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних активных сил, приложенных к точкам механической системы:* $dT = \sum_{k=1}^{n} dA_k^a$.

Теорема 6 *(интегральная формулировка для систем с идеальными связями). Изменение кинетической энергии механической системы с идеальными стационарными связями*

при любом ее перемещении равно сумме работ всех внешних и внутренних активных сил на перемещениях их точек приложения: $T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^a$.

Работа и закон сохранения энергии

Работа сил тяжести *точек механической системы* A_P *равна взятому со знаком плюс или минус произведению веса всей системы* P *на модуль вертикального перемещения центра тяжести системы* h_C. *Берется знак плюс, если центр тяжести системы сместился вниз, и берется знак минус в противном случае:* $A_P = \pm P h_C$.

Элементарная работа силы, *приложенной к телу, вращающемуся относительно оси, равна произведению момента силы относительно оси вращения и элементарного угла поворота тела:* $dA_M = m_z(\overline{F}) \cdot d\varphi$.

Работа постоянного момента силы *равна произведению момента силы относительно оси вращения и угла поворота тела:* $A_M = m_z(\overline{F}) \cdot \varphi$. *Работа положительна, если направления действия момента и поворота тела совпадают.*

Мощность силы, *приложенной к телу, вращающемуся относительно неподвижной оси, равна произведению вращающего момента силы на угловую скорость тела. Знак мощности определяется знаком работы:* $W = m_z(\overline{F}) \cdot \omega$

Отрицательная полная работа момента *сопротивления качению* $A_{кач}$ *в общем случае, если* $(\delta \cdot N) = const$, *вычисляется по формуле:* $A_{кач} = -\frac{\delta}{R} \cdot N \cdot s_O$, *где* s_O – *длина пути, пройденного центром диска* O *при качении,* δ, N *–коэффициент трения качения и величина нормальной реакции, соответственно. .*

Закон сохранения энергии для точки. *При движении материальной точки в потенциальном силовом поле в каждый момент времени сумма кинетической и потенциальной энергий точки есть величина постоянная.* $mv^2/2 + \Pi = const$.

Принцип Даламбера для механической системы

Принцип. *В любой момент времени движения механической системы геометрические суммы равнодействующих внешних и внутренних сил, и сил инерции, приложенных к каждой точке механической системы, равны нулю:* $\overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i + \overline{F}_k^{ин} = 0$.

Главный вектор сил инерции *равен взятому со знаком минус произведению массы всей системы* M *на ускорение центра масс* $\overline{a}_c$: $\overline{R}^{ин} = -M\overline{a}_c$.

Главный момент сил инерции $M_z^{ин}$ ***относительно оси*** *равен взятой со знаком минус первой производной по времени от главного момента количества движения механической системы* K_z *относительно той же оси:* $M_z^{ин} = -\frac{dK_z}{dt}$.

Динамика твердого тела

Дифференциальное уравнение *вращения твердого тела относительно неподвижной оси:* $J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z^e$ *или* $J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^e$, $J_z \varepsilon = M_z^e$.

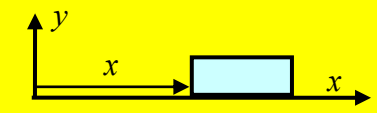
Дифференциальное уравнение *плоскопараллельного движения твердого тела:*

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e}, \qquad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e}, \qquad J_{z_C} \cdot \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} mom_{z_C}(\bar{F}_k^{e}).$$

§ 2.2. Задачи на применение теоремы о движении центра масс механической системы

Задача 2.1. (14.1.3). Тело массой $m = 2кг$ движется по горизонтальным направляющим согласно закону $x = 2t^2 + 1$. Определить модуль главного вектора внешних сил, действующих на тело.

Решение. Тело совершает прямолинейное поступательное движение. Положение тела в пространстве определяется одной координатой x. Совместим с траекторией движения тела ось Ox и воспользуемся дифференциальным уравнением движения точки в виде: $m \cdot \ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} = R_x^{e}$.



$x = 0$ Рис. к задаче 2.1

Неизвестной в этом уравнении является проекция главного вектора внешних сил R_x^{e} на ось Ox, то есть надо решить первую задачу динамики для уравнения $R_x^{e} = m \cdot \ddot{x}_C$. В данной задаче $\dot{x}_C = \dot{x} = 4t$, $\ddot{x}_C = \ddot{x} = 4$. Тогда $R_x^{e} = m \cdot \ddot{x}_C = 2 \cdot 4 = 8\,(H)$. **Ответ.** $R_x^{e} = 8H$.

Задача 2.2.(14.1.9). Кривошип 1 шарнирного параллелограмма вращается равномерно с угловой скоростью $\omega = 5рад/с$. Определить модуль главного вектора внешних сил, действующих на звено 2, если его масса $m = 8кг$, а длина $OA = 0{,}4м$.

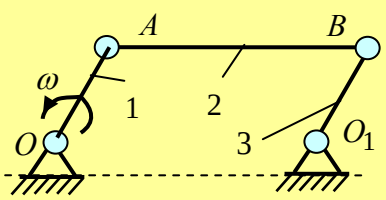


Рис. 1 к задаче 2.2

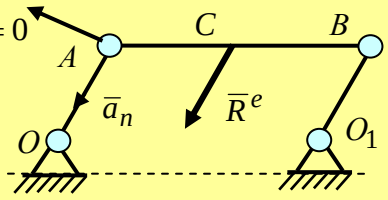


Рис. 2 к задаче 2.2

Решение. $\bar{R}^{e} = M\bar{a}_C$. Тогда $|\bar{R}^{e}| = M|\bar{a}_C|$. Звено AB в данный момент времени движется поступательно, и, следовательно, все его точки, в том числе, точка C и точка A, движутся с равными скоростями и ускорениями и по одинаковым траекториям. Точка A одновременно принадлежит и кривошипу OA, который вращается с постоянной угловой скоростью, и шатуну AB. Ускорение точки $\bar{a}^{A} = \bar{a}_\tau^{A} + \bar{a}_n^{A}$, где $a_\tau^{A} = \varepsilon \cdot OA = \dot{\omega} \cdot OA = 0$, $a_n^{A} = \omega^2 \cdot OA = 25 \cdot 0{,}4 = 10\,(м/с^2)$, $|\bar{a}_C| = \sqrt{(a_\tau^{A})^2 + (a_n^{A})^2} = 10(м/с^2)$. Тогда $|\bar{R}^{e}| = M|\bar{a}_C| = 80(H)$. **Ответ.** $|\bar{R}^{e}| = 80H$.

Задача 2.3.(14.1.20[10]). На тело 1, лежащее на абсолютно гладкой плоскости, действует сила, модуль которой $F = 10H$. Определить ускорение этого тела в момент времени $t = 0{,}5c$, если относительно него под действием внутренних сил системы движется тело 2 согласно уравнению $x_2 = \cos \pi t$. Масса первого тела $m_1 = 4кг$, масса

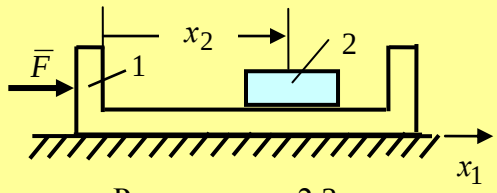


Рис. к задаче 2.3

второго тела $m_2 = 1кг$. Тела движутся поступательно.

Решение. Механическая система, показанная на рис. к задаче, состоит из тела 1 и тела 2. Так как тела движутся поступательно, они могут быть приняты за точки. Для определенности в качестве этих точек примем их центры масс. Запишем основное уравнение динамики для тела 1 в виде: $M\overline{a}_1 = \overline{F}_1^e + \overline{F}_1^i$, $M = m_1 + m_2$. Внешняя сила $\overline{F}^e = \overline{F}$. Внутренней силой, действующей на тело 1, является взятая с обратным знаком сила, действующая на тело 2. Основное уравнение динамики для тела 2 имеет вид: $m_2\overline{a}_2 = +\overline{F}_2^i$. Спроецируем это уравнение на ось x_1 и получим: $m_2\ddot{x}_2 = F_{2x}^i$. Отсюда $F_{2x}^i = m_2\ddot{x}_2 = -m_2\pi^2\cos\pi t$. Проецируя теперь основное уравнение динамики для тела 1 на ось x_1, получим: $(m_1 + m_2)a_1 = F + m_2\pi^2 \cos\pi t$. Отсюда $a_1 = (F + m_2\pi^2\cos\pi t)/(m_1 + m_2)$. При $t = 0{,}5c$ получим $a_1 = F/(m_1 + m_2) = 2(м/c^2)$.

Ответ. $a_1 = 2м/c^2$.

Задача 2.4.(14.1.18[10]). Тело массой $m_1 = 4кг$ может двигаться по гладкой горизонтальной направляющей. На какое расстояние переместится тело, когда однородный и первоначально горизонтальный стержень OA массой $m_2 = 2кг$ и длиной $OA = l = 0{,}6м$, опускаясь под действием силы тяжести $\overline{P}$, займет вертикальное положение? В начальный момент система находилась в покое.

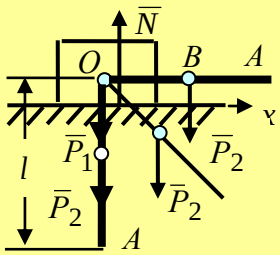


Рис. 1 к задаче 2.4

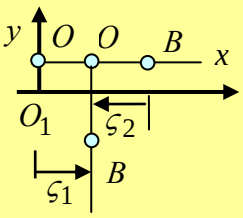


Рис. 2 к задаче 2.4

Решение. Механическая система (рис. 1) состоит из тела, которое может совершить поступательное движение, и прикрепленного к нему с помощью цилиндрического шарнира в точке O однородного стержня OA. В начальный момент времени система находилась в покое, стержень OA удерживался в горизонтальном положении и был отпущен без начальной скорости. Силами, действующими на систему, являются сила тяжести тела $\overline{P}_1$, сила тяжести стержня $\overline{P}_2$, реакция основания $\overline{N}$. В силу гладкости направляющей, горизонтальные силы трения отсутствуют. Указанная система сил является параллельной системой сил, перпендикулярной к оси O_1x. Она остается таковой и в процессе движения механической системы, что показано на рис. 1. Другими словами, сумма проекций всех сил на эту ось есть ноль, и для двух точечных масс имеет место уравнение: $m_1\varsigma_1 + m_2\varsigma_2 = 0$ (см. рис.2). Здесь ς_1– перемещение точки O_1 (читай: перемещение тела), ς_2 – перемещение центра масс B стержня OA (точнее, проекция вектора перемещения точки B на ось O_1x). Направление оси O_1x выбрано так, чтобы искомое перемещение тела ς_1 (проекция вектора перемещения тела на ось O_1x) было положительным. Выразим ς_2 через искомое перемещение ς_1. Из

рис. 2 видим, что $\varsigma_2 = -(l/2 - \varsigma_1)$. Приходим к уравнению: $m_1\varsigma_1 - m_2(l/2 - \varsigma_1) = 0$. Отсюда $\varsigma_1 = m_2 l/2(m_1 + m_2) = 0{,}1(\text{м})$. **Ответ.** $\varsigma_1 = 0{,}1$ *м*.

§ 2.3. Задачи на применение теоремы об изменении количества движения механической системы

Задача 2.5. Телу, находящемуся на шероховатой горизонтальной поверхности, в момент времени $t_0 = 0$ сообщили скорость $v_0 = 10 м/с$. Тело остановилось в момент времени $t_1 = 3с$. Считая движение тела поступательным и прямолинейным, определить коэффициент трения скольжения поверхности.

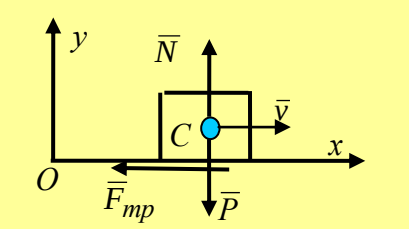


Рис. к задаче 2.5

Решение. Рассматривается движение твердого тела (это частный вид механической системы). При прямолинейном поступательном движении положение тела в пространстве определяется одной координатой, а само тело можно принять за точку. С направлением движения тела совместим ось Ox. На тело действуют сила тяжести $\overline{P}$, нормальная реакция поверхности $\overline{N}$, сила трения $\overline{F}_{mp}$, где $F_{mp} = fN$. Чтобы определить N, записывается основное уравнение динамики в проекциях на ось Oy: $M\ddot{y} = N - P$. Так как $\ddot{y} = 0$, то $N = P = Mg$. Теорема об изменении количества движения механической системы в проекциях на ось Ox принимает вид: $Q_{2x} - Q_{1x} = \sum_{k=1}^{n} S_{kx}^{e}$. Опуская индекс x, вычислим Q_{1x}, Q_{2x}: $Q_2 = Mv_C(t_1) = 0$, так как $v_C(t_1) = 0$ (тело остановилось), $Q_1 = Mv_C(t_2) = Mv_0$. Правая часть этого равенства будет состоять из одного слагаемого: $S_x^e = S(\overline{F}_{mp}) = -\int_{t_0}^{t_1} F_{mp}dt = -\int_{t_0}^{t_1} fNdt$, где f – коэффициент трения скольжения, N – модуль нормальной реакции поверхности. Проекции $P_x = N_x = 0$, так как соответствующие векторы этих сил перпендикулярны к оси Ox. Тогда $-Q_1 = -\int_{t_0}^{t_1} fNdt = -fMgt_1$. Здесь g – ускорение свободного падения. Отсюда $f = v_0 / gt_1 = 0{,}34$. **Ответ.** $f = 0{,}34$.

Задача 2.6. Автомобиль массой $M = 1200кг$ при скорости $72км/час$ произвел резкое торможение и остановился за $12с$. Определить модуль равнодействующей $R^{сопр}$ постоянных сил сопротивления $.\overline{F}_k^{сопр}$, считая движение автомобиля при торможении поступательным и прямолинейным, а векторы изменения количества движения $\Delta\overline{Q} = \overline{Q}_1 - \overline{Q}_0$ и $\overline{R}$ параллельными.

Решение. Время будем отсчитывать от начала экстренного торможения, и воспользуемся теоремой об изменении количества движения механической системы

(тела). Движение тела (кузова) происходит вдоль одной прямой, пусть это ось Ox. В проекциях на ось Ox (индекс опустим) уравнение принимает вид: $Q_1 - Q_0 = \sum_{k=1}^{n} S_k^e$,

где $$\sum_{k=1}^{n} S_k^e = -\sum_{k=1}^{n}\int_0^{t_1} F_k^{сопр}\,dt = -\int_0^{t_1}(\sum_{k=1}^{n} F_k^{сопр})dt = -\int_0^{t_1} R^{сопр}\,dt = -R^{сопр}\int_0^{t_1} dt =$$

$-R^{сопр}t_1 = Q_1 - Q_0$. Здесь $R^{сопр} = \sum_{k=1}^{n} F_k^{сопр}$ – модуль равнодействующей постоянных сил сопротивления. Так как $Q_1 = 0$, то $R^{сопр} = -(Q_1 - Q_0)/t_1 = Q_0/t_1 = Mv_0/t_1 = 1200(кг)\cdot 20(м/с)/12 = 2000H$. **Ответ.** $R^{сопр} = 2кН$.

Задача 2.7. Автомобиль массы M, имея в верхней точке спуска скорость $36км/час$, стал двигаться по инерции. Определить скорость автомобиля через две секунды, если $\alpha = 30^0$. Силами сопротивления пренебречь.

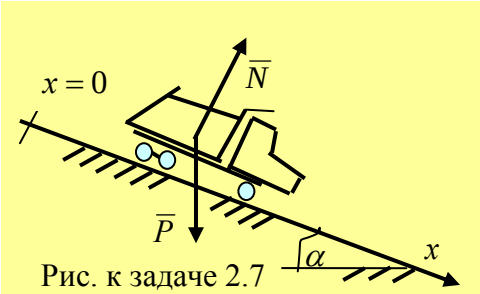


Рис. к задаче 2.7

Решение. Система координат показана на рис. к задаче. Скорость автомобиля $v_0 = 36км/час = 10(м/с)$. Теорема об изменении количества движения в проекциях на ось Ox примет вид:

$$Q_1 - Q_0 = \sum_{k=1}^{2} S_k^e, \qquad (1)$$

где $Q_0 = Mv_0$, $Q_1 = Mv_1$. Силы, действующие на автомобиль, показаны на рисунке. Отличную от нуля проекцию на ось Ox имеет только сила тяжести $\overline{P}$. Поэтому $\sum_{k=1}^{2} S_k^e = S^e(P) = \int_0^{t_1}(P\sin\alpha)dt = Mgt_1\sin\alpha$. Здесь g – ускорение свободного падения. Подставляя полученные выражения в (1), получим искомую величину скорости v_1. $Mv_1 = Mv_0 + Mgt_1\sin\alpha$. При $t_1 = 2c$ получим: $v_1 = v_0 + 0{,}5gt_1 = 10 + 0{,}5\cdot 9{,}81\cdot 2 = 19{,}81(м/с) = 71{,}3(км/час)$. **Ответ.** $v_1 = 71{,}3(км/час)$.

Задача 2.8. Железнодорожный состав при подходе к станции вышел на прямолинейный горизонтальный участок пути. При торможении на состав действует сила сопротивления, равная $0{,}01P$, где $P = Mg$ – вес состава, M – масса состава, g – ускорение свободного падения. За сколько секунд до остановки поезда машинист должен начать торможение, если скорость поезда в момент начала торможения была $v_0 = 54км/час$.

Решение. Итак, состав движется поступательно и прямолинейно. Тепловозы и вагоны в этот промежуток времени движения образуют неизменяемую механическую систему, и могут быть приняты за одно «твердое» тело. Совместим с траекторией движения состава одну из осей координат, например, Ox, и воспользуемся теоремой об изменении количества движения в проекциях на ось. Индекс x опускаем.

$$Q_1 - Q_0 = \sum_{k=1}^{n} S_k^e. \qquad (1)$$

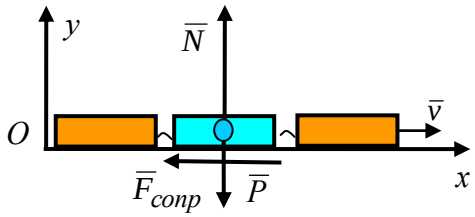


Рис. к задаче 2.8

На состав действуют следующие силы: равнодействующая сил тяжести вагонов $\overline{P} = \sum_{k=1}^{n} \overline{p}_k$, равнодействующая сил сопротивления $\overline{F}_{сопр}$, равнодействующая параллельной системы нормальных сил реакций $\overline{N}$. В уравнение (1) войдет только импульс равнодействующей сил сопротивления, так как проекции остальных сил на ось Ox равны нулю. Кроме того, поскольку в конце рассматриваемого промежутка времени при $t = t_1$ поезд останавливается, то скорость центра масс состава для этого момента времени: $v_C(t_1) = 0$ и, следовательно, проекция на ось Ox вектора количества движения $Q_1 = M \cdot v_C(t_1) = 0$. С учетом сказанного, уравнение (1) принимает вид:

$-Q_0 = S(\overline{F}_{сопр})$. Или $-M \cdot v_0 = -\int_0^{t_1} 0{,}1Pdt$. Отсюда $-M \cdot v_0 = -0{,}1Mg\int_0^{t_1} dt = -0{,}1Mgt_1$.

Тогда $t_1 = v_0 / 0{,}01g = 152{,}9(c)$. **Ответ.** $t_1 = 152{,}9c$.

Применение закона сохранения количества движения

Задача 2.9. На узловых станциях для сортировки вагонов по направлениям дальнейшего движения (то есть для составления поездов по заданным направлениям) используются сортировочные горки. Рассмотрим движение двух вагонов, спущенных с горки и движущихся уже по горизонтальному участку перед сцеплением с основным составом. Пусть масса первого вагона $M_1 = 80$ *тонн*. Он движется со скоростью $v_1 = 2$*м/с*. Второй вагон массой $M_2 = 60$ *тонн*, двигаясь со скоростью $v_2 = 4$*м/с*, догоняет первый и сцепляется с ним. Определить скорость вагонов v после сцепления, предполагая, что силы сопротивления движению пренебрежимо малы.

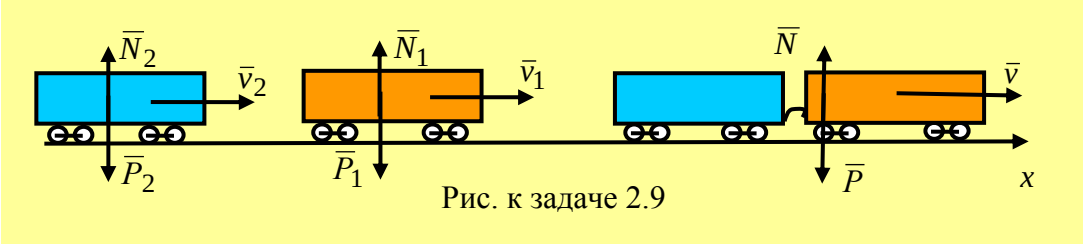


Рис. к задаче 2.9

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из двух тел – двух вагонов. Внешние силы, действующие на вагоны, показаны на рисунке к задаче – это силы

тяжести вагонов и равнодействующие реакций основания. Совместим с направлением движения вагонов ось Ox. Видим, что сумма проекций внешних сил на ось Ox равна нулю, так как все внешние силы перпендикулярны к этой оси. Следовательно, аналитическое условие закона сохранения выполняется. Тогда, опуская индекс x, имеем: $Q_2 = Q_1$. Здесь $Q_2 = (M_1 + M_2)\cdot v$, $Q_1 = M_1 \cdot v_1 + M_2 \cdot v_2$. Приравнивая эти величины, получаем: $v = (M_1 \cdot v_1 + M_2 \cdot v_2)/\,(M_1 + M_2)$. **Ответ.** $v = 2{,}86 м/с$.

Задача 2.10. Артиллерийское орудие весом P_1 стоит на горизонтальной плоскости, как показано на рис. к задаче. В некоторый момент времени происходит выстрел. Снаряд весом P_2 вылетает из ствола под углом α к горизонту с величиной абсолютной скорости v_2. Определить величину скорости v_1 свободного (без сил сопротивления) отката орудия.

Решение. Применим теорему об изменении количества движения механической системы. Введем ось Ox, направив ее в направление выстрела. Орудие и снаряд будем рассматривать как единую механическую систему. До выстрела количество движения системы равно нулю ($Q_1 = 0$), так как она находилась в состоянии покоя (скорости отдельных тел – ноль). После выстрела силы взаимодействия орудия и снаряда, вызываемые давлением пороховых газов в стволе, будут внутренними силами, они изменить количество движения системы не могут. Внешними силами, действующими на тела системы, будут: силы тяжести тел $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ и равнодействующая нормальных реакций основания $\overline{N}$, не показанная на рисунке. Все внешние силы перпендикулярны к оси Ox, поэтому выполняется закон сохранения количества движения механической системы. Следовательно, $Q_{2x} = Q_{1x}$. Вычислим эти проекции. $Q_{1x} = 0$, $Q_{2x} = M_1 \cdot v_{1x} + M_2 \cdot v_{2x} =$

Рис.1 к задаче 2.10

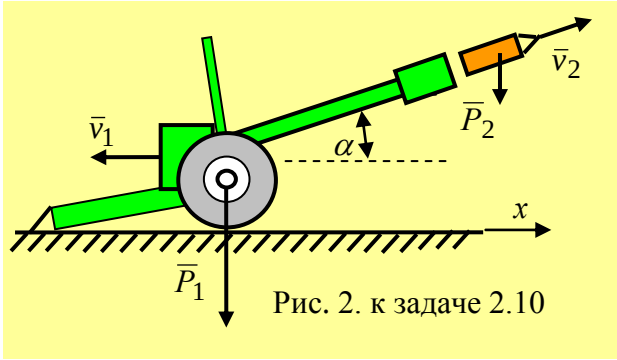


Рис. 2. к задаче 2.10

$= (P_1 / g)\cdot(-v_1) + (P_2 / g)\cdot v_2 \cos\alpha$. Приравнивая Q_{1x}, Q_{2x} и решая полученное уравнение, находим: $v_1 = (P_2 / P_1)\cdot v_2 \cos\alpha$. Рекомендуем проанализировать влияние различных параметров на скорость отката самостоятельно. **Ответ.** $v_1 = (P_2 / P_1)\cdot v_2 \cos\alpha$.

§ 2.4. Задачи на вычисление работы, мощности и применение теоремы об изменении кинетической энергии механической системы

Задача 2.11. Тело A массой $m_1 = 5 кг$ опускается на высоту $h = 2 м$ и поднимает тело B массой $m_2 = 3 кг$, лежащее на плоскости, наклоненной по углом $\alpha = 30^0$ к горизонту. Коэффициент трения скольжения по наклонной плоскости $f = 0{,}2$. В подшипнике блока C радиуса $r = 0{,}2$м действует постоянный момент сопротивления

$M_{сопр} = 1{,}5 H \cdot м$. Определить суммарную работу сил и момента сопротивления, действующих на тела механической системы.

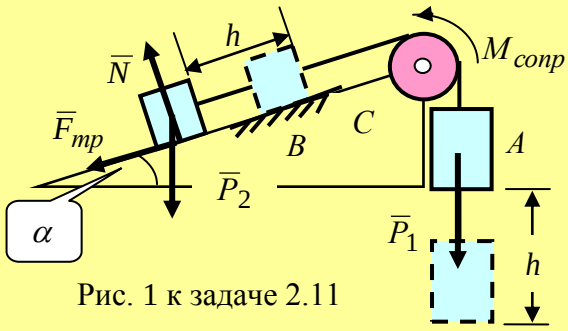


Рис. 1 к задаче 2.11

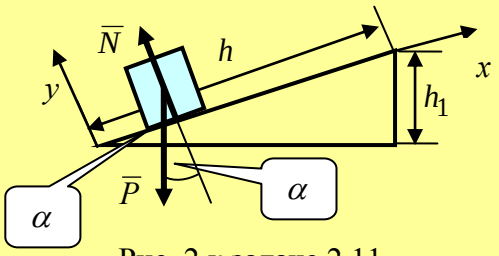


Рис. 2 к задаче 2.11

Решение. Механическая система и силы, действующие на нее, показаны на рис.1 к задаче. Постоянная сила тяжести $\overline{P}_1$ тела A совершает работу $A_1 = m_1 gh = 10g(Дж)$. Точка приложения силы тяжести $\overline{P}_2$ при перемещении груза по наклонной плоскости на расстояние h поднимается на высоту $h_1 = 0{,}5h = 1м$ (см. рис. 2 к задаче). Ее работа $A_2 = -m_2 gh_1 = -3g(Дж)$. Работу постоянной силы трения $\overline{F}_{тр}$ вычислим по формуле: $A_{тр} = -F_{тр} \cdot h = -fNh$. Тело B движется поступательно и может быть принято за точку. Поэтому, чтобы определить нормальную реакцию опоры составим дифференциальное уравнение движения точки (тела) в проекциях на ось y: $m_2 \ddot{y} = N - P_2 \cdot \cos\alpha$ (см. рис. 2). Так как $y = 0$, то $N = P_2 \cos\alpha = m_2 g \cdot \cos\alpha$. Отсюда $A_{тр} = -fNh = -0{,}2 \cdot 3g \cdot 0{,}87 \cdot 2 = -1{,}04g(Дж)$. Работу момента сопротивления вычислим по формуле: $A_M = M_{сопр} \cdot \varphi$. Нить движется по блоку без проскальзывания, следовательно $h = r\varphi$. Тогда $A_M = -M_{сопр} \cdot h / r = -1{,}5 \cdot 2 / 0{,}2 = -15(Дж)$. Суммарная работа $A = A_1 + A_2 + A_{тр} + A_M = 10g - 3g - 1{,}04g - 15$. При $g = 9{,}81 м/с^2$ получим: $A = 43{,}47(Дж)$. **Ответ.** $A = 43{,}47(Дж)$.

Рис.1 к задаче 2.12

Задача 2.12. (29.10. [8]). Шлифовальный круг шлифовального станка диаметром *0,6м* делает *120об/мин*. Потребляемая мощность *1,2кВт*. Коэффициент трения шлифовального круга о деталь 0,2. С какой силой круг прижимает шлифуемую деталь?

Решение. На шлифовальный круг действуют нормальная реакция обрабатываемой поверхности $\overline{N}$ и сила трения скольжения $\overline{F}_{тр}$ величиной $F_{тр} = f \cdot N$. Потребляемая мощность при данном режиме шлифования вычисляется по формуле: $W = M_z \cdot \omega$, где ω – угловая скорость вращения шлифовального круга, M_z – «крутящий» момент, действующий

на шлифовальный круг, относительно оси Cz, проходящей перпендикулярно плоскости рисунка. Тогда $W = M_z \cdot \omega = F_{тр} \cdot R \cdot \omega = fN \cdot R \cdot \pi n / 30$. Отсюда

$$N = 30W / f \cdot R \cdot \pi n =$$

$$= 30 \cdot 1200 / (0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 3{,}14 \cdot 120) = 1592{,}36\text{Н}.$$

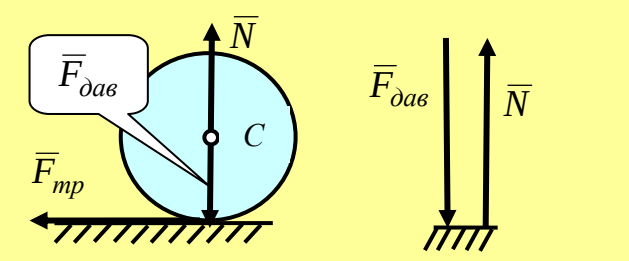


Рис. 2 к задаче 2.12

Нормальная реакция поверхности равна по величине модулю силы $\bar{F}_{дав}$, с которой круг прижимает деталь, то есть $N = F_{дав}$. **Ответ.** $F_{дав} = N = 1592{,}36$Н.

Задача 2.13. В горизонтальной плоскости под действием крутящего момента $M_{кр}$ вращается трубка массой M и длиной l относительно вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω. По трубке движется точка A массой m по закону $OM = x = x(t)$. Вывести формулу для кинетической энергии механической системы.

Решение. Механическая система состоит из трубки и точки, движущейся вместе с трубкой. Кинетическая энергия системы будет равна $T = T_{трубки} + T_{точки}$. Кинетическую энергию трубки вычислим по формуле : $T_{трубки} = J_{Oz}\omega^2 / 2$.

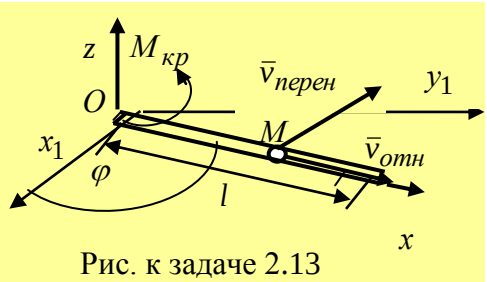


Рис. к задаче 2.13

Если трубку рассматривать как однородный стержень, то $J_{Oz} = Ml^2/3$ (см. приложение 1) и $T_{трубки} = Ml^2\omega^2/6 = const$. Определим теперь кинетическую энергию точки. Точка совершает сложное движение, и ее абсолютная скорость геометрически складывается из скорости точки в относительном движении по трубке и переносной скорости точки вместе с трубкой, то есть $\bar{v}_{абс} = \bar{v}_{отн} + \bar{v}_{перен}$. В момент времени $t = t_1$ имеем: $v_{отн} = \dot{x}(t_1)$, $v_{пер} = \omega \cdot x(t_1)$. Так как векторы $\bar{v}_{отн}$ и $\bar{v}_{перен}$ взаимно перпендикулярны, то $v_{абс} = \sqrt{v_{отн}^2 + v_{перен}^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \omega^2 x^2}$. Тогда $T_{точки} = Mv_{абс}^2/2 = M(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)/2$. Кинетическая энергия системы $T = T_{трубки} + T_{точки} = Ml^2\omega^2/6 + M(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)/2$. Данная формула справедлива для любых M, m, ω и для всех $x(t) \le l$.

Ответ. $T = Ml^2\omega^2/6 + M(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)/2$.

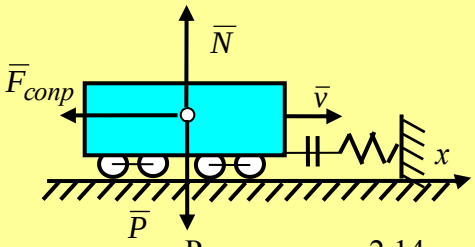


Рис. к задаче 2.14

Задача 2.14. Вагон массой $M = 50$т, заезжая в тупик, налетает на неподвижный пружинный амортизатор жесткости $c = 2 \cdot 10^7\ Н/м$. Определить максимальное укорочение пружины амортизатора, если вагон в момент соприкосновения с пружиной имеет скорость $v_0 = 2 м/с$. Силами трения качения пренебречь.

Решение. Применим теорему об изменении кинетической энергии неизменяемой механической системы: $T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e$. Движение вагона рассматривается в промежутке времени $t_0 \le t \le t_1$, где за начальный момент времени t_0 принят момент соприкосновения вагона и пружины, а t_1 – момент, соответствующий максимальному сжатию пружины, когда вагон останавливается. Вагон движется поступательно. Кинетическая энергия в начальный и конечный моменты времени равна: $T_0 = Mv_0^2/2$, $T_1 = 0$. Силы, действующие на вагон, показаны на рисунке к задаче. Работу упругой силы вычислим по формуле: $A_{\bar{y}} = -c\lambda^2/2$. Работа равнодействующей сил нормальных реакций $A_{\bar{N}}$ и работа силы тяжести вагона $A_{\bar{P}}$ равны нулю, так как эти силы перпендикулярны перемещению вагона. С учетом сказанного, уравнение теоремы об изменении кинетической энергии получит вид: $-Mv_0^2/2 = -c\lambda_{\max}^2/2$. Отсюда $\lambda_{\max} = v_0 \cdot \sqrt{M/c}$. Подставляя данные задачи, получим: $\lambda_{\max} = 2(м/с) \cdot \sqrt{50000(кг) \cdot 10^{-7}/2(Н/м)} = 10^{-1}(м)$. **Ответ.** $\lambda = 10см$.

Задача 2.15. Железнодорожный состав при подходе к станции вышел на прямолинейный горизонтальный участок пути. При торможении на состав действует сила сопротивления, равная $0{,}01P$, где $P = Mg$ – вес состава, масса состава. Здесь g – ускорение свободного падения. За сколько метров от станции машинист должен начать торможение, если скорость поезда в момент начала торможения была $v_0 = 54км/час$?

Решение. Состав на прямолинейном участке пути можно рассматривать как неизменяемую механическую систему из твердых тел – вагонов и тепловоза, если пренебречь бесконечно малыми перемещениями в сцепных устройствах. На состав действуют равнодействующая сил тяжести вагонов $\bar{P} = \sum_{k=1}^{n} \bar{p}_k$, равнодействующая сил сопротивления $\bar{F}_{сопр}$, равнодействующая параллельной системы нормальных сил реакций $\bar{N}$. Движение системы будем рассматривать в промежутке времени $t_0 \le t \le t_1$, где начальный момент времени t_0 - момент начала торможения, а в момент времени t_1 состав останавливается. Обратимся к теореме об изменении кинетической энергии неизменяемой механической системы $T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e$. Здесь $T_1 = 0$, $T_0 = Mv_0^2/2$. Работа равнодействующей сил сопротивления вычисляется по формуле: $A_{сопр} = -F_{сопр} \cdot l = -0{,}01Mg \cdot l$, где l – длина тормозного пути. Работа равнодействующих сил тяжести и нормальных реакций опоры равны нулю, так как эти силы перпендикулярны к перемещению железнодорожного состава. Теорема об изменении кинетической энергии неизменяемой механической системы принимает вид: $-Mv_0^2/2 = -0{,}01Mg \cdot l$. Отсюда $l = v_0^2/(0{,}02g) = 15 \cdot 15/(0{,}02 \cdot 9{,}81) = 1146{,}8(м)$.

Ответ. $l = 1146{,}8м$.

Задача 2.16. (29.1. [8]). Кирпичный блок, размеры которого указаны на рисунке, имеет массу *4000кг.* Определить работу, которую надо затратить на опрокидывание его вращением вокруг ребра D.

Решение. Блок требуется опрокинуть вращением относи-тельно точки D.

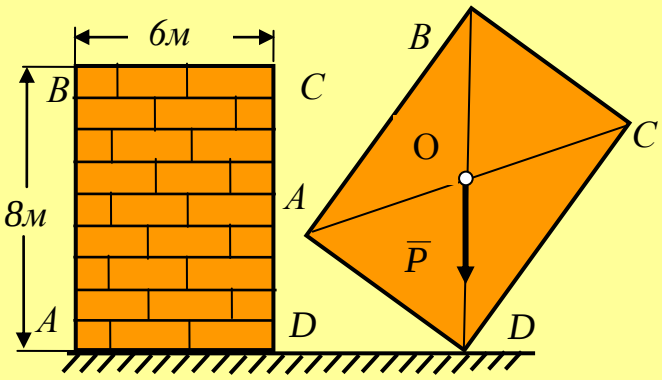


Рис. к задаче 2.16

Предположим, что основание абсолютно твердое, и при вращении относительно точки D никаких сил сопротивления опрокидыванию, кроме силы тяжести блока $\overline{P}$, не появляется. Следовательно, блок опрокинется тогда, когда линия действия силы тяжести пересечет опору правее точки D. Положение блока, показанное на рисунке, является положением неустойчивого равновесия – любое малое возмущение приведет или к опрокидыванию, или к возврату в первоначальное состояние. Применим теорему об изменении кинетической энергии блока. Сила тяжести блока приложена к точке O. Видим, что и в исходном устойчивом состоянии, и в неустойчивом состоянии блока скорости точки O равны: $v_0 = v_1 = 0$. Отсюда следует, что сумма работ опрокидывающих сил (неважно, как они при этом прикладывались) и работа силы тяжести равна нулю. А модуль суммы работ опрокидывающих сил $A_{оп}$ равен модулю работы силы тяжести. Итак, $A_P = mgh$, где $h = h_1 - h_0$. $h_0 = AB/2 = 4(м)$, $h_1 = BD/2 = \sqrt{AD^2 + AB^2}/2 = \sqrt{100}/2 = 5(м)$ и $h = 1(м)$. Тогда $A_P = mgh = 4000 \cdot 9{,}81 \cdot 1 = 39240(\text{Н}м) = 39{,}24(кДж)$. **Ответ:** $A_{оп} = 39{,}24(кДж)$.

§ 2.5. Задачи на применение принципа Даламбера для механической системы

Задача 2.17. Автопоезд, состоящий из тягача и двух прицепов с массами $M_1 = 15000кг$ и $M_2 = 20000кг$ движется равноускоренно по прямолинейному участку пути. Со стороны тягача к первому прицепу приложена сила $\overline{G}$. Кроме того, на прицепы действуют постоянные силы сопротивления, равные по величине: $F_1^{сопр} = f_k M_1 g$ и $F_2^{сопр} = f_k M_2 g$, где известный коэффициент пропорциональности $f_k = 0{,}1$. Определить ускорение автопоезда и силу, приложенную на сцепное устройство второго прицепа.

Рис.1 к задаче 2.17

Решение. Для решения задачи составим механическую систему, состоящую из двух прицепов (рис. 2). На тела системы действуют внешние силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, сила $\overline{G}$, равнодействующие нормальных реакций $\overline{N}_1, \overline{N}_2$, силы сопротивления движению $\overline{F}_1^{сопр}, \overline{F}_2^{сопр}$, внутренние силы взаимодействия $\overline{T}_1 = -\overline{T}_2$. К этому надо добавить силы инерции $\overline{F}_1^{ин}$ и $\overline{F}_2^{ин}$. Система уравнений принципа Даламбера принимает вид:

$$\bar{G}+\bar{F}_1^{сопр}+\bar{P}_1+\bar{T}_1+\bar{N}_1+\bar{F}_1^{ин}=0, \qquad \bar{F}_2^{сопр}+\bar{P}_2+\bar{T}_2+\bar{N}_2+\bar{F}_2^{ин}=0. \qquad (1)$$

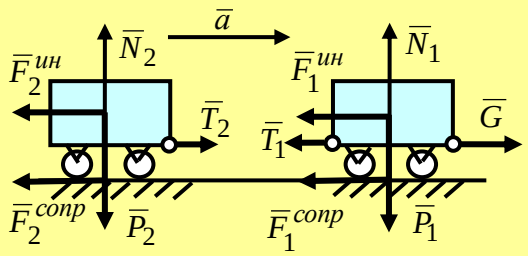


Рис. 2 к задаче 2.17

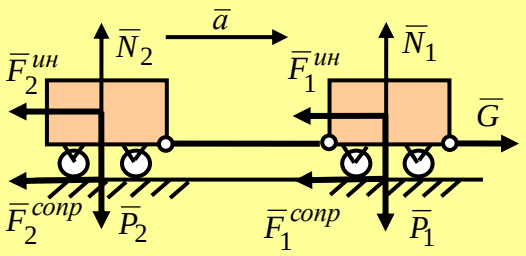


Рис. 3 к задаче 2.17

Спроецируем эти уравнения на ось Ox, получим:

$$G-F_1^{сопр}-T_1-F_1^{ин}=0, \qquad -F_2^{сопр}+T_2-F_2^{ин}=0. \qquad (2)$$

Или $$G-f_kM_1g-T_1-M_1a=0, \qquad -f_kM_2g+T_2-M_2a=0. \qquad (3)$$

Сложив уравнения (2),(3), получим уравнение для вычисления ускорения автопоезда: $G-f_kM_1g-f_kM_2g-M_1a-M_2a=0$. Отсюда $a=[G-f_kg(M_1+M_2)]/(M_1+M_2)$.

Окончательно для ускорения механической системы получаем: $a=\dfrac{G}{M_1+M_2}-f_kg$.

Величину силы T_2 с учетом величины a найдем из второго из уравнений (3):

$$T_2=\frac{GM_2}{M_1+M_2}.$$

Такая же по величине сила, но противоположно направленная, действует и на первый прицеп. **Ответ.** $a=G/(M_1+M_2)-f_kg$, $T_2=T_1=GM_2/(M_1+M_2)$.

Задача 2.18. (17.3.16. [10]) Барабан 1 радиуса $r=20см$ вращается под действием пары сил с моментом M с угловым ускорением $\varepsilon=2рад/c^2$. Определить модуль реакции в шарнире *O*, если коэффициент трения скольжения тела 2 по плоскости $f=0{,}1$, а масса груза 2 равна $m_2=4кг$. Массой барабана m_1 пренебречь.

Решение. Механическая система состоит из двух твердых тел. Барабан совершает вращательное движение относительно неподвижной оси, проходящей перпендикулярно к плоскости материальной симметрии (к плоскости рисунка) через его центр масс. В таком случае силы инерции барабана приводились бы только к паре сил с моментом $M_{1z}^{ин}$, но, по условию задачи масса барабана пренебрежимо мала по сравнению с m_2 и, по условию задачи, масса барабана принимается равной нулю. Поэтому и $M_{1z}^{ин}=0$. Итак, для тела 1 (барабан) имеем:

$$\bar{R}_1^{ин}=-m_1\bar{a}_O=0,$$

$$M_{1z}^{ин}=-J_{Oz}\,\varepsilon=0.$$

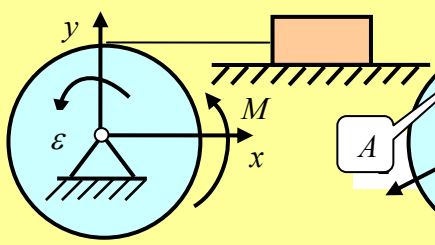


Рис. 1 к задаче 2.18

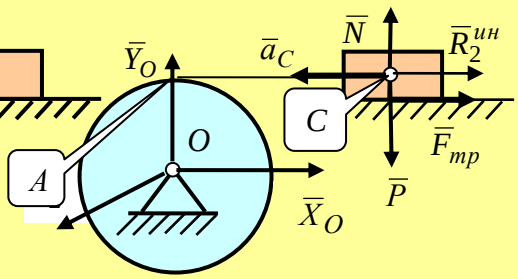


Рис. 2 к задаче 2.18

Тело 2 совершает поступательное движение. Силы инерции при таком движении приводятся только к

главному вектору $\overline{R}^{ин} = -m_2\overline{a}_C$, где $\overline{a}_C$ – ускорение центра масс тела 2. Уравнение принципа Даламбера спроецируем на ось Ox: $X_O + F_2^{ин} + \overline{F}_{тр} = 0$. $|X_O| = F_2^{ин} + \overline{F}_{тр} = m_2 \cdot a_C + fm_2 g$. Здесь пока неизвестно ускорение a_C. Для определения a_C заметим, что тела связаны нерастяжимой нитью, намотанной на барабан без проскальзывания. Тогда $a_C = a_A^{\tau} = \varepsilon \cdot r$. $|X_O| = m_2 \cdot a_C + fm_2 g = m_2 \cdot \varepsilon r + fm_2 g$. После подстановки исходных данных получим: $|X_O| = 4 \cdot 2 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 4 \cdot 9{,}8 = 5{,}52(H)$. **Ответ.** $|X_O| = 5{,}52(H)$.

Задача 2.19.(41.19 [8]). Однородная прямоугольная пластинка (рис. 1 к задаче) постоянной толщины и массы M равномерно вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. Определить силу, разрывающую пластину в направлении, перпендикулярном оси вращения, в сечении, проходящем через ось вращения.

Решение. Силы, которые могут разорвать пластину по оси вращения – внутренние силы. Чтобы их выявить и сделать внешними, мысленно разделим пластину на две части сечением, проходящим чуть правее оси вращения. Это исключит из рассмотрения реакции связей. Рассмотрим одну из частей, например, правую (рис. 2). Действие левой части заменим равномерно распределенной, что будет доказано ниже, системой сил с равнодействующую $\overline{Q}$. Эти силы действуют в плоскости yz, которая делит толщину пластины пополам. Определимся сначала с силами инерции. Пластина вращается относительно неподвижной оси z. Все точки пластины при этом движутся по

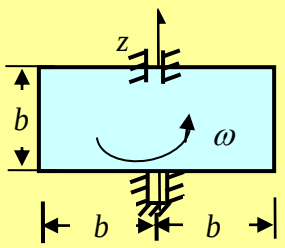


Рис. 1 к задаче 2.19

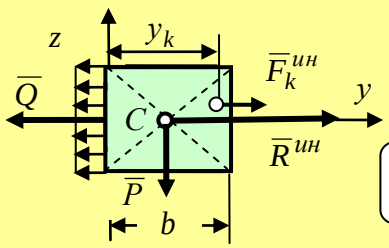


Рис. 2 к задаче 2.19

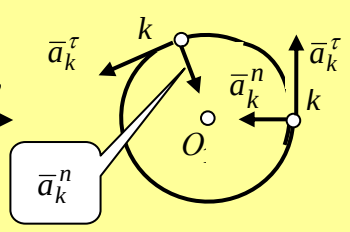


Рис. 3 к задаче 2.19

окружностям, лежащим в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. На рис.3 показана траектория произвольной k – той точки при наблюдении с положительного конца оси z и сама точка в два момента времени. Тогда вектор полного ускорения $\overline{a}$ любой точки, совершающей криволинейное движение, может быть разложен на касательную $\overline{a}^{\tau}$ и нормальную $\overline{a}^{n}$ составляющие. В нашем случае $\omega = const$, следовательно, $\varepsilon = 0$ и $a_k^{\tau} = \varepsilon \cdot y_k = 0$. Поэтому векторы полного ускорения точек пластины совпадают со своими нормальными составляющими: $\overline{a}_k = \overline{a}_k^{n}$. Нормальные ускорения имеют величину $a_k^{n} = \omega^2 \cdot y_k$. Таким образом, силы инерции различных точек пластины $\overline{F}_k^{ин} = -m_k\overline{a}_k = -m_k\omega^2 y_k$ образуют параллельную систему сил с линиями действия, перпендикулярными к оси вращения (рис. 2). Такая система сил приводится в точке C к равнодействующей $\overline{R}^{ин} = -(M/2)\overline{a}_C^{n}$, а момент сил инерции

относительно оси вращения равен нулю, так как $M_z^{ин} = -J_z\varepsilon$. Важно заметить и другое. Силы инерции точек пластины зависят только от координаты y_k (расстояний до оси вращения) и не зависят от координаты z_k. Другими словами, действие «отброшенной» часть пластины на рассматриваемую часть надо заменить равномерно распределенными силами с равнодействующей $\overline{Q}$, что и было сделано ранее. На половинку пластины действуют: внешняя искомая сила $\overline{Q}$, сила тяжести $\overline{P}$ и равнодействующая сил инерции $\overline{R}^{ин}$, показанные на рис.2. Первое из уравнений принципа Даламбера принимает вид: $\overline{Q} + \overline{P} + \overline{R}^{ин} = 0$, а уравнение моментов обращается в тождество. Проецируя уравнение на ось y, получим: $-Q + (M/2)\cdot\omega^2\cdot(b/2) = 0$. Отсюда искомое $Q = M\omega^2 b/4$. **Ответ.** $Q = M\omega^2 b/4$.

Задача 2.20.(17.3.12[10]). При торможении поезда центр масс C вагона (рис. 1) имеет ускорение величиной $a = 5м/с^2$. На сцепки вагона действуют силы от соседних вагонов, величины которых $F_1 = 10кН$, $F_2 = 30кН$. Определить в $кН$ силу давления колес A (двух колес задней оси) на путь. Масса вагона $m = 3\cdot 10^4 кг$, размеры $h_1 = 2{,}8м$, $h_2 = 1{,}6м$, $l = 5м$. Колебаниями пренебречь.

Решение. Так как исследуется движение тела и требуется определить только одну суммарную величину N_A, удобно применить уравнения принципа Даламбера. Внешние силы и сила инерции тела, приведенная к центру масс, показаны на рис. 2. Здесь $\overline{P}$ – сила тяжести вагона, F_1, F_2 – заданные силы, $\overline{N}_A, \overline{N}_B$ – нормальные реакции опоры, $\overline{F}^{ин} = -m\overline{a}_C$ – сила инерции механической системы (вагона). Составим уравнение моментов относительно оси Bz, которая проходит перпендикулярно

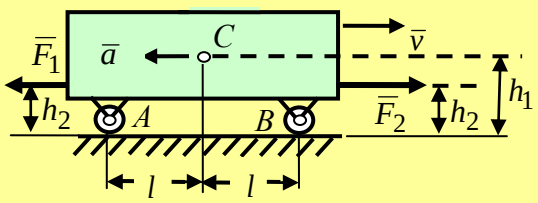


Рис. 1 к задаче 2.20

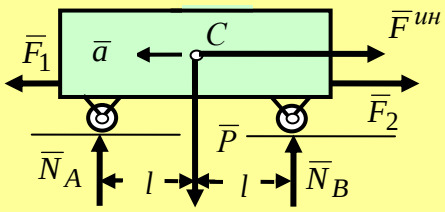


Рис. 2 к задаче 2.20

плоскости рисунка через точку B (на рисунке не показана).

$$\sum_{k=1}^{n} mom_z(\overline{F}_k^e) + M_z^{ин} = 0: \qquad -N_A\cdot 2l + (F_1 - F_2)h_2 + Pl - F^{ин}h_1 = 0.$$ Отсюда

$$N_A = [(F_1 - F_2)h_2 + mgl - mah_1]/2l = [(10-30)\cdot 1{,}6 + 3\cdot 10\cdot(9{,}81\cdot 5 - 5\cdot 2{,}8]/10 = 102(кН).$$

Сила давления колес на путь $\overline{N}_A^* = -\overline{N}_A$. **Ответ.** $N_A^* = 102(кН)$.

Задача 2.21.(41.16 [8]). Груз A массой M_1, опускаясь вниз, приводится в движение посредством нерастяжимой нити, переброшенной через неподвижный блок C, груз B массой M_2 (рис. 1). Определить силу давления стола D на пол, если масса стола равна M_3. Массой нити пренебречь.

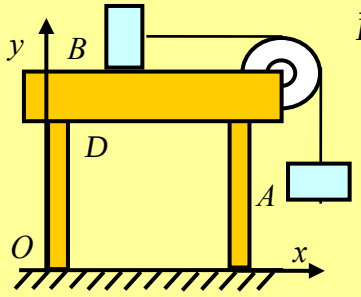


Рис. 1 к задаче 2.21

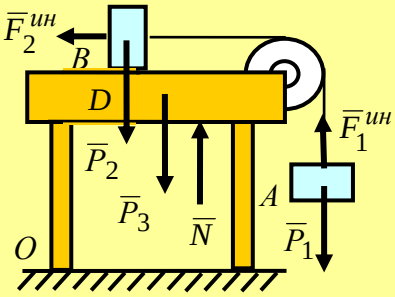


Рис. 2 к задаче 2.21

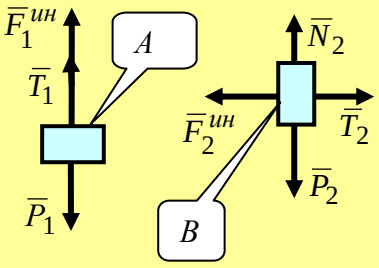


Рис. 3 к задаче 2.21

Решение. В данной задаче имеем механическую систему из трех твердых тел – тела A, тела B, стола D. Приложим действующие на систему внешние силы $\overline{P}_1 = M_1\overline{g}$, $\overline{P}_2 = M_2 g$, $\overline{P}_3 = M_1 g$ – силы тяжести указанных тел соответственно. $\overline{N}$ – равнодействующая системы четырех (по числу ножек стола) параллельных сил реакций пола в точках давления стола на пол, $\overline{F}_1^{ин}$, $\overline{F}_2^{ин}$ – силы инерции (рис. 2) движущихся тел A и B. Запишем уравнение принципа Даламбера в виде: $\overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 + \overline{N} + \overline{F}_1^{ин} + \overline{F}_2^{ин} = 0$. Спроецируем это уравнение на ось Oy и получим: $-M_1 g - M_2 g - M_3 g + N + M_1 a = 0$. Отсюда $N = (M_1 + M_2 + M_3)g - M_1 a$. В этом уравнении пока неизвестно значение ускорения a. Чтобы определить ускорение, рассмотрим отдельно поступательные движения грузов, освободив их от связей. Действие связей надо заменить их реакциями, которые теперь выступают в роли внешних сил. Теперь и для тела A, и для тела B можно записать уравнения принципа Даламбера (см. рис.3). Они, соответственно, примут вид: $\overline{P}_1 + \overline{T}_1 + \overline{F}_1^{ин} = 0$, $\overline{P}_2 + \overline{N}_2 + \overline{T}_2 + \overline{F}_2^{ин} = 0$. Первое из этих уравнений проецируем на вертикальную ось Oy, второе – на горизонтальную ось Ox. Тогда $-M_1 g + T_1 + M_1 a = 0$ и $T_2 - M_2 a = 0$. Вычитая из первого уравнения второе уравнение, с учетом того, что $T_1 = T_2$, получим: $-M_1 g + M_1 a + M_2 a = 0$. Отсюда $a = M_1 g/(M_1 + M_2)$. Подставляя a в полученное ранее выражение для N, получим: $N = [(M_1 + M_2 + M_3) - M_1^2/(M_1 + M_2)] \cdot g$.

Ответ. $N = [M_1 + M_2 + M_3 - M_1^2/(M_1 + M_2)] \cdot g$.

Задача 2.22.(41.23[8]). Тонкий однородный прямолинейный стержень AB шарнирно соединен с вертикальным валом в точке O. Вал вращается с постоянной скоростью ω. Определить угол отклонения φ стержня от вертикали, если $OA = l_1$ и $OB = l_2$.

Решение. В начальном состоянии стержень AB занимал вертикальное положение. С некоторого момента времени, когда угловая скорость вала (соответственно, и стержня AB) достигает данного значения ω, угловая скорость больше не меняется. Стержень к этому моменту отклонен на угол φ, который в дальнейшем не меняется. Это движение назовем установившимся. Назовем первой частью стержня часть OA, масса его m_1. Второй частью – часть OB с массой m_2. Мысленно освободим стержень в шарнире O, и приложим к стержню все внешние

силы: силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, равнодействующие сил инерции $\overline{R}_1^{ин}$, $\overline{R}_2^{ин}$ и реакции цилиндрического шарнира $\overline{Y}_O, \overline{Z}_O$, которые тоже стали внешними. С валом жестко свяжем прямоугольную систему координат, вращающуюся вместе с ним. При этом стержень AB будет располагаться в плоскости Oyz. Для определения угла отклонения стержня φ воспользуемся принципом Даламбера, и к внешним силам прибавим силы инерции. Выясним, как они распределены.

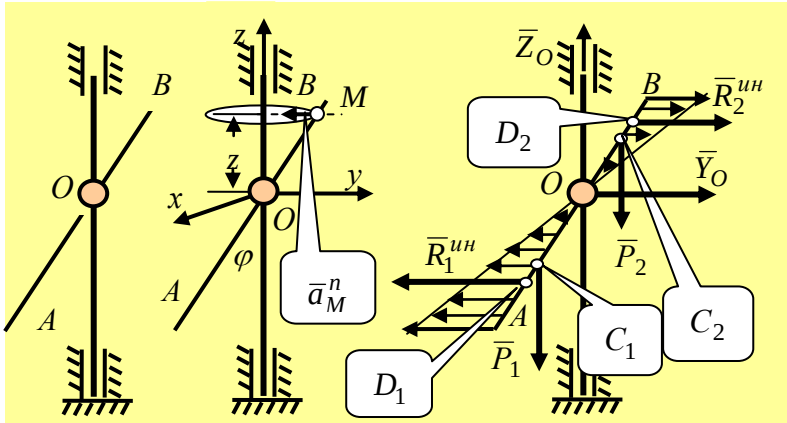


Рис.1 к задаче 2.22 Рис.2 к задаче 2.22

Для этого вычислим ускорение произвольной точки M с координатой z. Как известно, точка движется по окружности радиуса $h(z)$. Касательное ускорение точки $a_M^\tau = h(z)\cdot\varepsilon = 0$, так как угловая скорость вала ω – постоянна. Нормальное ускорение $a_M^n = \omega^2 \cdot h(z)$, где $h(z) = z \cdot tg\varphi$. Следовательно, вектор полного ускорения точки $\overline{a}_M$ совпадает со своей нормальной составляющей $\overline{a}_M = \overline{a}_M^n$. Модуль вектора $a_M^n = \omega^2 \cdot h(z) = (\omega^2 \cdot tg\varphi)\cdot z$. Видим, что модули полных ускорений точек стержня меняются по линейному закону, а сами векторы ускорений точек стержня AB параллельны между собой и направлены к оси вращения, то есть к оси вала. Тогда и силы инерции точек стержня параллельны, направлены от оси вращения, меняются по линейному закону (распределены по закону треугольника). Линии действия равнодействующих сил инерции частей стержня $\overline{R}_1^{ин}$, $\overline{R}_2^{ин}$ проходят через центры тяжести соответствующих треугольников. Кроме сил инерции к частям стержня в их центрах масс C_1 и C_2 приложены их силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ и реакции цилиндрического шарнира $\overline{Y}_O, \overline{Z}_O$ (рис. 2). $R_1^{ин} = m_1 a_{C_1}$, $R_2^{ин} = m_2 a_{C_2}$, $a_{C_1} = a_{C_1}^n = \omega^2 \cdot 0{,}5 l_1 \sin\varphi$, $a_{C_2} = a_{C_2}^n = \omega^2 \cdot 0{,}5 l_2 \sin\varphi$, $m_1 = \rho A l_1$, $m_2 = \rho A l_2$, $R_1^{ин} = 0{,}5\rho A l_1 \omega^2 l_1 \sin\varphi$, $R_2^{ин} = 0{,}5\rho A l_2 \omega^2 l_2 \sin\varphi$, $P_1 = m_1 g = \rho A l_1 g$, $P_2 = m_2 g = \rho A l_2 g$. Здесь ρ – плотность материала, A – площадь поперечного сечения стержня, g – ускорение свободного падения. Теперь, пользуясь рисунком, составим уравнение моментов всех сил, действующих на стержень, относительно оси Ox: $P_1 \cdot 0{,}5 l_1 \sin\varphi - P_2 \cdot 0{,}5 l_2 \sin\varphi - R_1^{ин} \cdot (2/3)\cdot l_1 \cdot \cos\varphi - R_2^{ин} \cdot (2/3)\cdot l_2 \cos\varphi = 0$. Или

$$0{,}5\rho A g (l_1^2 - l_1^2)\sin\varphi \; - (2/3)\cdot 0{,}5\rho A \omega^2 (l_1^3 + l_2^3)\sin\varphi \cdot \cos\varphi = 0.$$

Отсюда $\cos\varphi = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{g}{\omega^2}\cdot\dfrac{l_1^2 - l_2^2}{l_1^3 + l_2^3}$. **Ответ.** $\cos\varphi = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{g}{\omega^2}\cdot\dfrac{l_1 - l_2}{l_1^2 - l_1 l_2 + l_2^2}$., $x(t) \le l$.

.

ГЛАВА 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

§ 3.1. Краткие сведения из теоретического материала по аналитической механике

Материальная точка называется свободной *(без наложенных связей), если ее движение определяется только приложенными активными силами и начальными условиями движения.*

Свободной называется механическая система, *состоящая из свободных материальных точек.*

Материальная точка называется несвободной, *если ее движение подчинено каким-либо условиям (связям).*

Несвободной (системой со связями) называется механическая система, *состоящая из несвободных материальных точек.*

Связями называются *любые ограничения, наложенные на положения, скорости и ускорения точек механической системы. Эти ограничения задаются заранее, не вытекают из уравнений движения, не зависят от действующих на систему активных сил и начальных условий.*

Связи называются стационарными*, если они не изменяются с течением времени. Уравнения этих связей параметр времени* t *явно не содержат.*

Нестационарными *называются связи, изменяющиеся с течением времени. Уравнения этих связей явно содержат параметр времени* t.

Геометрическими *называются связи, которые налагают ограничения на координаты точек механической системы.*

Кинематическими или дифференциальными *называются связи, которые накладывают ограничения на первые производные по времени от координат точек системы.*

Интегрируемой *называется кинематическая связь, которую можно проинтегрировать и свести к геометрической связи.*

Голономными связями *называются геометрические и интегрируемые кинематические связи.*

Неголономными *называются неинтегрируемые кинематические связи.*

Удерживающими *называются связи, которые сохраняются при любом положении механической системы.*

Неудерживающими *называются связи, которые при некоторых положениях механической системы могут исчезать.*

Числом степеней свободы s *голономной механической системы со стационарными связями называется разность между числом координат, определяющих положение системы, и числом* η *наложенных на систему голономных связе:* $S = 3n - \eta$.

.

Возможные перемещения точки и механической системы

Возможными перемещениями механической системы *называется любая совокупность перемещений точек этой системы из занимаемого ими в данный момент времени положения, удовлетворяющая двум условиям:*

1. Перемещения отдельных точек механической системы должны быть бесконечно малыми (говорят, элементарными).

2. Элементарные перемещения точек не должны нарушать наложенные на них связи.

Число степеней свободы можно вычислить и через возможные перемещения системы.

Числом степеней свободы *механической системы называется число независимых между собой возможных перемещений точек этой системы.*

Число независимых возможных перемещений *в голономной механической системе из n материальных точек с* η *стационарными удерживающими связями вычисляется по формуле:* $S = 3n - \eta$.

Элементарная работа силы на возможном перемещении вычисляются так же, как элементарная работа силы на истинном перемещении:

$$\delta A = \overline{F}\delta\overline{r}\,, \qquad \delta A = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z\,, \qquad \delta A = F_\tau\delta s = F\delta s\cdot\cos\alpha\,.$$

Идеальные связи. *Если сумма элементарных работ реакций связей, наложенных на механическую систему, на любых возможных перемещениях точек системы равна нулю, то связи называются идеальными.*

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k^r\delta\overline{r}_k = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{n}\delta A_k^r = 0\,.$$

Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа)

Для равновесия механической системы с идеальными стационарными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех приложенных к системе активных сил на любом возможном перемещении системы была бы равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k^a\delta\overline{r}_k = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{n}\delta A_k^a = 0\,.$$

Аналитическая форма записи принципа возможных перемещений

$$\sum_{k=1}^{n}(F_{kx}^a\delta x_k + F_{ky}^a\delta y_k + F_{kz}^a\delta z_k) = 0\,.$$

Значение принципа возможных перемещений *заключается в том, что он дает общий метод решения задач статики.*

Принцип Даламбера-Лагранжа

При движении механической системы со стационарными идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех активных сил и сил инерции, приложенных к точкам системы, на любом возможном перемещении системы из занимаемого ею в данный момент времени положения равна нулю. Или

$$\sum_{k=1}^{n}\delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n}\delta A_k^{ин} = 0\,.$$

Аналитическая форма записи принципа Даламбера-Лагранжа

$$\sum_{k=1}^{n}(F_{kx}^a + F_{kx}^{ин})\delta x_k + (F_{ky}^a + F_{ky}^{ин})\delta y_k + (F_{kz}^a + F_{kz}^{ин})\delta x_z = 0\,.$$

Значение принципа Даламбера–Лагранжа заключается в том, что он дает общий метод составления уравнений динамики для рассматриваемых нами механических систем.

Обобщенные координаты

Независимые параметры $q_1, q_2, q_3, ..., q_s$ ***любой размерности, единственным образом определяющие положение механической системы, называются обобщенными координатами голономной механической системы.***

Число обобщенных координат, которые описывают движение системы, равно числу степеней свободы s *механической системы*

Уравнения движения системы в обобщенных координатах записываются так же, как и в декартовых координатах и имеют вид (s – число степеней свободы механической системы):

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \quad q_3 = q_3(t), \ldots, \; q_s = q_s(t).$$

Первые производные по времени от обобщенных координат называются обобщенными скоростями (s – число степеней свободы механической системы):

$$\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt}, \quad \dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt}, \quad \dot{q}_3 = \frac{dq_3}{dt}, \ldots, \; \dot{q}_s = \frac{dq_s}{dt}$$

Обобщенные силы и способы их вычисления

Коэффициенты Q_i***, стоящие перед вариациями обобщенных координат в формуле для вычисления полной элементарной работы активных сил, действующих на точки механической системы, называются обобщенными силами.***

$$\delta A^a = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^a \delta \overline{r}_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_s \delta q_s = \sum_{i=1}^{s} Q_i \delta q_i .$$

Чтобы вычислить обобщенную силу Q_1***,*** *нужно дать системе возможное перемещение* δq_1 *и вычислить полную работу всех активных сил на возможных перемещениях их точек приложения, вызванных перемещением* δq_1*. Коэффициент, который появится перед вариацией обобщенной координаты* δq_1 *в формуле виртуальной работы, и будет обобщенной силой* Q_1.

Кроме того, имеют место соотношения:

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}, \quad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}, \; \ldots, \quad Q_s = \frac{\partial U}{\partial q_s}.$$

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}, \quad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}, \; \ldots, \quad Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_s}.$$

То есть, если на механическую систему действует система потенциальных сил, то обобщенные силы равны или первым частным производным от силовой функции U ***или взятым со знаком минус первым частным производным от потенциальной энергии механической системы*** Π ***по соответствующим обобщенным координатам.***

Условия равновесия в обобщенных координатах

Теорема 1. *Для равновесия механической системы со стационарными идеальными геометрическими связями необходимо и достаточно, чтобы обобщенные силы, соответствующие выбранным обобщенным координатам, были равны нулю.*

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \ldots, \; Q_s = 0.$$

Если система имеет одну степень свободы, то условие равновесия состоит из одного уравнения:

$$Q = 0.$$

Теорема 2. Если на механическую систему действует система потенциальных сил, то *для равновесия механической системы со стационарными идеальными геометрическими связями необходимо и достаточно, чтобы первые частные производные от силовой функции или от потенциальной энергии по соответствующим обобщенным координатам, были равны нулю, то есть*

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \ldots, \frac{\partial U}{\partial q_s} = 0 \quad \text{или}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \ldots, \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0.$$

Следовательно, в состоянии равновесия дифференциалы силовой функции и потенциальной энергии равны нулю.

$$dU(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_s) = 0 \quad \text{или} \quad d\Pi(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_s) = 0.$$

Теорема 3. *Итак, для равновесия механической системы со стационарными идеальными геометрическими связями необходимо и достаточно, чтобы полный дифференциал силовой функции или потенциальной энергии системы были равны нулю.*

Общее уравнение динамики в обобщенных координатах или принцип Даламбера–Лагранжа

$$Q_1 + Q_1^{ин} = 0, \quad Q_2 + Q_2^{ин} = 0, \; \ldots, \; Q_s + Q_s^{ин} = 0.$$

Принцип Даламбера – Лагранжа. *При движении механической системы со стационарными, голономными, идеальными связями в каждый момент времени суммы обобщенных активных сил и сил инерции, соответствующих одним и тем же вариациям обобщенных координат, равны нулю.*

Для систем с одной степенью свободы принцип Даламбера – Лагранжа принимает вид:

$$Q + Q^{ин} = 0.$$

Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1,2,3,\ldots,s.$$

§ 3.2. Задачи на применение принципа возможных перемещений

Задача 3.1. Определить взаимосвязь между модулями возможных перемещений $\delta\bar{r}_A$ и $\delta\bar{r}_B$ концов A и B криволинейного стержня, составляющими, соответственно, углы $\alpha = 45^0$ и $\beta = 30^0$ с осью Ax, проходящей через концы стержня.

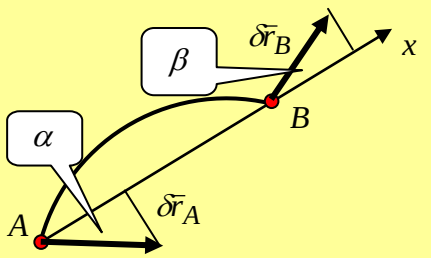


Рис. к задаче 3.1

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из точек A и B. Будем считать, что на движение точек наложена стационарная связь в виде стержня AB. Заданные в условиях задачи элементарные перемещения должны быть совместимы со связью. Обозначим модули истинных и возможных перемещений точек $|d\bar{r}_A| = ds_A$, $|d\bar{r}_B| = ds_B$, $|\delta\bar{r}_A| = \delta s_A$, $|\delta\bar{r}_B| = \delta s_B$ и проведем кинематический анализ движения точек. Элементарные перемещения точек пропорциональны векторам скорости $d\bar{r} = \bar{v}dt$. По теореме о проекциях скоростей, проекции векторов скоростей точек A и B на ось Ax равны $v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta$. Подставляя сюда $v_A = ds_A / dt$, $v_B = ds_B / dt$, получим $ds_A \cos\alpha = ds_B \cos\beta$. Следовательно, и возможные перемещения точек должны удовлетворять аналогичному уравнению $\delta s_A \cos\alpha = \delta s_B \cos\beta$. Отсюда, например, $\delta s_A = \delta s_B \cos\beta / \cos\alpha = 1{,}22$. **Ответ.** $\delta s_A = 1{,}22 \cdot \delta s_B$.

Задача 3.2. Механизм состоит из двух клиньев. Выразить возможное перемещение δs_2 второго клина через возможное перемещение δs_1 первого клина, если $\alpha = 30^0$.

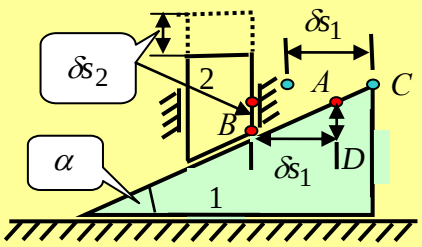


Рис. к задаче 3.2

Решение. Наметим точку A на первом клине и точку B на втором. Дадим первому клину горизонтальное возможное перемещение δs_1, направленное влево. Так как клин при этом перемещается поступательно, все его точки получат такое же перемещение по параллельным горизонтальным траекториям. В частности, $\delta s_C = \delta s_A = \delta s_1$ и равны катету BD треугольника ABD. Второй клин (тоже движется поступательно, но вертикально) при этом поднимается на величину $\delta s_2 = AD$, равную катету треугольника ABD. Это легко увидеть, если через точку A провести горизонтальную прямую до пересечения со вторым клином. Тогда из треугольника ABD получим: $\delta s_2 / \delta s_1 = tg\alpha = tg30 = 0{,}577$. **Ответ.** $\delta s_2 = 0{,}577 \cdot \delta s_1$

Задача 3.3. В кривошипно – шатунных механизмах, показанных на рис. 1 и рис. 2 к задаче, на кривошипы OA действуют пары сил с моментами M_1 и M_2, а на ползуны силы $\bar{G}_1$ и $\bar{G}_2$ (моменты в $H \cdot м$, силы в H). Считая стержни OA, AB и ползун B

невесомыми, найти зависимости между M_1, G_1 и M_2, G_2 в состоянии равновесия механизмов, если $\alpha = 30^0$, $OA = 2м$.

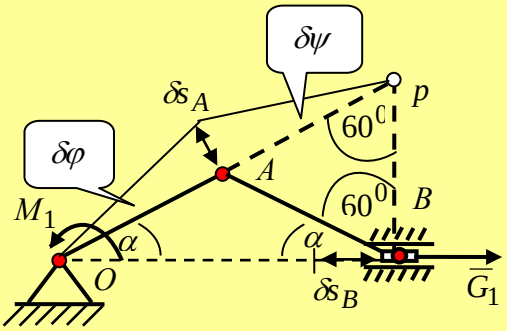


Рис. 1 к задаче 3.3

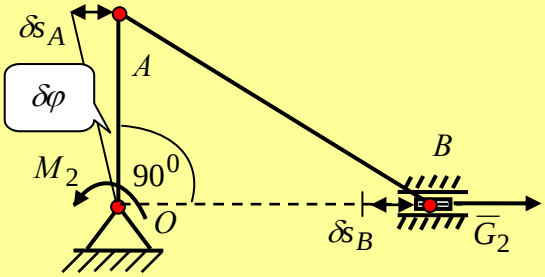


Рис. 2 к задаче 3.3

Решение. Обратимся к первой задаче (рис. 1). Все связи, наложенные на систему стержней, являются идеальными. Воспользуемся принципом возможных перемещений. Дадим системе угловое возможное перемещение $\delta\varphi$ в направлении действующего момента M_1. Проведем кинематический анализ системы. Кривошип OA совершает мгновенный поворот против часовой стрелки вокруг точки O, поэтому вектор мгновенной скорости точки $\bar{v}_A$ изображается в направлении поворота кривошипа перпендикулярно к OA (на рисунке не показан). Шатун AB совершает плоскопараллельное движение. Вектор мгновенной скорости $\bar{v}_B$ (на рис. не показан) направлен по прямой OA (это определяется видом связи – ползун) от точки B к точке O. Восстановив перпендикуляры в точках A и B к векторам скоростей этих точек, определяем положение мгновенного центра скоростей p шатуна. Шатун совершает мгновенный поворот по часовой стрелке относительно точки p. Составим уравнение принципа возможных перемещений: $M_1\delta\varphi - G_1 \cdot PB \cdot \delta\psi = 0$. Знак минус во втором слагаемом объясняется различием в направлении поворота шатуна $\delta\psi$ и в направлении действия момента $M(G) = G_1 \cdot PB$ относительно центра p. Чтобы связать возможные перемещения, вычислим возможное перемещение δs_A двумя способами. $\delta s_A = OA \cdot \delta\varphi = PA \cdot \delta\psi$. Но $OA = PA$. Тогда $\delta\varphi = \delta\psi$ и $M_1 = G_1 \cdot PB = 2G_1(H \cdot м)$.

Обратимся ко второй задаче (рис. 2). Дадим кривошипу угловое перемещение $\delta\varphi$. Кинематический анализ мгновенных перемещений показывает, что в этой задаче вектор $\bar{v}_A$ перпендикулярен к OA и направлен по горизонтали. Поэтому векторы скоростей точек A и B параллельны ($\bar{v}_A \parallel \bar{v}_B$). Следовательно, шатун совершает мгновенно поступательное движение и $\delta s_B = \delta s_A$. Уравнение принципа возможных перемещений принимает вид: $M_2 \cdot \delta\varphi - G_2 \cdot \delta s_B = 0$. $\delta s_B = \delta s_A = OA \cdot \delta\varphi$. Тогда $M_2 \cdot \delta\varphi - G_2 \cdot OA \cdot \delta\varphi = 0$. Отсюда и в этой задаче $M_2 = G_2 \cdot OA = 2 \cdot G_2$. **Ответ.** $M_1 = 2G_1(H \cdot м)$, $M_2 = 2 \cdot G_2(H \cdot м)$.

Задача 3.4. (46.29,[8]). Каркас платформы состоит из Г-образной рамы с промежуточным шарниром C. Верхний конец рамы жестко защемлен в бетонной стене, нижний опирается на цилиндрический подвижный шарнир. Определить реакции защемления при действии сил $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$. Геометрические размеры рамы указаны на рисунке к задаче.

Решение. Имеем плоскую составную раму (состоящую из двух тел – см. рис. 2 к

задаче), находящуюся под действием произвольной плоской системы сил. Все связи – заделка в точке A, цилиндрический шарнир в точке C, подвижный цилиндрический шарнир (опора на катках) в точке В – идеальны.

1. Определение реакции $\bar{X}_A$. Как известно, если освободиться от связи в плоской заделке, появляются три реакции $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$ и m_A. Другими словами, заделанная рама «лишена» трех степеней свободы. **а) Освободим** раму в точке A от одной связи в направлении искомой реакции $\bar{X}_A$. Заделку заменим идеальной связью – ползуном (идеально гладкая направляющая), показанном на рис. 2. У ползуна две реакции – реакция $\bar{Y}_A$ и момент m_A. Эта связь исключает движение в направлении оси Ay и

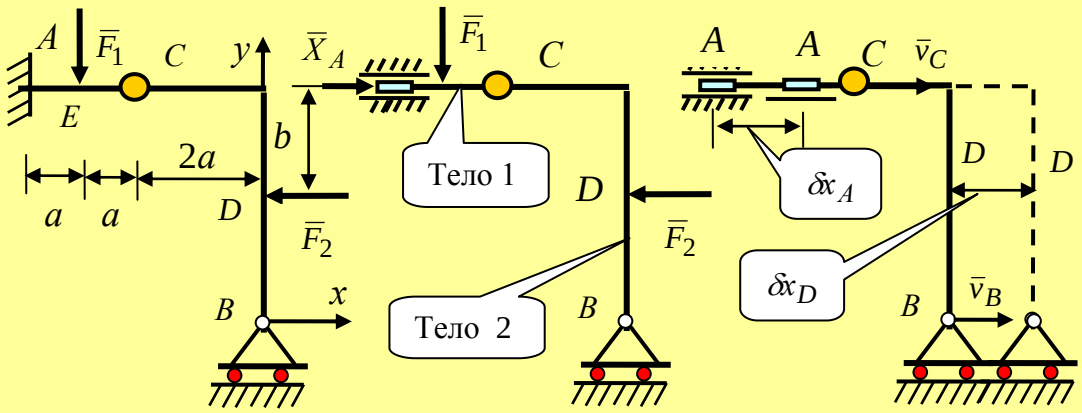


Рис. 1 к задаче 3.4 Рис. 2 к задаче 3.4 Рис. 3 к задаче 3.4

повороты тела 1 вокруг точки A. Новая система связей тоже идеальна. **б) Мысленно дадим точке** приложения искомой реакции бесконечно малое (возможное, виртуальное) перемещение δx_A в направлении действия силы $\bar{X}_A$ (рис. 3). Считая перемещение δx_A известным, **вычислим возможные перемещения точек приложения активных сил.** Поскольку рама превратилась в механизм с одной степенью свободы, то есть в изменяемую механическую систему со связями, перемещения ее точек не могут быть независимыми. Надо проанализировать движение системы, произошедшее из – за перемещения точки A, иначе говоря, произвести кинематический анализ движения системы, состоящей из двух тел. Видим, из-за наложенной в точке A связи первое тело может двигаться поступательно. Перемещения его точек равны перемещению точки A, то есть $\delta x_E = \delta x_C = \delta x_A$. Сложнее проанализировать возможные перемещения точек тела 2. Примем во внимание, что точка C – общая для обоих тел. Движение тоски C уже известно. На рис. 3 показан условно вектор скорости этой точки. Известно и движение точки B. Из – за вида связи она может перемещаться только так, как показано на рис. 3. Отсюда следует, что векторы скорости $\bar{v}_C$ и $\bar{v}_B$ двух точек второго тела параллельны. **То есть тело 2 движется поступательно вдоль оси Bx, и перемещения всех его точек одинаковы.** Тогда $\delta x_D = \delta x_C = \delta x_A$.

в) Составим уравнение принципа возможных перемещений, но предварительно вычислим виртуальные работы активных сил $\bar{X}_A$, $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$: $\delta A(\bar{X}_A) = X_A \cdot \delta x_A, \delta A(\bar{F}_1) = 0$, $\delta A(\bar{F}_2) = -F_2 \cdot \delta x_D$. Виртуальная работа силы $\bar{F}_1$ равна нулю, так как линия действия силы и линия, вдоль которой происходит перемещение точки ее приложения, взаимно перпендикулярны. Виртуальная работа силы $\bar{F}_2$

отрицательна, так как направление действия силы и направление перемещения точки ее приложения прямо противоположны. Уравнение принципа возможных перемещений принимает вид: $X_A \cdot \delta x_A - F_2 \cdot \delta x_D = 0$. Это уравнение содержит два возможных перемещения точек механической системы. Но они не являются независимыми. Так как второе тело «переместилось» поступательно, то $\delta x_D = \delta x_C = \delta x_A$. Принимая δx_A за независимое перемещение и полагая $\delta x_D = \delta x_A$, получим: $X_A \cdot \delta x_A - F_2 \cdot \delta x_D = 0$, $(X_A - F_2) \cdot \delta x_A = 0$. Так как $\delta x_A \neq 0$, то $X_A = F_2$. Итак, горизонтальная реакция в заделке направлена вправо (искомая величина $X_A = F_2$ получилась с «плюсом») и по модулю равна силе F_2.

г) Задачу можно было бы решить, используя и аналитическую запись принципа возможных перемещений. В нашем случае число активных сил $n = 3$ ($\bar{X}_A$, $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$). В принятой на рис. 1 системе координат $\delta x_E = \delta x_D = \delta x_A > 0$, $\delta y_E = \delta y_D = \delta y_A = 0$, $\delta z_E = \delta z_D = \delta z_A = 0$. Проекции сил: $X_{Ax} = X_A$, $X_{Ay} = 0$, $F_{1x} = 0$, $F_{1y} = -F_1$, $F_{2x} = -F_2$, $F_{2y} = 0$. $X_{Az} = F_{1z} = F_{2z} = 0$. Тогда уравнение принципа возможных перемещений принимает вид: $(F_{1x} \cdot \delta x_E + F_{1y} \cdot \delta y_E + F_{1z} \cdot \delta z_E) + (F_{2x} \cdot \delta x_D + F_{2y} \cdot \delta y_D + F_{2z} \cdot \delta z_D) = 0$. Отсюда, с учетом вычисленных ранее проекций: $X_A \cdot \delta x_A - F_2 \cdot \delta x_D = 0$. Но $\delta x_D = \delta x_A$ и тогда $X_A = F_2$. Результаты решений совпали.

2. Определение реакции $\bar{Y}_A$. а) Освободим раму от связи в направлении реакции $\bar{Y}_A$. Жесткую заделку в точке A заменяем ползуном – скользящей заделкой, или по-другому, гладкой направляющей. Действие отброшенной связи (рис. 4). заменяем реакцией $\bar{Y}_A$.

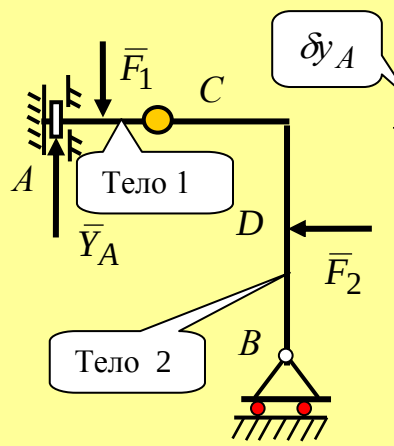


Рис. 4 к задаче 3.4

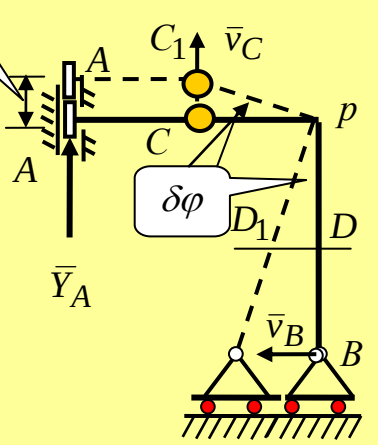


Рис. 5 к задаче 3.4

б) Дадим точке A из исходного состояния бесконечно малое перемещение в направлении искомой реакции $\bar{Y}_A$ (рис. 5). Так как в ползуне повороты отсутствуют, то тело 1 совершит поступательное движение и займет бесконечно близкое к исходному положение. Тогда, в частности, $\delta y_A = \delta y_E = \delta y_C$. Нужно еще найти перемещение точки D, где приложена сила $\bar{F}_2$, то есть надо знать движение тела 2. Проведем кинематический анализ движения тела 2. Точка C – общая для двух тел, поэтому ее элементарное возможное перемещение известно и показано на рис. 5. Следовательно, вектор скорости этой точки направлен по возможному перемещению строго вертикально вверх. Допустимым перемещением для точки B (катка) является параллельное основанию перемещение точки B влево или вправо от исходного положения. Если воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела применительно к точкам C и B (проекции векторов скоростей двух точек тела на ось,

проходящую через эти точки равны) и считать уже известным направление вектора $\bar{v}_C$, то вектор $\bar{v}_B$ будет направлен по оси Bx влево (рис. 5). Мгновенный центр скоростей p определяется как точка пересечения перпендикуляров, восстановленных к векторам скоростей $\bar{v}_C$ и $\bar{v}_B$ в точках C и B в их исходном положении. **Следовательно, если точке A дать возможное перемещение δy_A, то тело 2 повернется относительно точки p на бесконечно малый угол $\delta\varphi$** (рис.5)**.** Таким образом, возможные перемещения точек приложения активных сил установлены. **в) Вычислим** виртуальные работы активных сил $\bar{Y}_A$, $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, и составим уравнение принципа возможных перемещений: $\delta A(\bar{Y}_A) = Y_A \cdot \delta y_A$, $\delta A(\bar{F}_1) = -F_1 \cdot \delta y_E$, $\delta A(\bar{F}_2) = F_2 \cdot DD_1 = F_2 \cdot b \cdot \delta\varphi$. Уравнение (12.16) принимает вид: $Y_A \cdot \delta y_A - F_1 \cdot \delta y_E + F_2 \cdot b \cdot \delta\varphi = 0$. Здесь $F_2 \cdot b$ – алгебраический момент силы $\bar{F}_2$ относительно мгно-венно неподвижной точки p.

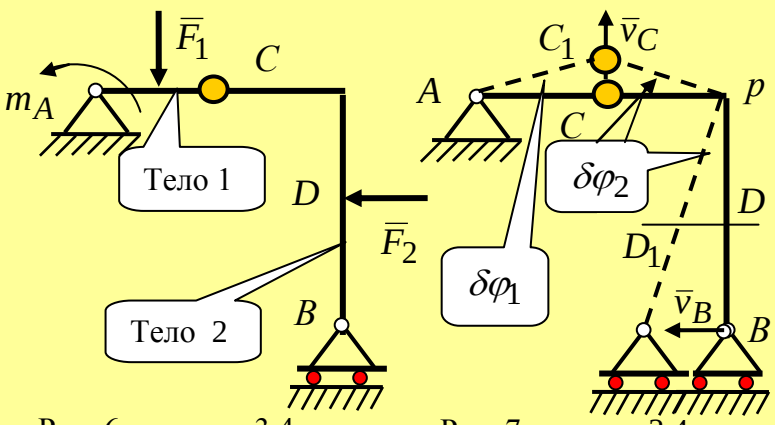


Рис. 6 к задаче 3.4 Рис. 7 к задаче 3.4

Рассматриваемая механическая система (рама без одной связи – рис.5) имеет одну степень свободы. Следовательно, виртуальные перемещения δy_A, δy_E, $\delta\varphi$ связаны между собой и могут быть выражены через одну из них. За независимую вариацию примем $\delta\varphi$, а $\delta y_A = \delta y_E = \delta y_C$. С другой стороны, $\delta y_C = 2a \cdot \delta\varphi$. Тогда $\delta y_A = \delta y_E = 2a \cdot \delta\varphi$. Уравнение (12.16) принимает вид: $(Y_A \cdot 2a - F_1 \cdot 2a + F_2 \cdot b) \cdot \delta\varphi = 0$. Так как $\delta\varphi \neq 0$, то $Y_A \cdot 2a - F_1 \cdot 2a + F_2 \cdot b = 0$. Отсюда $Y_A = F_1 - F_2 \cdot b / 2a$.

3. **Определение m_A – момента реактивной пары сил в заделке. а)Освободим точку A** от одной связи, и действие отброшенной связи заменим моментом пары m_A (рис. 6). Действию пары сил с моментом m_A соответствует угловое перемещения $\delta\varphi_1$, направленное по направлению действия m_A. Тело 1 поворачивается относительно неподвижной точки A на угол $\delta\varphi_1$. При этом точка C получает линейное возможное перемещение $CC_1 = \delta y_C$, перпендикулярное исходному положению отрезка AC. Проанализируем теперь возможные движения точек второго тела. Точка C – общая для тел. Следовательно, мгновенный вектор скорости $\bar{v}_C$ направлен по CC_1. Как будут перемещаться другие точки тела 2 пока не известно, но известно возможное перемещение точки B, которое определяется наложенной в этой точке связью. Во – первых, возможными являются только горизонтальные перемещения точки B. Во-вторых, по теореме о проекциях скоростей можно утверждать, что при известном направлении вектора $\bar{v}_C$ точка B может переместиться только влево, как показано на рис. 7. Следовательно, тело 2 поворачивается на элементарный угол $\delta\varphi_2$ относительно

мгновенного центра скоростей p. Геометрическая картина возможных перемещений системы показана на рис.7.

б) Вычислим виртуальные работы активных сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ и реактивного момента m_A и составим уравнение равновесия принципа возможных перемещений (см. рисунки 6 и 7). Работу сил вычислим через работу моментов, которые сила $\overline{F}_1$ создает относительно неподвижной точки A и сила $\overline{F}_2$ относительно мгновенно неподвижной точки p: $\delta A(m_A) = +m_A \cdot \delta\varphi_1$, $\delta A(\overline{F}_1) = -F_1 a \cdot \delta\varphi_1$, $\delta A(\overline{F}_2) = +F_2 b \cdot \delta\varphi_2$.
в) Запишем уравнение принципа возможных перемещений: $m_A \cdot \delta\varphi_1 - F_1 a \cdot \delta\varphi_1 + F_2 b \cdot \delta\varphi_2 = 0$. Выразим одно возможное перемещение через другое. С одной стороны, $\delta y_C = 2a \cdot \delta\varphi_1$, с другой стороны $\delta y_C = 2a \cdot \delta\varphi_2$. Отсюда получим $\delta\varphi_1 = \delta\varphi_2$. В качестве независимой вариации примем $\delta\varphi_2$. Теперь уравнение принципа возможных перемещений принимает вид: $(m_A - F_1 a + F_2 b) \cdot \delta\varphi_2 = 0$. Так как, $\delta\varphi_2 \neq 0$, то $m_A - F_1 a + F_2 b = 0$. Отсюда $m_A = F_1 a - F_2 b$.

4. Определение реакции подвижного шарнира в точке B. а) Реакция подвижного шарнира показана на рис. 8 к задаче. Удаление связи в точке B с последующей заменой ее одной единственной реакцией $\overline{Y}_B$ делает точку B свободной, а систему изменяемой механической системой. Система должна находиться в равновесии под действием активных сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ и реакции $\overline{Y}_B$.

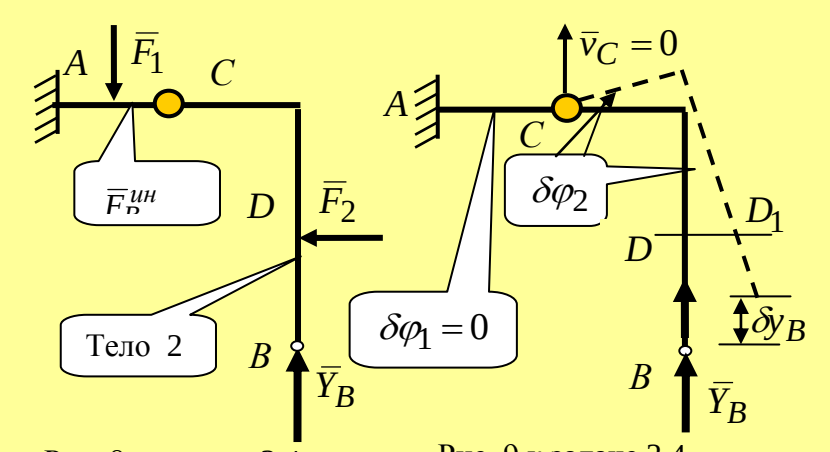


Рис. 8 к задаче 3.4 Рис. 9 к задаче 3.4

б) Дадим точке B возможное перемещение δy_B в направлении искомой реакции связи. В силу малости перемещений точек и поворотов тела возможное перемещение точки δy_B можно принять вдоль вертикального элемента рамы. На рис. 9 к задаче дана увеличенная картина перемещений точек системы. Тело 1 неподвижно из-за наложенной в точке A связи - заделки. Тело 2 поворачивается на бесконечно малый угол $\delta\varphi_2$ относительно неподвижного цилиндрического шарнира C. Поэтому работы активных сил удобнее вычислять по формулам работ их алгебраических моментов относительно точки C. Тогда $\delta A(Y_B) = +Y_B 2a \cdot \delta\varphi_2$, $\delta A(\overline{F}_1) = 0$, $\delta A(\overline{F}_2) = -F_2 b \cdot \delta\varphi_2$. Работа силы $\overline{F}_1$ равна нулю, так как ее точка приложения неподвижна. Складывая виртуальные работы, получим уравнение равновесия принципа возможных перемещений: $(Y_B 2a - F_2 b) \cdot \delta\varphi_2 = 0$. Так как $\delta\varphi_2 \neq 0$, то $Y_B 2a - F_2 b = 0$. Отсюда $Y_B = F_2 b / 2a$.

Проверка. Проверим решение, записав известные из статики условия равновесия произвольной плоской системы сил, показанной на рис.10 к задаче. Спроецируем все силы на оси Ax, Ay и составим уравнение моментов относительно точки C. Итак,

$$1.\ \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0: \quad X_A - F_2 = 0. \quad \text{Или} \quad X_A = F_2.$$

Что совпадает с полученным выше результатом.

$$2.\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0: \ Y_A - F_1 + Y_B = 0. \qquad \text{Или} \qquad F_1 - F_2 \cdot b/2a - F_1 + F_2 b/2a = 0.$$

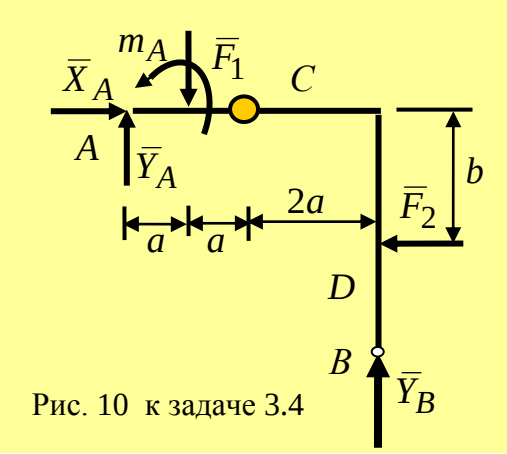


Рис. 10 к задаче 3.4

Следовательно, найденные значения реакций Y_A, Y_B удовлетворяют уравнению равновесия.

$$3.\ \sum_{k=1}^{n} m_C(\bar{F}_k) = 0:$$

$$m_A - Y_A 2a + F_1 \cdot a - F_2 \cdot b + Y_B \cdot 2a = 0.$$

Подставляя в это уравнение найденные значения реакций и момента, видим, что оно удовлетворяется:

$$F_1 a - F_2 b - F_1 2a + F_2 b + F_1 a - F_2 b + F_2 b = 0.$$

Вывод. Реакции найдены правильно. **Ответ :** $X_A = F_2, Y_A = F_1 - F_2 \cdot b/2a$, $m_A = F_1 a - F_2 b$, $Y_B = F_2 b/2a$.

§ 3.3. Задачи на применение общего уравнения динамики

Задача 3.5. (47.1, [8]). Три груза массой $m(кг)$ каждый соединены нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижный блок массой $0{,}5m$. Два груза лежат на гладкой горизонтальной плоскости, а третий подвешен вертикально. Определить величину ускорения системы и натяжение нити между грузами, лежащими на горизонтальной плоскости.

Решение. 1. Определим ускорение. Для решения задачи воспользуемся общим уравнением динамики. Механическая система с действующими на нее силами показана на рис. 1 к задаче. Все связи, наложенные на механическую систему, – идеально гладкая плоскость и подшипник блока – являются идеальными связями. $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$ – силы тяжести тел, $\bar{N}_1, \bar{N}_2$ – реакции идеально гладкой плоскости, $\bar{P}_4, \bar{N}_4$ – вес блока и

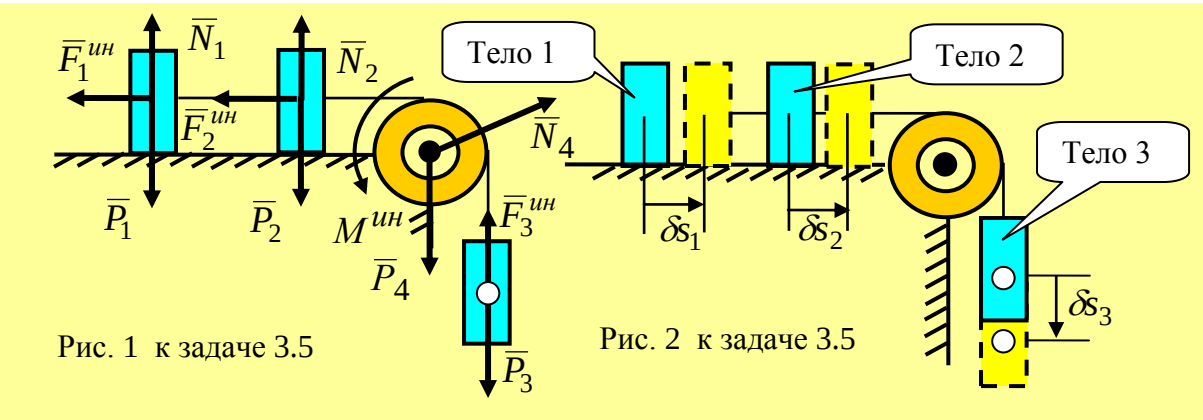


Рис. 1 к задаче 3.5

Рис. 2 к задаче 3.5

реакция его подшипника соответственно. $M^{ин}$ – главный момент сил инерции блока во вращательном движении. $\overline{F}_1^{ин}, \overline{F}_2^{ин}, \overline{F}_3^{ин}$ – равнодействующие сил инерции тел. Так как тела движутся поступательно, они приложены в центре масс тел и должны быть направлены против векторов ускорения $\overline{a}$ точек их приложения. Направление сил инерции и главного момента сил инерции блока показаны на рис. 1 к задаче в предположении, что груз 3 движется вниз. По условию задачи $P_1 = P_2 = P_3 = P = mg$, где g – ускорение свободного падения. На рис. 1 система показана в произвольный момент времени (мысленно остановлена). Дадим системе из этого положения возможное перемещение. Тела пройдут путь δs, блок повернется на угол $\delta\varphi$ (рис. 2 к задаче). При этом $\delta s = r\delta\varphi$. Следовательно, система имеет одну степень свободы.

Вычислим работу приложенных к системе активных сил на возможных перемещениях их точек приложения. Работа активных сил тяжести $\overline{P}_1, \overline{P}_2$ равна нулю, так как линии действия этих сил перпендикулярна к линии перемещения точек их приложения. По тем же причинам равны нулю и работы реакций связей $\overline{N}_1, \overline{N}_2, \overline{N}_4$. Их вообще можно было не показывать, так как в общее уравнение динамики работа реакций идеальных связей не входит. Они здесь показаны лишь для того, чтобы еще раз на практике проиллюстрировать справедливость положений, использованных при выводе общего уравнения динамики. Работа силы тяжести $\overline{P}_4$ тоже равна нулю, так как точка ее приложения неподвижна (нет перемещения). Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a = P_3 \delta s .$$

Запишем работу сил инерции тел на своих перемещениях и момента сил инерции блока на возможном повороте блока.

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{ин} = -F_1^{ин}\delta s - F_2^{ин}\delta s - F_3^{ин}\delta s - M^{ин} \cdot \delta\varphi .$$

Так как массы тел равны и связаны они нерастяжимой нитью, то модули сил и момента инерций $F_1^{ин} = F_2^{ин} = F_3^{ин} = ma$, $M^{ин} = J \cdot \varepsilon$. Здесь J, ε – осевой момент инерции блока относительно оси вращения, проходящей через ось блока, перпендикулярно к плоскости рисунка, и угловое ускорение блока. Так как между нитью и блоком нет проскальзывания, то касательные ускорения a_τ точек блока и искомые ускорения a точек нити равны: $a_\tau = \varepsilon \cdot r = a$. Отсюда $\varepsilon = a/r$. Момент инерции блока вычислим, считая его однородной круглой пластиной постоянной толщины и радиуса r. Тогда (см. приложение) $J = m_4 \cdot r^2/2 = m \cdot r^2/4$. Кроме того, $\delta\varphi = \delta s / r$. Общее уравнение динамики принимает вид:

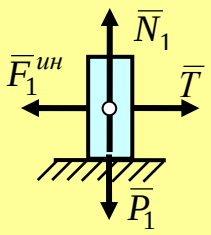


Рис. 3 к задаче 3.5

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{ин} = P_3\delta s - F_1^{ин}\delta s - F_2^{ин}\delta s - F_3^{ин}\delta s - M^{ин} \cdot \delta\varphi = 0.$$

Или $mg\delta s + (-3 \cdot ma - \frac{mr^2}{4} \cdot \frac{a}{r} \cdot \frac{1}{r}) \cdot \delta s = 0$. Отсюда ускорение $a = \frac{1}{3{,}25} \cdot g$ (м/с^2). С таким ускорением будут двигаться тела 1,2,3, совершающие поступательное движение. Блок

вращается с угловым ускорением $\varepsilon = a/r = g/3{,}25r(c^{-2})$.

2. Определим силу натяжения нити между первым и вторым телами. Пользуясь принципом освобождаемости от связей, освободим мысленно первое тело от гибкой нити и заменим ее реакцией нити $\overline{T}$ (рис. 3 к задаче). Теперь сила $\overline{T}$ – внешняя по отношению к телу 1. Дадим телу возможное перемещение, как в первом пункте, и составим общее уравнение динамики для первого тела. Оно примет вид: $-ma\cdot\delta s + T\cdot\delta s = 0$. «Отрицательность» работы силы инерции объясняется тем, что направление действия силы инерции и перемещение ее точки приложения прямо противоположны. Тогда $T = ma = mg/3{,}25(\text{Н})$. **Ответ.** $a = 1/3{,}25g(\text{м/с}^2)$, $\varepsilon = g/3{,}25r(c^{-2})$, $T = mg/3{,}25(\text{Н})$.

Задача 3.6. (47.5, [8]). К системе блоков, изображенной на рис. 1 к задаче, подвешены грузы M_1 массой $m_1 = 10$кг и M_2 массой $m_2 = 8кг$. Определить величину ускорения a_2 груза M_2 и натяжение нити T, пренебрегая массами блоков.

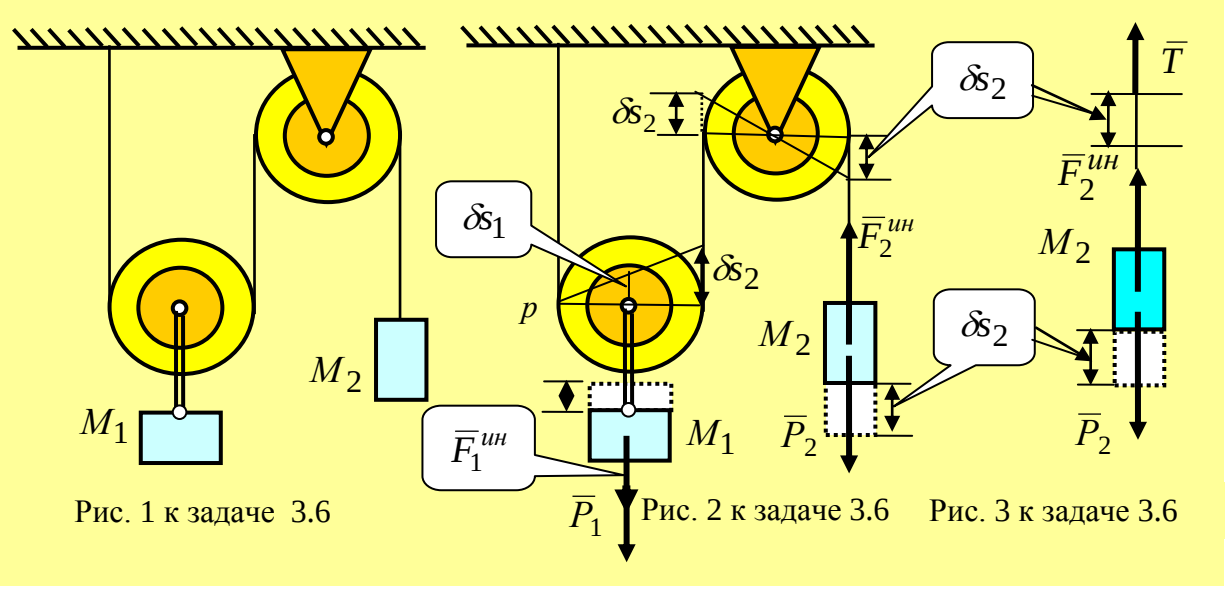


Рис. 1 к задаче 3.6 Рис. 2 к задаче 3.6 Рис. 3 к задаче 3.6

Решение. Механическая система изображена на рис. 1 к задаче. Дадим второму телу, которое движется поступательно, возможное перемещение δs_2, направленное вертикально вниз (рис. 2) и проведем кинематический анализ движения системы. Невесомый неподвижный блок без изменений передает силы и перемещения. Подвижный блок вращается против часовой стрелки относительно мгновенного центра скоростей (МЦС) блока – точки p. Перемещение центра блока $\delta s_1 = \delta s_2/2$. Тело 1, двигаясь поступательно, получает перемещение $\delta s_1 = \delta s_2/2$, направленное вверх, сила инерции тела направлена вниз. Общее уравнение динамики типа получает вид: $(-P_1 - F_1^{ин})\cdot\delta s_2/2 + (P_2 - F_2^{ин})\cdot\delta s_2 = 0$. Отсюда $-0{,}5m_1g + m_2g - 0{,}5m_1a_1 - m_2a_2 = 0$. Так как $a_1 = 0{,}5a_2$. Тогда $a_2 = g(m_2 - 0{,}5m_1)/(0{,}25m_1 + m_2)$ $= 9{,}81(8 - 0.5\cdot 10)/(0{,}25\cdot 10 + 8) = 2{,}8\text{м/с}^2$. $a_2 = 2{,}8м/с^2$. Теперь определим величину натяжения нити T. Освободим второе тело от связи. Тогда реакция связи $\overline{T}$ становится внешней активной силой. Общее уравнение динамики для второго тела

записывается так: $-T\cdot\delta s_2 - m_2 a_2\cdot\delta s_2 + m_2 g\cdot\delta s_2 = 0$. Отсюда $T = m_2 g - m_2 a_2 = 56{,}08H$. **Ответ.** $a_2 = 2{,}8$м/с^2, $T = 56{,}1$Н.

Задача 3.7. (47.12, [8]). Груз B массой M_1 приводит в движение цилиндрический каток A массы M_2 и радиуса r при помощи нити, намотанной на каток (рис. 1). Определить ускорение груза B, если каток катится без скольжения, а коэффициент трения качения равен f_k. Массой блока D пренебречь.

Решение. Дадим грузу B возможное перемещение δs_B, направленное вниз. Груз совершит поступательное движение. Каток A совершает мгновенно поворотное движение на угол $\delta\varphi$ относительно мгновенного центра скоростей p. Общее уравнение динамики: $P_1\cdot\delta s_B - F_1^{ин}\cdot\delta s_B - F_A^{ин}\cdot\delta s_C - M^{ин}\cdot\delta\varphi - M_{тр}\cdot\delta\varphi = 0$. Рассматривая мгновенное движение системы, получаем: $\delta s_B = 2r\cdot\delta\varphi$, $\delta s_C = r\cdot\delta\varphi$, $F_1^{ин} = aM_1$, $F_A^{ин} = a_C M_2 = a\cdot M_2/2$, $M^{ин} = J_{Cz}\varepsilon = (M_2 r^2/2)\cdot(a/2r)$, $M_{тр} = Gf_k = gM_2 f_k$. Подставляя все величины в общее уравнение динамики, будем иметь: $gM_1 2r\delta\varphi - aM_1 2r\delta\varphi - aM_2 r\delta\varphi/2 - (M_2 r^2/2)\cdot(a/2r)\delta\varphi - gM_2 f_k\delta\varphi = 0$.

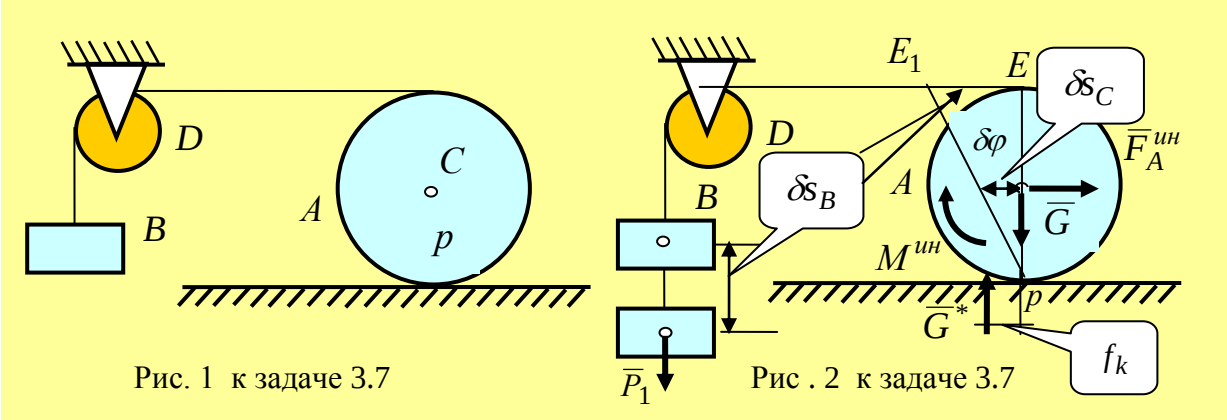


Рис. 1 к задаче 3.7 Рис . 2 к задаче 3.7

После сокращения на $\delta\varphi \neq 0$ получим: $a\cdot r\cdot(8M_1 + 3M_2)/4 = 2r\cdot gM_1 - gf_k M_2$. **Ответ.** $a = 8g(M_1 - f_k M_2/2r):(8M_1 + 3M_2)$.

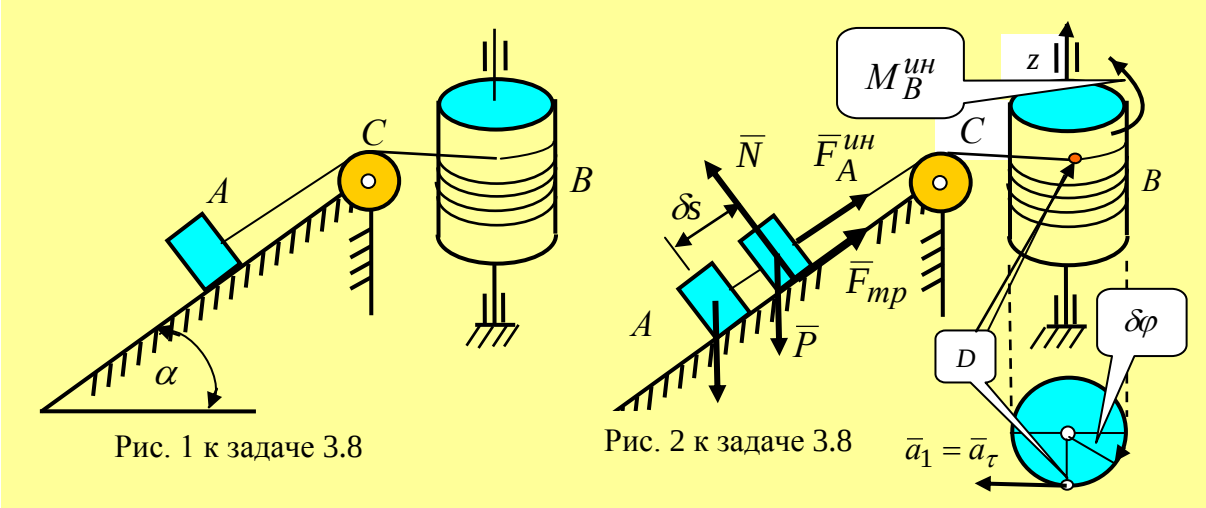


Рис. 1 к задаче 3.8 Рис. 2 к задаче 3.8

Задача 3.8. (47.9, [8]). Груз A массой M_1, опускаясь по наклонной шероховатой плоскости с коэффициентом трения f, расположенной под углом α к горизонту, приводит во вращение посредством нерастяжимой нити барабан B массы M_2 и радиуса r. Определить угловое ускорение барабана, если считать барабан однородным круглым цилиндром. Массой неподвижного блока C и нити пренебречь.

Решение. Дадим телу A возможное перемещение величиной δs (см. рис. 2). Работа силы тяжести и силы инерции груза равны $\delta A_P = +M_1 g \cdot h = +M_1 g \cdot \delta s \cdot \sin\alpha$, $\delta A^{ин} = -M_1 a_1 \cdot \delta s$, где a_1 – величина полного ускорения центра масс тела A. Пусть при перемещении груза на δs барабан поворачивается на угол $\delta\varphi$. Тогда $\delta s = r \cdot \delta\varphi$. Момент сил инерции точек барабана равен: $M_z^{ин} = J_z \varepsilon$, где $J_z = 0{,}5 \cdot M_2 r^2$. Работа момента сил инерции вычисляется по формуле: $\delta A_M = -M_z^{ин} \cdot \delta\varphi$. В нашем случае $\delta A_M = -0{,}5 \cdot M_2 r^2 \varepsilon \cdot \delta\varphi = -0{,}5 \cdot M_2 r \varepsilon \cdot \delta s$. Общее уравнение динамики принимает вид: $\delta A_P + \delta A^{ин} + \delta A_M = 0$. Подставляя сюда выражения работ сил и момента, после сокращения на перемещение δs получаем: $M_1 g \cdot \sin\alpha - M_1 a_1 - 0{,}5 \cdot M_2 r \varepsilon = 0$. Но величина полного ускорения тела A равна величине касательного ускорения точки D барабана, то есть $a_1 = a_\tau$. Тогда $a_1 = r\varepsilon$ и уравнение принимает вид: $M_1 g \cdot \sin\alpha - M_1 r\varepsilon - 0{,}5 \cdot M_2 r\varepsilon = 0$. Отсюда $\varepsilon = 2M_1 g \sin\alpha / r(2M_1 + M_2)$.

Ответ. $\varepsilon = 2M_1 g \sin\alpha / r(2M_1 + M_2)$.

Задача 3.9. Призма A весом P скользит по гладкой боковой поверхности призмы B весом G, образующей угол α с горизонтом. Определить ускорение призмы B. Трением между призмой B и горизонтальной плоскостью пренебречь.

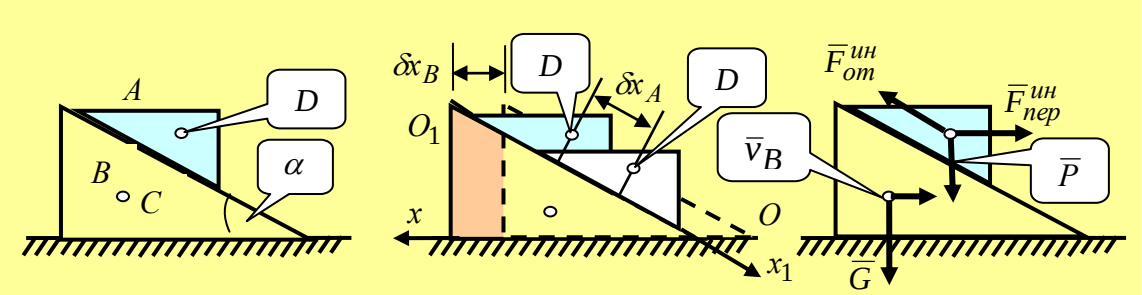


Рис. 1 к задаче 3.9 Рис. 2 к задаче 3.9 Рис. 3 к задаче 3.9

Решение. В этой задаче рассматривается система с двумя степенями свободы. Механическая система состоит из двух призм, показанных на рис. 1. На систему действуют активные силы тяжести $\overline{P}, \overline{G}$. Призма A совершает сложное движение – относительное движение по «щеке» призмы B и переносное движение вместе с призмой B. Связи, наложенные на систему, идеальны. Оба тела совершают поступательное движение, поэтому положение тела B можно определить, например, абсциссой x_C центра масс призмы B в системе координат Ox. Положение призмы A абсциссой x_D центра тяжести призмы A, в подвижной системе координат O_1x_1. Чтобы возможное перемещение призмы B было положительным (рис. 2), ось Ox направлена влево. Координаты x_C и x_D независимы между собой. У механических

систем с геометрическими связями число независимых координат, определяющих положение системы, совпадает с числом степеней свободы. Следовательно, рассматриваемая механическая система имеет две степени свободы, и у системы два независимых возможных перемещения, например, перемещения центров тяжестей призм δx_C и δx_D. Так как призмы движутся поступательно (рис. 2), их можно назвать возможными перемещениями призм, т.е. $\delta x_C = \delta x_B$, $\delta x_D = \delta x_A$. Величину ускорения призмы B обозначим через a_B. Все точки этой призмы имеют такую же величину ускорения. Значения переносного и относительного ускорений призмы A обозначим $a_A^{пер}$ и $a_A^{от}$, соответственно. При этом переносным ускорением для точек призмы A является ускорение точек призмы B. Следовательно, $a_A^{пер} = a_B$. Силы инерции отдельных точек тела при поступательном движении тела приводятся к центру тяжести тела (см. принцип Даламбера). В этой задаче они показаны на рис. 3. По величине они равны: $F_B^{ин} = Ga_B / g$, $F_{пер}^{ин} = Pa_A^{пер} / g = Pa_B / g$, $F_{отн}^{ин} = Pa_A^{от} / g$.

Пусть система получила возможное перемещение $\delta x_B = \delta x_C \neq 0$, $\delta x_A = \delta x_D = 0$. Другими словами, призма B получила перемещение, а призма A неподвижна относительно призмы B. Общее уравнение динамики получит вид:

$$-F_B^{ин} \cdot \delta x_B - F_{пер}^{ин} \cdot \delta x_B + F_{отн}^{ин} \cdot cos\alpha \cdot \delta x_B = 0.$$

При этом виртуальная работа сил тяжести равна нулю, так как они перпендикулярны направлению перемещения. Тогда $(-Ga_B / g \quad -Pa_B / g + \quad Pa_A^{от} \cdot cos\alpha / g) \cdot \delta x_B = 0.$

Отсюда $$a_A^{от} = (P+G)a_B / P\cos\alpha. \qquad (1)$$

Теперь дадим системе возможное перемещение $\delta x_B = \delta x_C = 0$, $\delta x_A = \delta x_D \neq 0$. Общее уравнение динамики принимает вид:

$$P\delta x_A \sin\alpha - F_{отн}^{ин}\delta x_A + F_{пер}^{ин}\delta x_A \cos\alpha = 0 \quad \text{или} \quad P\sin\alpha - P \cdot a_A^{от} / g + Pa_B \cos\alpha / g = 0.$$

Отсюда $$a_A^{отн} = g \cdot \sin\alpha + a_B \cdot \cos\alpha. \qquad (2)$$

Сравнивая формулы (1), (2) для ускорения $a_A^{от}$, находим ускорение a_B.

Ответ. $a_B = Pg \cdot \sin 2\alpha / 2(G + P\sin^2\alpha)$.

§ 3.4. Уравнение Лагранжа второго рода

Механические системы с одной степенью свободы

Задача 3.10. Для кулисного механизма, показанного на рис. 1 к задаче, определить обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате $q = \varphi(t)$, если $OA = l$, $OB = b$.

Решение. 1 – й способ. Механическая система состоит из рычага OA, совершающего вращательное движение относительно оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка, и стержня DC, совершающего поступательное движение. Как показано выше, связи, наложенные на систему, идеальны (в подшипнике O, ползуне C, в направляющей B трение отсутствует). Активными силами, действующими на систему, являются силы $\overline{F}_1, \overline{F}_2$, действующие по оси стержня DC и перпендикулярно к рычагу OA соответственно. Система имеет одну степень

свободы. Ее положение на плоскости определяется одной обобщенной координатой q. По условию задачи за обобщенную координату q выберем угол поворота рычага $\varphi(t)$. Для определения обобщенной силы Q вычислим полную виртуальную работу активных сил на возможных перемещениях системы $\delta A^a = \delta A(\overline{F}_1) + \delta A(\overline{F}_2)$. То есть надо вычислить работу силы $\overline{F}_1$ на виртуальном (возможном) перемещении точки D, работу силы $\overline{F}_2$ на виртуальном перемещении точки A и сложить. Следовательно, нужно найти перемещения точек, в которых приложены активные силы $\overline{F}_1, \overline{F}_2$. Виртуальную работу отдельных сил вычисляем по формулам: $\delta A(\overline{F}_1) = F_1 \cdot \delta s_D \cdot \cos\alpha_1$, $\delta A(\overline{F}_2) = F_2 \cdot \delta s_A \cdot \cos\alpha_2$. Здесь $\delta s_D, \delta s_A$ – вариации соответствующих криволинейных координат точек, α_1, α_2 – углы между направлением вектора силы и вектором перемещения точки. Дадим механической системе возможное перемещение $\delta\varphi$, как показано на рис. 2 к задаче. Точка D стержня, где приложена сила $\overline{F}_1$, совершит вертикальное перемещение, что связано с видом связи B. Так как рассматриваются возможные перемещения точек системы (то есть бесконечно малые), то перемещение точки C рычага происходит по касательной к траектории – по касательной к окружности радиуса $r = OC$. Точка C

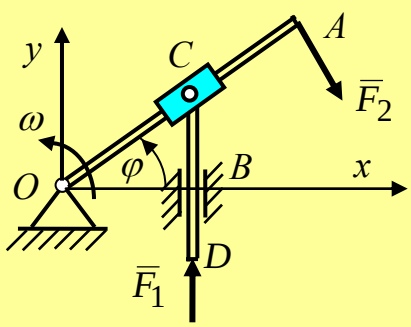


Рис. 1 к задаче 3.10

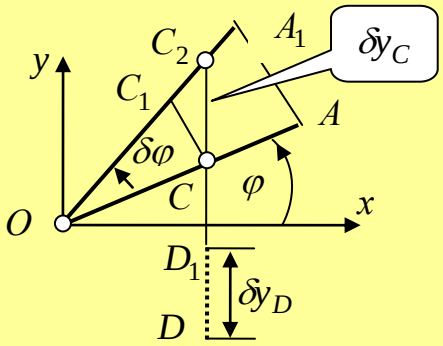


Рис. 2 к задаче 3.10

рычага при его бесконечно малом повороте перейдет в точку C_1, $\angle OCC_1 = 90^0$. Точка A рычага, где приложена сила $\overline{F}_2$, при его бесконечно малом повороте перейдет в точку A_1, $\angle OAA_1 = 90^0$. Точка C ползуна движется прямолинейно параллельно оси Oy и переходит в точку C_2, так как ползун связан и со стержнем CD, совершающим прямолинейное поступательное движение. В таких случаях вариации криволинейных координат и вариации декартовых координат совпадают $\delta s_D = \delta s_C = \delta y_D = \delta y_C$, $\delta y_D = DD_1 = CC_2 = \delta y_C$. Тогда полная работа $\delta A^a = F_1 \delta y_D - F_2 \cdot \delta s_A$. Здесь $\delta y_D = DD_1, \delta s_A = AA_1$ – вариации функций координат соответствующих точек. Так как система имеет одну степень свободы, то $\delta y_D, \delta s_A$ должны быть связаны между собой. Выразим их через перемещение $\delta\varphi$, которое мы приняли за основное (независимое) перемещение. $\delta s_A = OA \cdot \delta\varphi = l \cdot \delta\varphi$. Эта величина вычислена как бесконечно малая длина дуги окружности радиуса l, охватывающая угол $\delta\varphi$. Так же вычисляется длина

отрезка $CC_1 = OC \cdot \delta\varphi$. Из ΔC_1CC_2 определим $\delta y_D = CC_2 = CC_1/\cos\varphi$ = $OC \cdot \delta\varphi/\cos\varphi$. Величина OC пока не известна, но может быть вычислена из ΔOBC: $OB/OC = cos\varphi$, $OC = OB/\cos\varphi = b/\cos\varphi$. Тогда $\delta y_D = b\delta\varphi/\cos^2\varphi$ и $\delta A^a = F_1\delta y_D - F_2 \cdot \delta s_A =$ $bF_1 \cdot \delta\varphi/\cos^2\varphi$ – $lF_2 \cdot \delta\varphi$. Из уравнения полной работы сил на возможном перемещении следует:

$$\delta A^a = (F_1 \frac{b}{\cos^2\varphi} - F_2 \cdot l) \cdot \delta\varphi \text{ . Следовательно, } \quad Q = F_1 \frac{b}{\cos^2\varphi} - F_2 \cdot l .$$

2 – й способ. Работу каждой активной силы будем определять аналитически по формуле: $\delta A = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z$. Вычислим работу силы $\overline{F}_1$. $F_{1x} = 0$, $F_{1y} = F_1$, $F_{1z} = 0$. Запишем уравнения движения точки C стержня CD. $x_C = 0$, $y_C = b \cdot \mathrm{tg}\varphi$. Варьирование функции выполняется формально как дифференцирование, считая аргумент t постоянной величиной. Тогда $\delta x_C = 0$, $\delta y_C = (b/\cos^2\varphi) \cdot \delta\varphi$. Учитывая, что $\delta y_D = \delta y_C$ – виртуальная работа силы $\delta A(\overline{F}_1) = F_y\delta y_C = F_1(b/\cos^2\varphi) \cdot \delta\varphi$.

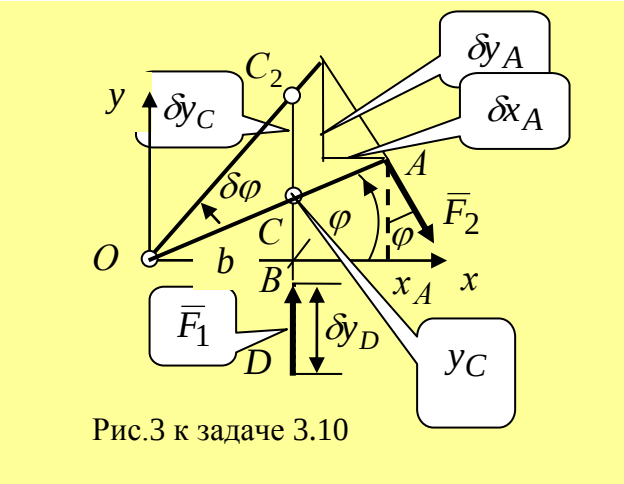


Рис.3 к задаче 3.10

Вычислим виртуальную работу силы $\overline{F}_2$. По рис. 3 видно, что $F_{2x} = +F_2 \cdot \sin\varphi$, $F_{2y} = -F_2 \cdot \cos\varphi$, $F_{2z} = 0$. Уравнения движения точки A: $z_A = 0$, $x_A = l \cdot \cos\varphi$, $y_A = l \cdot \sin\varphi$. Тогда $\delta x_A = -l \cdot \sin\varphi \cdot \delta\varphi$, $\delta y_A = l \cdot \cos\varphi \cdot \delta\varphi$, $\delta z_A = 0$.

Виртуальная работа силы равна:

$$\delta A(\overline{F}_2) = F_{2x}\delta x_A + F_{2y}\delta y_A =$$

$$-F_2 l \cdot \sin^2\varphi \cdot \delta\varphi \; - F_2 l \cdot \cos^2\varphi \cdot \delta\varphi$$

$$= -F_2 l(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\delta\varphi = \; -F_2 l \cdot \delta\varphi .$$

Полная виртуальная работа $\delta A^a = \delta A(\overline{F}_1) + \delta A(\overline{F}_2) \; = (F_1 \frac{b}{\cos^2\varphi} - F_2 \cdot l) \cdot \delta\varphi$, что совпадает с полученным ранее значением.

Ответ. $\delta A^a = (F_1 \frac{b}{\cos^2\varphi} - F_2 \cdot l) \cdot \delta\varphi$ и $Q = F_1 \frac{b}{\cos^2\varphi} - F_2 \cdot l$.

Задача. 3.11 (47.13 [8]). Стержень DE массы M_1 лежит на трех катках массы M_2 каждый (рис. 1). К стержню приложена по горизонтали вправо сила $\overline{F}$, приводящая в движение и катки. Скольжение между стержнем и катками и также между катками и горизонтальной плоскостью отсутствует. Найти значение ускорения a стержня DE. Катки считать однородными круглыми цилиндрами радиуса r.

Решение. Механическая система имеет одну степень свободы. Силы, действующие на систему, показаны на рис. 2. Стержень совершает поступательное движение со скоростью $\overline{v}_1$, его положение в системе координат Oxy можно определить одной координатой x (рис. 2). Ее и примем за обобщенную координату $q = x$. Тогда $v_1 = \dot{x}$. Уравнение Лагранжа имеет вид: $d(\partial T/\partial\dot{q})/dt - \partial T/\partial q = Q$. (*)

1. Дадим механической системе возможное перемещение δx и вычислим

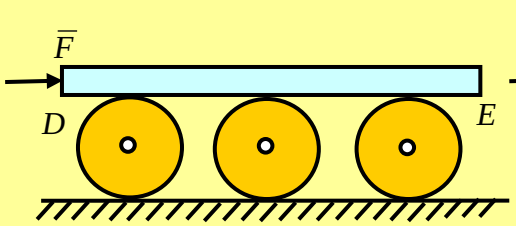


Рис. 1 к задаче 3.11

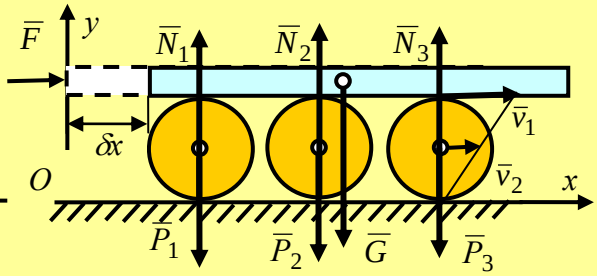


Рис. 2 к задаче 3.11

обобщенную силу Q, соответствующую обобщенной координате $q = x$. Элементарные работы сил тяжести катков $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$, силы тяжести стержня $\overline{G}$, нормальных реакций опоры $\overline{N}_1, \overline{N}_2, \overline{N}_3$ равны нулю, так как они перпендикулярны к направлению перемещения. Тогда элементарная работа активных сил, действующих на механическую систему, равна $\delta A = F\delta x$. Следовательно, согласно определению, $Q = F$. **2**. Кинетическая энергия системы T складывается из кинетической энергии стержня T_1 и кинетической энергии катков $T_{катков} = 3T_2$, где T_2 – кинетическая энергия одного катка. $T_1 = M_1 v_1^2/2 = M_1\dot{x}^2/2$. Катки совершают плоскопараллельное движение, поэтому $T_2 = M_2 v_2^2/2 + J_z\omega^2/2$. Здесь v_2 – модуль вектора скорости центра масс катка, $J_z = M_2 r^2/2$ – момент инерции сплошного катка, ω – угловая скорость катка. Заметим, что точка касания катка и плоскости качения – это мгновенный центр скоростей для катка. Поэтому справедливы соотношения: $v_2 = \omega \cdot r$, $v_1 = 2\omega \cdot r$. Отсюда $\omega = v_1/2r$, $v_2 = v_1/2 = \dot{x}/2$. Следовательно, энергия одного катка равна: $T_2 = M_2 v_2^2/2 + J_z\omega^2/2 = M_2\dot{x}^2/8 + (M_2 r^2/2)\cdot(\dot{x}^2/8\dot{r}^2) = 3M_2\dot{x}^2/16$. $T_{катков} = 3T_2 = 9M_2\dot{x}^2/16$. Кинетическая энергия системы $T = T_1 + T_{катков} = M_1\dot{x}^2/2 + 9M_2\dot{x}^2/16$. Как видим, кинетическая энергия зависит только от первой производной от обобщенной координаты (то есть от обобщенной скорости). Тогда: $\partial T/\partial q = \partial T/\partial x = 0$, $\partial T/\partial\dot{q} = \partial T/\partial\dot{x} = M_1\dot{x} + 9M_2\dot{x}/8$, $d(\partial T/\partial\dot{q})/dt = d(\partial T/\partial\dot{x})/dt = M_1\ddot{x} + 9M_2\ddot{x}/8$. Здесь $\ddot{x}$ – проекция вектора ускорения стержня на ось x, то есть $a_x = a = \ddot{x}$ (так как $a_y = a_z = 0$). Подставляя найденные величины в уравнение (*), получим: $M_1\ddot{x} + 9M_2\ddot{x}/8 = F$ или $\ddot{x}(8M_1 + 9M_2) = 8F$. Отсюда $\ddot{x} = a = 8F/(8M_1 + 9M_2)$. **Ответ.** $a = 8F/(8M_1 + 9M_2)$.

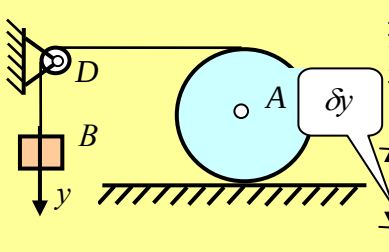


Рис.1 к задаче 3.12

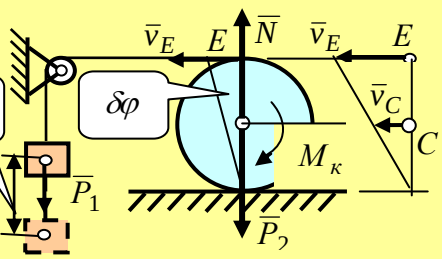


Рис.2 к задаче 3.12

Задача 3.12 (47.12 [8]). Груз B массой M_1 приводит в движение цилиндрический каток A массой M_2 и радиусом r при помощи нити, намотанной на каток. Определить ускорение

груза B, если каток катится без скольжения, а коэффициент трения качения равен $f_к$. Массой блока D пренебречь.

Решение. Механическая система состоит из двух тел и имеет одну степень свободы. На первое тело (тело B) действует сила тяжести $\overline{P_1} = M_1\overline{g}$, на второе тело (каток А) действуют сила тяжести $\overline{P_2} = M_2 g$, нормальная реакция опоры $\overline{N}$, момент трения качения $M_к = f_к N$. Все силы и момент показаны на рис. 2. Тело B движется поступательно, тело A при этом совершает плоскопараллельное движение. Уравнение Лагранжа запишем в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q \qquad (1)$$

Чтобы найти реакцию N, составим уравнение движения центра масс катка (точки C) в проекциях на ось y:

$$M_2\ddot{y}_C = -N + P_2.$$

Так как $\ddot{y}_C = 0$, то $N = P_2 = M_2 g$ и $M_к = f_к N = f_к M_2 g$. Положение системы определяется одной обобщенной координатой q. Пусть $q = y$. Дадим системе возможное линейное перемещение δy в направлении силы тяжести $\overline{P_1}$ (рис. 2). При этом каток повернется относительно мгновенного центра скоростей (точки касания катка и плоскости) и совершит угловое возможное перемещение $\delta\varphi$. Элементарная работа сил равна: $\delta A = mg\cdot\delta y - M_к\delta\varphi$. Так как система имеет только одну степень свободы, то все возможные перемещения выражаются через одну из них.

Так как $v_E = \omega\cdot 2r$, а зависимость между перемещениями такая же, как и между скоростями, то $\delta y = \delta\varphi\cdot 2r$. Тогда $\delta A = mg\cdot\delta y - fN(\delta y/2r) = \delta y\cdot(M_1 g - f_к M_2 g/2r)$. Следовательно, обобщенная сила равна: $Q = g(M_1 - f_к M_2/2r)$. Вычислим кинетическую энергию системы $T = T_1 + T_2$. Здесь T_1, T_2 – кинетические энергии первого и второго тел, соответственно. Тогда $T_1 = M_1 v_1^2/2 = M_1\dot{y}^2/2$, где v_1– проекция вектора скорости первого тела на ось y, а в нашем случае это модуль вектора скорости первого тела. В обобщенных координатах $T_1 = M_1\dot{y}^2/2 = M_1\dot{q}^2/2$. Кинетическая энергия второго тела $T_2 = M_2 v_C^2/2 + J_C\omega^2/2$. Здесь v_C, ω – модуль вектора скорости центра масс и угловая скорость второго тела. J_C – центральный момент инерции катка относительно его продольной оси. $J_C = M_2 r^2/2$. Кроме того, как видим по рис. 2 $v_E = v_1$, $v_C = v_E/2 = v_1/2$. С другой стороны, $v_E = v_1 = \omega\cdot 2r$ и $\omega = v_1/2r$. Тогда $T_2 = M_2 v_C^2/2 + J_C\omega^2/2 = M_2 v_1^2/8 + (M_2 r^2/2)\cdot(v_1^2/8r^2) = 3M_2 v_1^2/16 = 3M_2\dot{y}^2/16$.

В обобщенных координатах $T_2 = 3M_2\dot{y}^2/16 = 3M_2\dot{q}^2/16$. Полная кинетическая энергия системы: $T = T_1 + T_2 = M_1\dot{y}^2/2 + 3M_2\dot{y}^2/16$. Итак, $T = \dot{q}^2(8M_1 + 3M_2)/16$. Вычислим производные от кинетической энергии. $\partial T/\partial q = \partial T/\partial y = 0$, $\partial T/\partial\dot{q} = \dot{q}(8M_1 + 3M_2)/8$, $d(\partial T/\partial\dot{q})/dt = \ddot{q}(8M_1 + 3M_2)/8$. Подставим производные от кинетической энергии и обобщенную силу Q в уравнение Лагранжа (1): $\ddot{q}(8M_1 + 3M_2)/8 = g(M_1 - f_к M_2/2r)$. Отсюда $\ddot{q} = \ddot{y} = 8g(M_1 - f_к M_2/2r)/(8M_1 + 3M_2)$. Ответ получен. Расширим задачу и найдем закон движения груза B с учетом того, что $\ddot{y} = \eta = const$, где $\eta = 8g(M_1 - f_к M_2/2r)/(8M_1 + 3M_2)$. Проинтегрируем последнее уравнение. Тогда $\dot{y} = \eta t + C_1$ и $y = \eta t^2/2 + C_1 t + C_2$. Здесь C_1, C_2 – постоянные

интегрирования, которые могут быть определены с использованием начальных условий. Зная движение груза B, легко определить движение и катка.

Ответ. $\ddot{y} = 8g(M_1 - f_к M_2 / 2r) / (8M_1 + 3M_2)$.

Задача 3.13 (48.7 [8]) В планетарном механизме (рис. 1) колесо с осью O_1 неподвижно; к рукоятке O_1O_3 приложен вращающий момент M; механизм расположен в горизонтальной плоскости. Определить угловое ускорение рукоятки, считая колеса 1, 2, 3 однородными дисками с одинаковыми массами m и радиусами r и пренебрегая массой рукоятки.

Решение. Механическая система состоит из трех тел и обладает одной степенью свободы. В качестве обобщенной координаты q примем угол поворота рукоятки φ, то есть, полагаем $q = \varphi$.

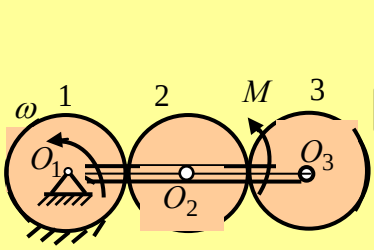


Рис. 1 к задаче 3.13

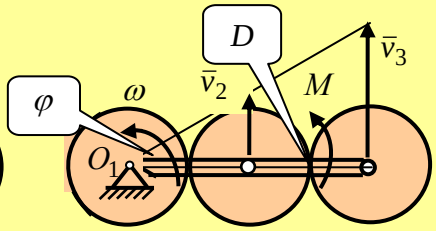


Рис. 2 к задаче 3.13

Единицей измерения обобщенной координаты при этом будет *рад*. При повороте рукоятки O_1O_3 колесо 1 остается неподвижным, колеса 2 и 3 совершают плоскопараллельные движения. Поэтому полная кинетическая энергия механической системы вычисляется по формуле $T = T_2 + T_3$, где T_2, T_3 – кинетические энергии второго и третьего тел, соответственно.

$$T_2 = mv_2^2 / 2 + J_2\omega_2^2 / 2, \qquad T_3 = mv_3^2 / 2 + J_3\omega_3^2 / 2. \tag{1}$$

Вычислим кинетическую энергию второго колеса. Угловая скорость рукоятки ω. $\omega = \dot{\varphi}$ (или $\omega = \dot{q}$). Тогда значение линейной скорости точки O_2 рукоятки равно: $v_2 = \omega \cdot 2r = \dot{\varphi} \cdot 2r = 2r\dot{q}$. Чтобы определить угловую скорость второго колеса, заметим, что точка соприкосновения первого и второго колес является мгновенным центром скоростей (МЦС) для колеса 2, так как колесо 1 неподвижно. Тогда скорость центра масс второго колеса - точки O_2 - равна $v_2^* = \omega_2 \cdot r$. Но точка O_2 – общая точка и для рукоятки, и для второго колеса. Следовательно, $v_2 = v_2^*$ или $\dot{\varphi} \cdot 2r = \omega_2 \cdot r$. Отсюда $\omega_2 = \dot{\varphi} \cdot 2 = 2\dot{q}$. Тогда кинетическая энергия второго колеса в обобщенных координатах примет вид: $T_2 = m(2r\dot{q})^2 / 2 + (mr^2 / 2) \cdot (2\dot{q})^2 / 2 = 3mr^2\dot{q}^2$. Здесь момент инерции второго колеса (да и третьего тоже) вычисляется как для сплошного круглого диска $J_2 = J_3 = J = mr^2 / 2$. Вычислим кинетическую энергию третьего колеса. Скорость центра масс третьего колеса – точки O_3 – равна скорости этой же точки рукоятки $v_3 = \omega \cdot 4r = \dot{\varphi} \cdot 4r = 4r\dot{q}$. Чтобы вычислить угловую скорость третьего колеса, вычислим сначала линейную скорость точки D соприкосновения второго и третьего колес. Так как нам известна угловая скорость ω_2 и МЦС второго колеса, то $v_D = 2r \cdot \omega_2 = 4\dot{q}r$. Оказывается $v_3 = v_D$, то есть две точки третьего колеса движутся с одинаковыми по величине и направлению скоростями. Другими словами, третье колесо движется поступательно, и $\omega_3 = 0$. Тогда $T_3 = mv_3^2 / 2 + J_3\omega_3^2 / 2 = mv_3^2 / 2 = m(4\dot{q}r)^2 / 2 = 8mr^2\dot{q}^2$.

Полная кинетическая энергия системы $T = 3mr^2\dot{q}^2 + 8mr^2\dot{q}^2 = 11mr^2\dot{q}^2$. Единицей измерения энергии в основных единицах системы *СИ* будет $[T] = кг \cdot м^2/с^2 = Н \cdot м = Дж$. Составим уравнение Лагранжа.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q. \qquad (2)$$

Элементарная работа момента на возможном перемещении: $\delta A = M \cdot \delta\varphi$. Следовательно, обобщенная сила $Q = M$. Кинетическая энергия не зависит от координаты q. Тогда $\partial T/\partial q = 0$, $\partial T/\partial \dot{q} = 22mr^2\dot{q}$, $d(\partial T/\partial \dot{q})/dt = 22mr^2\ddot{q}$. Так как $q = \varphi$, то $\ddot{q} = \ddot{\varphi}$. Другими словами, по механическому смыслу вторая производная от обобщенной координаты $\ddot{q}$ является угловым ускорением рукоятки ε, то есть $\ddot{q} = \varepsilon$. Уравнение Лагранжа (2) принимает вид: $22mr^2\varepsilon = M$. Отсюда $\varepsilon = M/22mr^2$.

Ответ. $\varepsilon = M/22mr^2$.

Механические системы с двумя степенями свободы

Задача 3.14 (48.29[8]). На гладкой горизонтальной плоскости помещена треугольная призма ABC массой m, которая может скользить без трения по этой плоскости. По грани призмы AB катится без скольжения однородный круглый цилиндр массы m_1. Определить ускорение призмы.

Решение. Данная механическая система имеет две степени свободы, и состоит из двух тел. За обобщенные координаты примем перемещение призмы $q_1 = x$ и перемещение оси (точки D) катка $q_2 = s$. Следовательно, движение системы описывается двумя уравнениями Лагранжа:

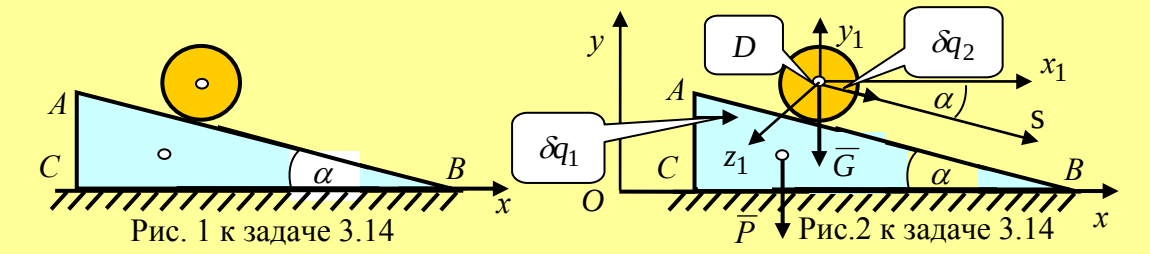


Рис. 1 к задаче 3.14 Рис.2 к задаче 3.14

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_1, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_2. \qquad (1)$$

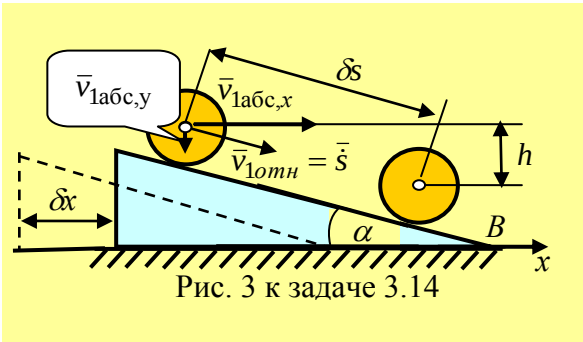


Рис. 3 к задаче 3.14

Здесь $\dot{x}, \dot{s}$ – первые производные от обобщенных координат $\dot{x} = dx/dt$, $\dot{s} = d\dot{s}/dt$. T – полная кинетическая энергия системы $T = T_{пр} + T_{кат}$. Здесь $T_{пр}, T_{кат}$ – кинетические энергии призмы и катка, соответственно, Q_1, Q_2 – обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам $q_1 = x$ и $q_2 = s$.

Вычислим кинетическую энергию системы, учитывая, что призма совершает поступательное движение, а движение катка по призме является относительным плоскопараллельным движением (рис. 3). Тогда для призмы и катка запишем: $T_{пр} = mv_{пр}^2 / 2 = m\dot{x}^2 / 2$, $T_{кат} = m_1 v_{1абс}^2 / 2 + J_z \omega_1^2 / 2$. Здесь $v_{1абс}$, ω_1 – скорость точки D в абсолютном движении, то есть по отношению к неподвижной системе координат Oxy и угловая скорость катка, соответственно. Вычислим их. $v_{1абс,x} = \dot{x} + v_{1отн} \cdot \cos\alpha = \dot{x} + \dot{s} \cdot \cos\alpha$, $v_{1абс,y} = \dot{s} \cdot \sin\alpha$. $v_{1абс}^2 = v_{1абс,x}^2 + v_{1абс,y}^2$ или $v_{1абс}^2 = (\dot{x} + \dot{s} \cdot \cos\alpha)^2 + (\dot{s} \cdot \sin\alpha)^2$. Момент инерции катка (диска) $J_{z1} = m_1 R^2 / 2$. Угловую скорость катка ω_1 в относительном движении по призме определим через относительную скорость цента катка $v_{отн} = \dot{s} = \omega_1 \cdot R$. Отсюда $\omega_1 = \dot{s} / R$, где R – радиус катка. Кинетическая энергия системы в обобщенных координатах $T = T_{пр} + T_{кат}$ получим выражение:

$$T = m\dot{x}^2 / 2 + m_1[(\dot{x} + \dot{s} \cdot \cos\alpha)^2 + (\dot{s} \cdot \sin\alpha)^2] / 2 + m_1 \cdot \dot{s}^2 / 4. \qquad (2)$$

Вычислим производные, входящие в уравнения Лагранжа (1). Так как кинетическая энергия не зависит от обобщенных координат, то

$$\partial T / \partial x = 0, \quad \partial T / \partial s = 0.$$

$$\partial T / \partial \dot{x} = m\dot{x} + m_1(\dot{x} + \dot{s}\cos\alpha),$$
$$\partial T / \partial \dot{s} = m_1[(\dot{x} + \dot{s}\cos\alpha)\cos\alpha + \dot{s} \cdot \sin^2\alpha] + m_1\dot{s}/2 = m_1(\dot{x}\cos + \dot{s}) + m_1\dot{s}/2,$$

$$d(\partial T / \partial \dot{x}) / dt = m\ddot{x} + m_1(\ddot{x} + \ddot{s}\cos\alpha) = (m + m_1)\ddot{x} + m_1\ddot{s}\cos\alpha,$$
$$d(\partial T / \partial \dot{s}) / dt = m_1(\ddot{x}\cos\alpha + \ddot{s}) + m_1\ddot{s}/2 = m_1(\ddot{x}\cos\alpha + \ddot{s}) + m_1\ddot{s}/2.$$

Вычислим обобщенные силы. Дадим системе возможное перемещение $\delta x > 0, \delta s = 0$. Элементарные работы активных сил $\overline{P}$ и $\overline{G}$ на возможных перемещениях их точек приложения равны нулю, так как линии действия сил и направление перемещения взаимно перпендикулярны. Следовательно, $Q_1 = 0$. Далее, дадим системе перемещения $\delta x = 0, \delta s > 0$. На этих перемещениях работу произведет сила тяжести катка $\overline{G}$. $\delta A_G = +Gh$ или $\delta A_G = +G\delta s \cdot \cos\alpha = (G \cdot \cos\alpha)\delta s$. Обобщенной силой является коэффициент, стоящий перед вариацией обобщенной координаты, то есть $Q_2 = gm_1 \cdot \cos\alpha$. Итак, система уравнений Лагранжа (1) принимает окончательный вид:

$$(m + m_1)\ddot{x} + m_1\ddot{s}\cos\alpha = 0,$$

$$m_1(\ddot{x}\cos\alpha + \ddot{s}) + m_1\ddot{s}/2 = gm_1\sin\alpha. \qquad (3)$$

Из второго уравнения $\ddot{s} = 2(g\sin\alpha - \ddot{x}\cos\alpha)/3$. Подставим значение относительного ускорения $\ddot{s}$ в первое уравнение. Тогда $(m + m_1)\ddot{x} + m_1\ddot{s}\cos\alpha \cdot 2(g\sin\alpha - \ddot{x}\cos\alpha)/3 = 0$ или $\ddot{x} \cdot [3(m + m_1) - 2m_1\cos^2\alpha] = -m_1 \cdot 2g\sin\alpha \cdot \cos\alpha$. И алгебраическое значение ускорения призмы равно: $\ddot{x} = -\ m_1 g\sin 2\alpha / [3(m + m_1) - 2m_1 \text{ с о}^2\text{s}\alpha] = a$. Так как и

числитель, и знаменатель дроби положительны, то знак минус означает, что первоначальное предположение о направлении перемещения призмы вправо было ошибочным – призма движется влево. **Ответ.** Призма движется влево, $\ddot{x} = a$.

ГЛАВА 4. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ УДАРА

§ 4.1. Краткие сведения по элементарной теории удара

Основные понятия и определения элементарной теории удара

Механическое взаимодействие твердых тел, при котором за бесконечно малый промежуток времени τ скорости точек тел изменяются на конечную величину, называется ударом.

Промежуток времени τ, в течение которого происходит удар, называется временем удара. Ниже предполагается, что 0,01с. $\leq \tau \leq$ 0,0001с.

Силы, возникающие в процессе удара, называются ударными силами.

Элементарная теория удара построена для тел шарообразной формы или близких к ней. Но ее выводы и методы исследования носят более широкий характер.

Основные гипотезы элементарной теории удара:

1. В элементарной теории удара оперируют не с самими ударными силами, а с их импульсами, а в качестве основного уравнения, описывающего явление удара, используется ***теорема об изменении количества движения точки****.*

$$m\bar{u} - m\bar{v} = \bar{S}_{уд}.$$

2. В элементарной теории удара принято считать, что в течение времени удара, то есть для $0 \leq t \leq \tau$, ***соударяющиеся точки или тела остаются неподвижными.***

3.*Силами неударного происхождения в элементарной теории удара пренебрегают.*

Разновидности ударного взаимодействия

Линией центров называется ось C_1C_2, проходящая через центры масс соударяющихся тел (читай: двух шаров).

Точка К, в которой происходит ударное соприкосновение тел, называется точкой удара.

Удар называется центральным, если точка удара K лежит на линии центров C_1C_2, а касательная плоскость, проведенная в точке удара, перпендикулярна к линии центров.

При ударе тела по поверхности (преграде) удар будет центральным, если нормаль к поверхности в точке удара проходит через центр масс ударяющего тела. Следовательно, при ударе шарообразным телом по преграде удар всегда является центральным.

Удар называется прямым, если векторы скоростей центров масс соударяющихся тел $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ в начале удара лежат на линии центров. При ударе тела по поверхности удар будет прямым, если вектор скорости центра масс ударяющего тела и нормаль к поверхности в точке удара лежат на одной прямой.

Удар называется косым, если хотя бы один из векторов скоростей центров масс соударяющихся тел $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ в начале удара не лежит на линии центров. При ударе тела по поверхности удар будет косым, если вектор скорости центра масс ударяющего тела и нормаль к поверхности в точке удара не лежат на одной прямой.

Удар называется неупругим, если первоначальное недеформированное состояние тел не восстанавливается.

Удар называется частично упругим, если первоначальное недеформированное состояние тел не полностью восстанавливается.

Удар называется упругим, если первоначальное недеформированное состояние тел полностью восстанавливается.

Коэффициент восстановления k

При ударе точки о неподвижное препятствие коэффициентом восстановления при ударе называется отношение модулей проекций на нормаль векторов скорости точки в конце и в начале удара.

$$k = |u_n| / |v_n| \ .$$

Здесь u_n – проекция вектора скорости точки **после удара** (вектора скорости «отскока») на нормаль к поверхности в точке удара. v_n – проекция вектора скорости **в начальный момент удара** на нормаль к ударяемой поверхности в точке удара.

На практике коэффициент восстановления удобно определять методом сбрасывания шара без начальной скорости на горизонтальную поверхность по формуле:

$$k = \sqrt{h_2 / h_1} \ .$$

Здесь h_1 – высота, с которой сбрасывается испытуемый шар, h_2 – высота отскока шара, то есть высота, на которую поднимется шар после отскока.

При соударении ***двух движущихся тел*** *коэффициент восстановления равен отношению модулей относительных скоростей тел после и до удара.*

Значения коэффициентов восстановления для разных материалов зависят от скорости удара и приводятся в справочниках по удару. *При скоростях соударения около 3м/с можно принимать:* $k = 0{,}5$ *при ударе дерево о дерево;* $k = 0{,}56$ *при ударе стали о сталь;* $k = 0{,}89$ *при ударе слоновой кости о слоновую кость (бильярдные шары),* $k = 0{,}94$ *при ударе стеклянного шарика о стекло. Как видим, в последнем случае имеет место почти упругий удар.*

Общие теоремы динамики системы при ударе

1.Теорема об изменении количества движения. *Изменение количества движения механической системы за время удара равно векторной сумме импульсов всех внешних ударных сил, действующих на систему, за то же время удара.*

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \sum_{k=1}^{n} \overline{S}_k^e \ , \quad \text{где} \qquad \overline{Q}_0 = \overline{Q}(0), \ \ \overline{Q}_1 = \overline{Q}(\tau) \, .$$

$$Q_{1,x} - Q_{0,x} = \sum_{k=1}^{n} S_{k,x}^e \, , \ \ Q_{1,y} - Q_{0,y} = \sum_{k=1}^{n} S_{k,y}^e \, , \ \ Q_{1,z} - Q_{0,z} = \sum_{k=1}^{n} S_{k,z}^e \, .$$

Законы сохранения количества движения при ударе. 1. *Если геометрическая сумма импульсов всех внешних ударных сил равна нулю, то количество движения механической системы за время удара не изменится.*

$$\overline{Q}_1 = \overline{Q}_0 .$$

2. *Если сумма проекций импульсов всех внешних ударных сил на какую-либо ось за время удара равна нулю, например,* $\sum_{k=1}^{n} S_{k,x}^{e} = 0$, *то соответствующая проекция вектора количества движения на эту же ось в течение времени удара – постоянна, то есть* $Q_{1,x} = Q_{0,x}$.

2.Теорема о движении центра масс. *Изменение скорости центра масс механической системы за время удара равно отношению суммы импульсов внешних ударных сил к массе всей системы.*

$$\overline{u}_C - \overline{v}_C = (\sum_{k=1}^{n} \overline{S}_k^{e}) / M .$$

Законы сохранения движения центра масс при ударе. *а) Если сумма импульсов внешних сил в течение времени удара равна нулю, то есть если* $\sum_{k=1}^{n} \overline{S}_k^{e} = 0$, *то скорость центра масс механической системы остается постоянной и* $\overline{u}_C = \overline{v}_C$..

б) *Если сумма проекций импульсов внешних сил на какую – либо ось, например, на ось* Ox *равна нулю, то есть если* $\sum_{k=1}^{n} S_{kx}^{e} = 0$, *то и проекция вектора скорости центра масс на эту ось не изменяется за время удара и* $u_{Cx} = v_{Cx}$.

Моментом количества движения механической системы относительно некоторого центра O ***в начале удара*** *называется векторная величина* $\overline{K}_0$, *равная сумме моментов количеств движения точек механической системы в начале удара относительно того же центра* O. *Итак,*

$$\overline{K}_0 = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O(m_k \cdot \overline{v}_k).$$

Моментом количества движения механической системы относительно некоторого центра O ***в конце удара*** *называется векторная величина* $\overline{K}_1$, *равная сумме моментов количеств движения точек механической системы в конце удара относительно того же центра* O. *Итак,*

$$\overline{K}_1 = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O(m_k \cdot \overline{u}_k).$$

3. Теорема моментов относительно центра. *Изменение кинетического момента количества движения механической системы за время удара относительно некоторого центра* O *равно сумме моментов импульсов всех внешних ударных сил, вычисленных относительно того же центра* O.

$$\overline{K}_1 - \overline{K}_0 = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_0(\overline{S}_k^e).$$

Моментами количества движения механической системы относительно некоторой оси Oz ***в начале и в конце удара*** *называются скалярные величины* K_{0z}, K_{1z}, *равные суммам моментов количеств движения точек механической системы относительно оси, в начале и в конце удара. Итак,*

$$K_{0z} = \sum_{k=1}^{n} m_z(m_k \overline{v}_k), \quad K_{1z} = \sum_{k=1}^{n} m_z(m_k \overline{u}_k).$$

Аналогичные величины можно вычислить относительно и двух других осей.

4. Теорема моментов относительно оси*. Изменение за время удара кинетического момента количества движения относительно оси* Oz *равно сумме моментов импульсов внешних сил относительно той же оси, то есть*

$$K_{1z} - K_{0z} = \sum_{k=1}^{n} m_{Oz}(\overline{S}_k^e).$$

Аналогично теорема формулируется и для двух других осей.

Закон сохранения момента количества движения. а). *Если геометрическая сумма* $\sum_{k=1}^{n} \overline{m}_0(\overline{S}_k^e)$ *моментов импульсов всех внешних ударных сил относительно некоторого центра за время удара равна нулю, то момент количества движения механической системы (главный кинетический момент) за время удара не изменится, то есть* $\overline{K}_1 = \overline{K}_0$.

б) *Если сумма моментов импульсов всех внешних ударных сил* $\sum_{k=1}^{n} m_{Oz}(\overline{S}_k^e)$ *относительно оси, например, оси* Oz *за время удара равна нулю, то момент количества движения механической системы относительно этой оси за время удара не изменится, то есть* $K_{1z} = K_{0z}$.

5. Теорема Карно. *Кинетическая энергия, потерянная механической системой при абсолютно неупругом ударе, равна той кинетической энергии, которую имела бы механическая система, если бы тела двигались с потерянными скоростями.*

§ 4.2. Задачи на определение характеристик удара

Задача 4.1. Шар веса $P_1 = 10H$ ударяется о неподвижный шар веса $P_2 = 20H$. Какую скорость v_1 должен иметь центр тяжести первого шара до удара, чтобы после неупругого удара их общая скорость равнялась *6м/с*?

Решение. Ось n направим вдоль линии центров C_1C_2 в сторону направления вектора $\overline{v}_1$. В начале удара $v_{1n} = v_1$, $v_{2n} = 0$. В конце неупругого удара проекция общей скорости шаров на ось n равна $u_n = (m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n})/(m_1 + m_2)$. Отсюда проекция искомой скорости v_{1n} в начале неупругого удара $v_{1n} = ((m_1 + m_2)u_n - m_2 v_{2n})/m_1$. Численно $v_{1n} = 18$ *м/с*. **Ответ.** $v_1 = v_{1n} = 18$ *м/с*

Задача 4.2. Скорости центров тяжести двух шаров, двигавшихся навстречу друг другу, равны: $v_1 = 6м/с$, $v_2 = 10м/с$. Масса первого шара $m_1 = 10кг$. Определить массу второго шара и величину ударного импульса S, если после неупругого удара шары остановились.

Решение. Направляем ось n вдоль линии центров C_1C_2. $v_{1n} = 6м/с$, $v_{2n} = -10м/с$. Так как по условию проекция общей скорости после неупругого удара равна нулю, то $(m_1v_{1n} + m_2v_{2n})/(m_1 + m_2) = 0$, т.е. $m_1v_{1n} + m_2v_{2n} = 0$ и $m_2 = -m_1v_{1n}/v_{2n} = 6кг\,кг.$ Величина ударного импульса будет: $S = m_1m_2(v_{1n} - v_{2n})/(m_1 + m_2) = 60H \cdot c$. **Ответ.** $m_2 = 6кг,\ S = 60H \cdot c$.

Задача 4.3. С какой высоты h_1 падает шарик на неподвижную горизонтальную плиту, если после частично упругого удара он поднимается на высоту $h_2 = 0{,}81м$. Коэффициент восстановления равен: $k = 0{,}9$.

Решение. Ось n направим по вертикали вниз. Скорость центра масс шарика в начале удара обозначим $\bar{v}_1$. Скорость неподвижной плоскости $\bar{v}_2 = 0$. Масса плиты $m_2 \to \infty$. Проекция общей скорости $\bar{u}$ на ось n при неупругом ударе равна $u_n = (m_1v_{1n} + m_2v_{2n})/(m_1 + m_2) = 0$. Проекция скорости центра масс шарика на ось в конце удара $u_{1n} = u_n + k(u_n - v_{1n})$. Так как $u_n = 0$, то $u_{1n} = -kv_{1n}$. Зависимость между модулями скоростей центра масс шарика в начале и конце удара имеет вид $u_1 = kv_1$. Так как шарик совершал свободное падение, то по формуле Галилея $v_1 = \sqrt{2gh_1}$. После частично упругого удара шарик начинает подъем вверх со скоростью u_1. В наивысшей точке подъема h_2 скорость шарика равна нулю. Следовательно $u_1 = \sqrt{2gh_2}$. Таким образом, $\sqrt{2gh_2} = k \cdot \sqrt{2gh_1}$ или $\sqrt{h_2} = k \cdot \sqrt{h_1}$. Следовательно, $h_1 = h_2/k^2 = 1м$.

Экспериментально определить коэффициент восстановления при частично упругом ударе можно по формуле: $k = \sqrt{h_2/h_1}$. В случае неупругого удара шарик от плоскости не отскакивает, т.е. $h_2 = 0$. Из последней формулы получим: $k = 0$.

В случае упругого удара шарик должен отскочить в исходное положение, т.е. $h_2 = h_1$ и $k = 1$. При частично упругом ударе $h_2 < h_1$ и, следовательно, $0 < k < 1$. Так, при ударе деревянного шарика о стальную плиту $k = 0{,}55$. **Ответ.** $h_1 = h_2/k^2 = 1м$.

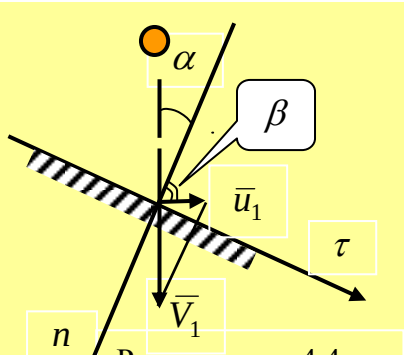


Рис. к задаче 4.4

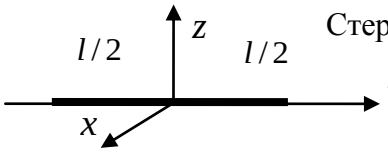
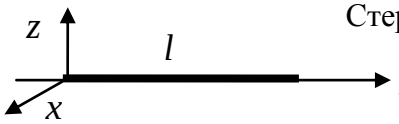
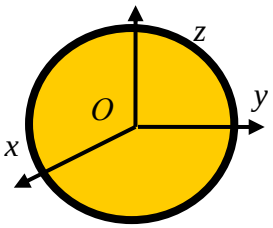
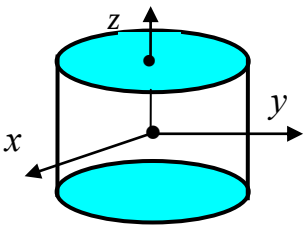
Задача 4.4. Свободно падающий шарик ударяется о неподвижную наклонную плоскость, расположенную под углом α к горизонту (рис.к задаче). Определить направление вектора скорости шарика в конце абсолютно упругого удара, если коэффициент восстановления равен k.

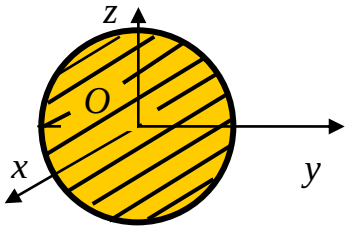
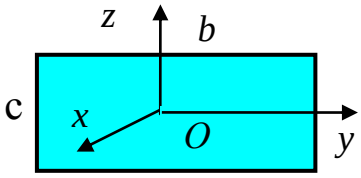
Решение. Направим ось τ вдоль наклонной плоскости, а ось n к ней перпендикулярно в точке падения шарика на наклонную плоскость. Углы α и β, обозначенные при вершине O, соответственно, называются углом падения и углом отражения. В начале удара $v_{1n} = v_1\cos\alpha$, $v_{1\tau} = v_1\sin\alpha$.

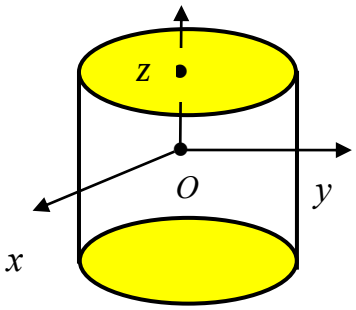
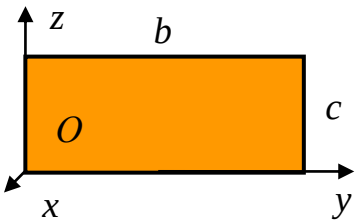
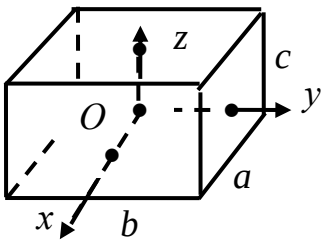
Проекция общей скорости в случае абсолютно неупругого удара $u_n = (m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n})/(m_1 + m_2)$. Масса неподвижной плоскости $m_2 \to \infty$, $v_2 = 0$. Следовательно, $u_n = 0$. Проекции скорости центра тяжести шарика на ось τ в начале и в конце упругого удара равны: $u_{1\tau} = v_{1\tau} = v_1 \sin\alpha$. Проекция вектора скорости центра тяжести шарика на ось n в конце упругого удара определяется выражением: $u_{1n} = u_n + k(u_n - v_{1n})$. Тогда $u_{1n} = -kv_{1n} = -kv_1 \cos\alpha$. Искомый тангенс угла отражения β дается формулой: $tg\beta = |u_{1n}|/|u_{1\tau}| = v_1 \sin\alpha/(kv_1 \cos\alpha) = tg\alpha/k$. Эта формула дает удобный способ экспериментального определения коэффициента восстановления k при упругом ударе. Схема прибора основана на идее рассмотренной задачи. Наклонная плоскость может устанавливаться под разными углами α к горизонту, поворачиваясь вокруг оси O, перпендикулярной к плоскости рисунка. Свободное падение шарика обеспечивается вертикальными направляющими. Угол падения α и угол отражения β измеряются с помощью угломера, установленного на приборе. $k = tg\alpha/tg\beta$. При абсолютно упругом ударе $\alpha = \beta$ и $k = 1$.

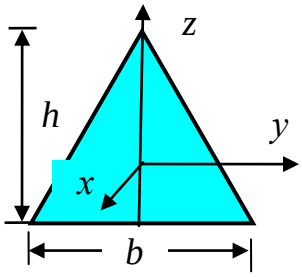
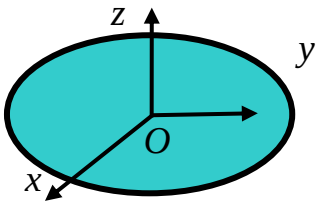
ПРИЛОЖЕНИЕ 1

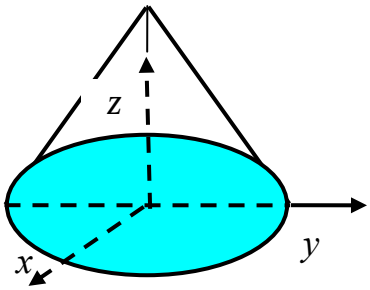
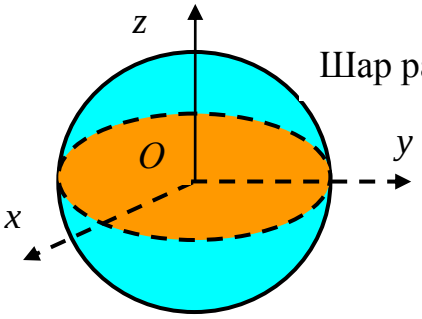
Моменты инерции некоторых тел

№	Форма тела	J_x	J_y	J_z
1	 Стержень	$\frac{Ml^2}{12}$	0	$\frac{Ml^2}{12}$
2	 Стержень	$\frac{Ml^2}{3}$	0	$\frac{Ml^2}{3}$
3	 Кольцо	MR^2	$\frac{MR^2}{2}$	$\frac{MR^2}{2}$
4	 Тонкостенный цилиндр радиуса R и высотой h	$\frac{MR^2}{2}$	$\frac{MR^2}{2}$	MR^2

5	 Круглый (сплошной) диск радиуса R	$\frac{MR^2}{4}$	$\frac{MR^2}{4}$	$\frac{MR^2}{2}$
6	 Пластина единичной толщины	$\frac{M(b^2+c^2)}{12}$	$\frac{Mc^2}{12}$	$\frac{Mb^2}{12}$

№	Форма тела	J_x	J_y	J_z
7	 Сплошной цилиндр (каток) радиуса R и высотой h	$\frac{MR^2}{4}$	$\frac{MR^2}{4}$	$\frac{MR^2}{2}$
8	 Прямоугольная пластина единичной толщины	$\frac{M(b^2+c^2)}{3}$	$\frac{Mc^2}{3}$	$\frac{Mb^2}{3}$
9	Прямоугольный параллелепипед  $d_1^2 = c^2 + a^2$ $d_2^2 = a^2 + b^2$ $d_3^2 = b^2 + c^2$	$\frac{Md_3^2}{12}$	$\frac{Md_1^2}{12}$	$\frac{Md_2^2}{12}$

10	 Равнобокий треугольник единичной толщины	$M(\frac{b^2}{24}+\frac{h^2}{18})$	$\frac{Mh^2}{18}$	$\frac{Mb^2}{24}$
11	 Эллипс с полуосями *a* и b	$\frac{Mb^2}{4}$	$\frac{Ma^2}{4}$	$M(\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{4})$

№	Форма тела	J_x	J_y	J_z
12	 Прямой конус с радиусом основания *R*	—	—	$J_z = 0{,}3MR^2$
13	 Шар радиуса *R*	$J_x = J_y = J_z = 0{,}4 \cdot MR^2$		

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Краткие сведения из математики

А. Функции и их графики

1. Линейная функция $y = ax + b$. График – прямая линия. Функция монотонно возрастает при $a > 0$ и убывает при $a < 0$ (рис. 1).

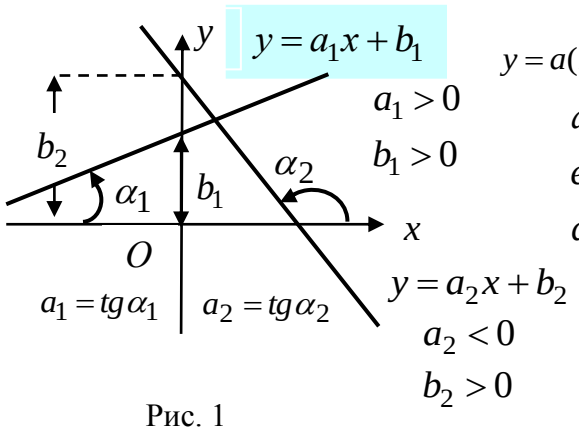


Рис. 1

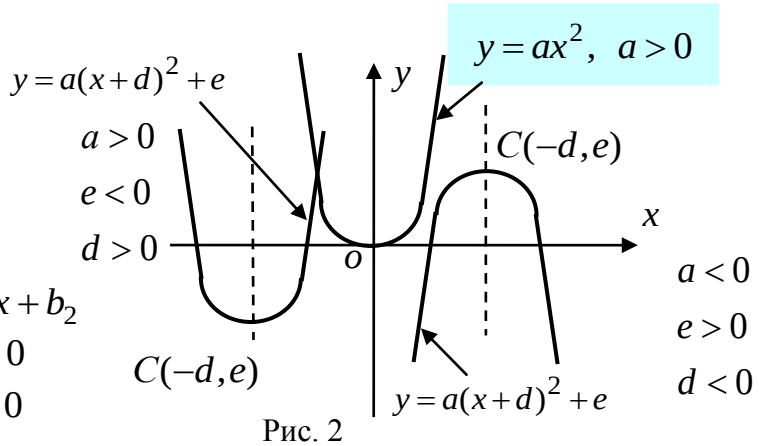


Рис. 2

2. Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c.$ График – парабола с вертикальной осью симметрии (рис.2). Обозначим $d = b/2a,\quad e = -(b^2 - 4ac)/4a$. Квадратный трехчлен примет вид: $y = a(x+d)^2 + e.$ Графики этой функции для разных значений констант показаны на рис. 2

3. Степенная функция $y = ax^n$ $(n - \text{целое})$. График - парабола $n-$го порядка. На рис. 3 даны графики для четных $n = 2,4$ и нечетных $n = 3,5$.

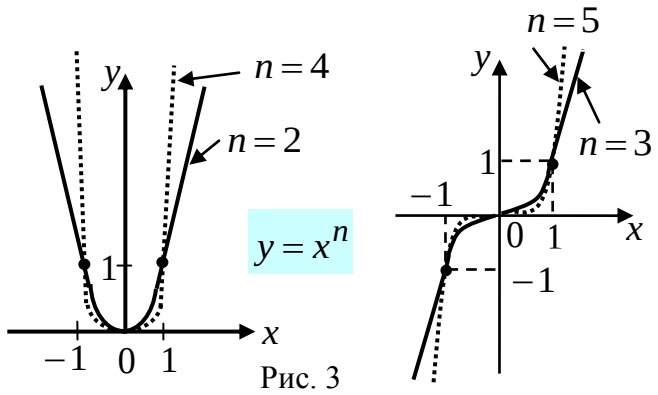


Рис. 3

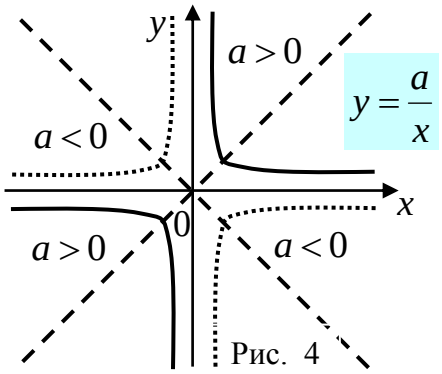


Рис. 4

4. Обратная пропорциональность $y = a/x$. График – равносторонняя гипербола с асимптотами – осями координат (рис. 4).

5. Показательная функция $y = a^x$. График – показательная кривая (рис. 5).

6. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ $(y = \ln x)$. График логарифмическая кривая (рис. 6).

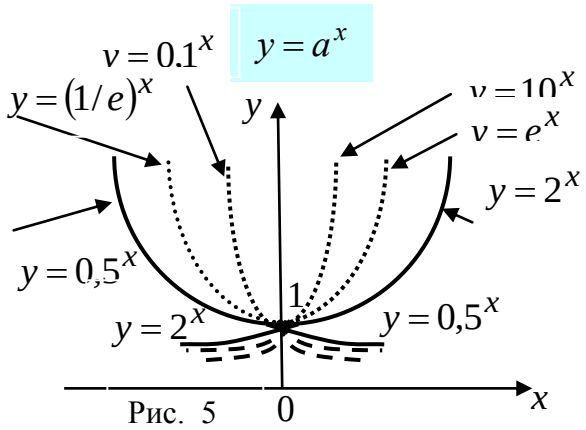


Рис. 5

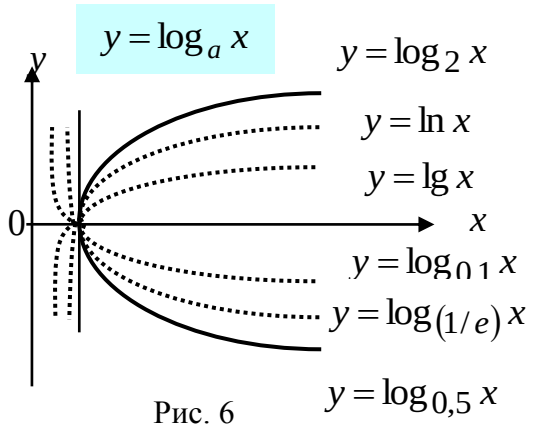


Рис. 6

7. Синус $y = A \cdot \sin kx$. График - синусоида (рис. 7, 8).

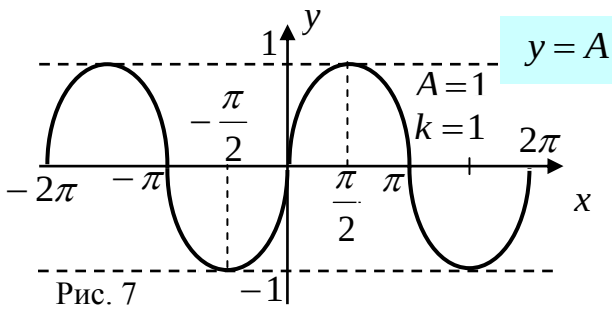


Рис. 7

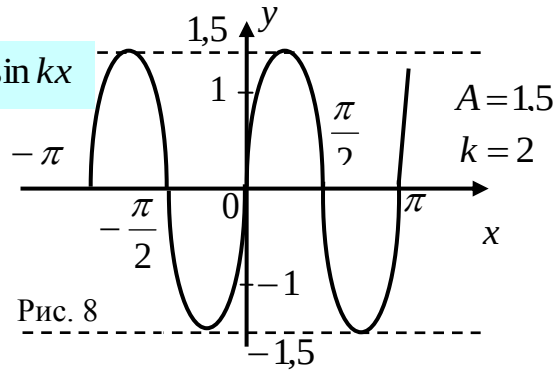


Рис. 8

8. Косинус $y = A \cdot \cos kx$. График - косинусоида (рис. 9, 10).

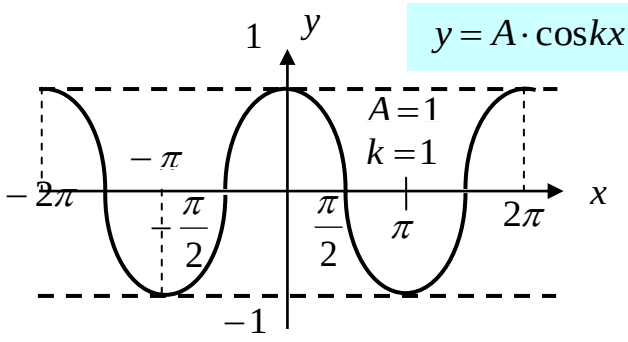


Рис. 9

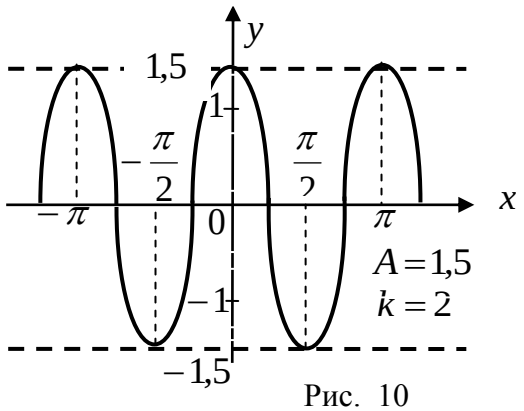


Рис. 10

9. Тангенс $y = tgx$. График – тангенсоида (рис. 11).

10. Котангенс $y = ctgx$. График – тангенсоида, зеркально отраженная относительно оси Ox и сдвинутая влево на $\pi/2$ рад (рис. 12).

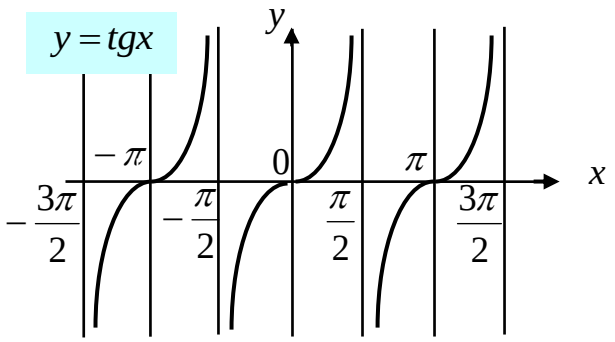


Рис. 11

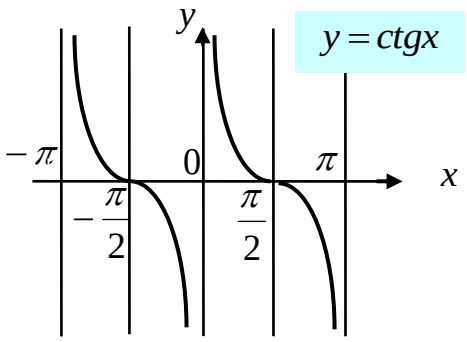


Рис. 12

Б. Алгебра

1. Действия с показательными выражениями

$$a^m a^n = a^{m+n}, \qquad a^m / a^n = a^{m-n}, \qquad (a^m)^n = a^{mn}, \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}.$$

2. Натуральные логарифмы. Логарифмированием некоторой величины называется нахождение ее логарифма. Нахождение величины по ее логарифму называется потенцированием. Логарифмом L числа N при основании c называется показатель степени, в которую нужно возвысить основание c, чтобы получить L.

$$L = \log_C N, \;\; C^L = N.$$

Всякое положительное число при любом положительном основании c, за исключением единицы, имеет свой логарифм. Если $C = e = 2{,}718281828$, то логарифм называется натуральным, и обозначается: $L = \ln N$, без указания основания. Логарифмы обладают следующими свойствами:

$$\ln 1 = 0, \;\; \ln e = 1, \;\; \ln 0 = -\infty,$$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \quad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b,$$

$$\ln a^n = n \cdot \ln a, \quad \ln\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \ln a.$$

3. Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и формулы сокращенного умножения: $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a.$

Если $b^2 - 4ac > 0$ имеется два действительных корня, если $b^2 - 4ac = 0$, то имеется два совпадающих корня, если $b^2 - 4ac < 0$ – два мнимых корня.

Имеют место формулы сокращенного умножения.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \qquad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$(a^2 - в^2) = (a+b)\cdot(a-b), \qquad (a^3 \pm b^3) = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$$

В. Геометрия

1. Треугольник. Сумма углов треугольника равна 2π *рад* или 180° (рис. 13).

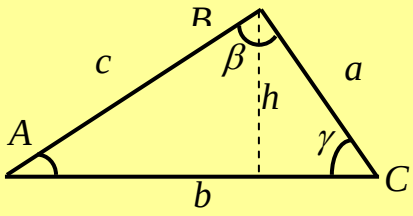


Рис. 13

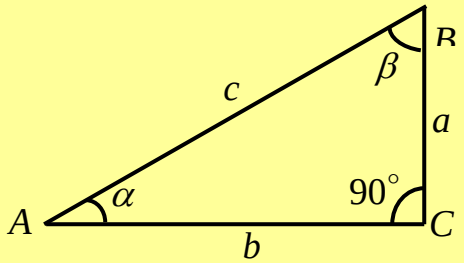


Рис. 14

Площадь треугольника $S = 0{,}5bh$ или $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = 0{,}5\cdot(a+b+c)$, h – высота треугольника.

При решении треугольников используются теорема косинусов и синусов (рис.13).

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Если один из углов треугольника равен 90°, то треугольник называется прямоугольным (рис.14). Для прямоугольных треугольников имеют место соотношения: $S = 0{,}5ab$, $c^2 = a^2 + b^2$, $\sin\alpha = a/c$, $\cos\alpha = b/c$,

$$\sin\beta = b/c, \quad \cos\beta = a/c, \quad tg\alpha = a/b, \quad tg\beta = b/a.$$

Центр тяжести треугольников находится на пересечении медиан, т.е. прямых, соединяющих вершины треугольников с серединами противолежащих сторон.

2. Параллелограмм (рис.15). У параллелограмма противолежащие стороны попарно равны и параллельны, противоположные углы равны, площадь параллелограмма $S = bh$, где h – высота параллелограмма. Длину диагонали можно вычислить по теореме косинусов, которая в данном случае примет вид:

$$d^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cdot\cos\ (\angle BAD).$$

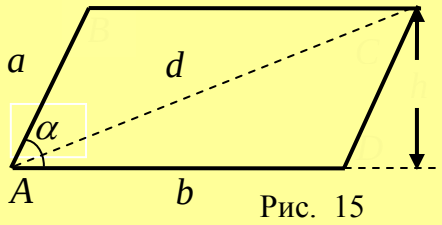


Рис. 15

3. Окружность. Длину окружности вычисляют по формуле $L = 2\pi\cdot r$, где r – радиус окружности. Площадь круга: $s = \pi\cdot r^2 = \pi\cdot d^2/4$. Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу окружности, проведенному к точке касания.

Г. Тригонометрия

1. Часто используемые формулы тригонометрии:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \sin\alpha/\cos\alpha = tg\alpha, \quad \cos\alpha/\sin\alpha = ctg\alpha,$$

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}, \quad tg\,2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha},$$

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \quad \cos(a\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\cos\beta,$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha), \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha),$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)], \quad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)].$$

2. Формулы приведения

Функции	$\beta = 90^\circ \pm \alpha$	$\beta = 180^\circ \pm \alpha$	$\beta = 270^\circ \pm \alpha$	$\beta = 360^\circ - \alpha$
$\sin\beta$	$+\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\pm\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$

3. Значение тригонометрических функций некоторых углов

α (град.) функция	0	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	0,5	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	0,5	0
$tg\alpha$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$
$ctg\alpha$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0
функция α (рад)	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$

Д. Сведения из векторной алгебры

Все математические операции с векторами в динамике – сложение векторов, умножение вектора на число, умножение вектора на вектор, разложение векторов на составляющие, – выполняются по одним и тем же правилам векторной алгебры, как это делалось, например, с вектором силы $\bar{F}$ в статике.

1. Геометрический способ сложения векторов. Если вектор $\bar{c}$ является суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то пишут $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$. Это символическое равенство показано на рис. 17, 18. Вектор $\bar{c}$ получается или как диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (правило параллелограмма – рис. 17), или как третья сторона треугольника, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (правило треугольника – рис.18). Только так и надо понимать сумму векторов.

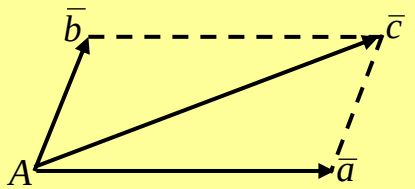


Рис. 17

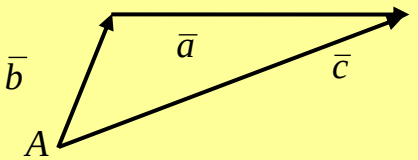


Рис. 18

Чтобы определить числовые значения вектора $\bar{c}$ (то есть его модуль-длину и направление в пространстве) можно или а) по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ построить параллелограмм (или треугольник) в масштабе и неизвестный вектор $\bar{c}$ определить графически, или б) построив эскизный чертеж параллелограмма (или треугольника), воспользоваться для вычислений теоремами косинуса или синуса.

2. Аналитический способ действия с векторами.

В этом случае исходят из того, что любой вектор, в том числе и имеющий механический смысл, может быть представлен через свои проекции.

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}\,, \qquad |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,.$$

a_x, a_y, a_z – проекции вектора $\bar{a}$ на оси Ox, Oy, Oz некоторой выбранной системы координат. Косинусы углов, которые образует вектор $\bar{a}$ с положительными направлениями осей Ox, Oy, Oz, равны:

$$\cos\alpha = a_x/|\bar{a}|, \quad \cos\beta = a_y/|\bar{a}|, \quad \cos\gamma = a_z/|\bar{a}|.$$

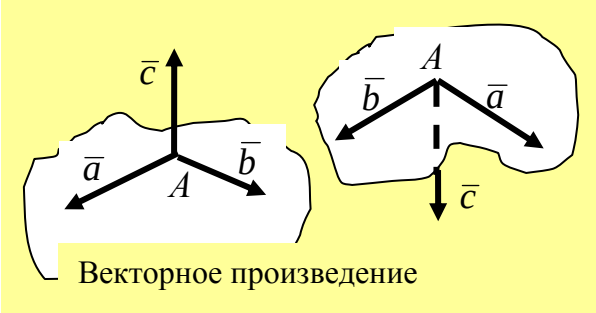
Если вектор $\bar{a}$ является суммой векторов $\bar{a}_k$, то есть $\bar{a} = \sum \bar{a}_k$, то проекции этого вектора a_x, a_y, a_z равны суммам проекций a_{kx}, a_{ky}, a_{kz} слагаемых векторов:

$$a_x = \sum_{k=1}^{n} a_{kx}, \qquad a_y = \sum_{k=1}^{n} a_{ky}, \qquad a_z = \sum_{k=1}^{n} a_{kz}\,.$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{\left(\sum a_{kx}\right)^2 + \left(\sum a_{ky}\right)^2 + \left(\sum a_{kz}\right)^2}\,.$$

3. Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется скалярная величина $(\bar{a}\cdot\bar{b})$, равная: $(\bar{a}\cdot\bar{b}) = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\alpha$ (α – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$).

4. Векторное произведение $\bar{c}$ двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ есть величина векторная:



$$\bar{c} = [\bar{a}\times\bar{b}] \quad \text{или} \quad \bar{c} = (\bar{a}\times\bar{b}) \quad \text{и}$$

$$|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\cdot\sin\alpha$$

Вектор $\bar{c}$ должен быть направлен так, чтобы при наблюдении с конца вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от первого вектора-сомножителя $\bar{a}$ ко второму вектору-сомножителю $\bar{b}$ наблюдался происходящим против направления хода часовой стрелки. Координаты вектора $\bar{c}$ определяются по формулам:

$$c_x = a_y b_z - b_y a_z, \quad c_y = a_z b_x - a_x b_z, \quad c_z = a_x b_y - a_y b_x.$$

5. Векторная функция скалярного аргумента

Определение. Переменный вектор $\bar{c}$ называется векторной функцией (вектор – функцией) скалярной переменной t, если каждому значению t соответствует определенное значение вектора $\bar{c}$. Обозначение $\bar{c} = \bar{f}(t)$ или $\bar{c} = \bar{c}(t)$. Примерами таких векторов в механике являются, например, вектор скорости $\bar{v}$ и вектор

ускорения $\bar{a}$. Координатное (аналитическое) задание вектор – функции по форме такое же, как и для постоянного вектора. Например, $\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}$, но теперь

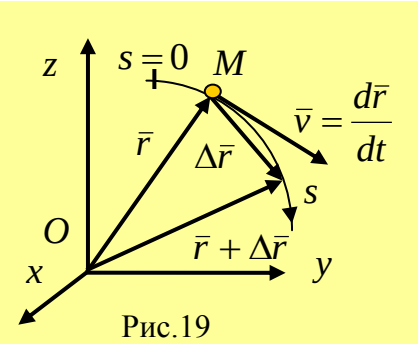


Рис.19

проекции вектора v_x, v_y, v_z – функции переменной t (в механике чаще всего это время). Если переменный вектор $\bar{c}(t)$ является радиус-вектором некоторой точки M (рис. 19), то он обозначается $\bar{r} = \bar{r}(t)$. При изменении переменной t (читай: времени) конец радиус-вектора M опишет в пространстве кривую, которая называется *годографом* радиус – вектора $\bar{r}(t)$. Механический смысл этой кривой – траектория точки. Координатное задание этой кривой производится тремя функциями (координатами точки M) – $x(t), y(t), z(t)$, а радиус-вектор принимает вид:

$$\bar{r}(t) = x(t)\cdot\bar{i} + y(t)\cdot\bar{j} + z(t)\cdot\bar{k}.$$

Производная от радиус – вектора $\bar{r}(t)$ по переменной t – тоже вектор, касательный к годографу радиус-вектора (рис. 19). Модуль этого вектора (его длина) зависит от выбора переменной t. Если t – время, то $\bar{r}(t)$ определяет движение точки M в пространстве (вспомним векторный способ задания движения в кинематике), а производная $\bar{v} = d\bar{r}/dt$ и по величине, и по направлению – это вектор скорости точки. Если переменная $t \equiv s$, то есть за переменную t принимается криволинейная (дуговая) координата точки s (рис.19), то $|d\bar{r}/ds| = 1$.

E. Производные и интегралы некоторых функций

1. Правила дифференцирования сложной функции

Пусть $y = f[\varphi(x)]$, тогда $y'_x = f_\varphi'[\varphi(x)]\cdot\varphi_x'(x)$.

Примеры: 1) Дано $y = \sin 2x$. Тогда $y' = \cos 2x\cdot(2x)' = 2\cos 2x$.

2) Дано $y = a^{2t}$. Тогда $y' = a^{2t}\cdot\ln a\cdot(2t)' = 2a^{2t}\ln a$.

2.Таблица производных

$(c)' = 0,\ c = const,$

$(x^n)' = nx^{n-1}, n = const,$

$(e^x)' = e^x,$

$(a^x)' = a^x\ln a,\ a = const,$

$(cosx)' = -\sin x,$

$(\ln x)' = 1/x,$

$(\sin x)' = \cos x,$

$(tgx)' = 1/\cos^2 x,$

$(ctgx)' = -1/\sin^2 x,$

$(shx)' = chx,$

$(chx)' = shx,$

где $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ – функции гиперболического синуса и косинуса, соответственно.

3. Правила дифференцирования векторов

1) $\frac{d}{dt}(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + ...) = \frac{d\bar{a}}{dt} + \frac{d\bar{b}}{dt} + \frac{d\bar{c}}{dt} + ...$

2) $\frac{d}{dt}(\varphi(t) \cdot \bar{a}(t)) = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \bar{a} + \varphi \cdot \frac{d\bar{a}}{dt}$. (Здесь $\varphi(t)$ - скалярная функция).

3) $\frac{d}{dt}(\bar{a}(t) \cdot \bar{b}(t)) = \frac{d\bar{a}}{dt} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \frac{d\bar{b}}{dt}$. (Это производная скалярного произведения).

4) $\frac{d}{dt}(\bar{a}(t) \times \bar{b}(t)) = \frac{d\bar{a}}{dt} \times \bar{b} + \bar{a} \times \frac{d\bar{b}}{dt}$. (Это производная от векторного произведения).

5) $\frac{d}{dt}\bar{a}(\varphi(t)) = \frac{d\bar{a}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$. (Это производная от сложной векторной функции скалярного аргумента).

5. Таблица неопределенных интегралов

$\int 0 \cdot dx = c$

$\int bdx = bx + c$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$

$\int shxdx = chx + c$

$\int \sin xdx = -\cos x \,|\, c$

$\int \cos xdx = \sin x + c$

$\int chxdx = shx + c$

$\int e^x dx = e^x + c$

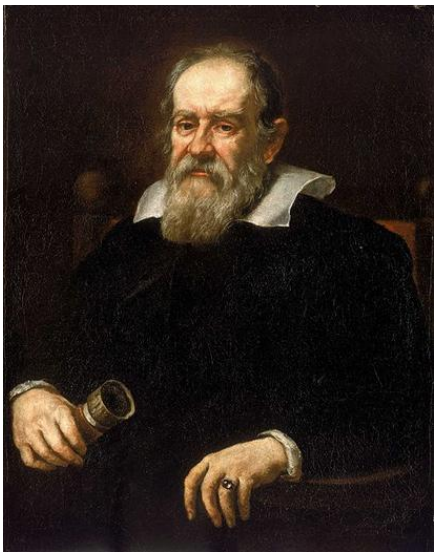
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

История механики в лицах

Галилео Галилей (15.02.1564 – 08.01.1642)

Итальянский физик, математик и астроном, один из основоположников современного естествознания, заложивший основы классической механики. Поначалу приверженец, затем противник астрологии. Сначала Галилео учился в монастыре Валломброза. Рос примерным, был лучшим по успеваемости в своем классе. Как только он окончил обучение, всерьез задумался о карьере священника, но его отец был против этого. В возрасте 17 лет поступает в Пизанский университет. Увлекается математикой. Изучает медицину. После 3 лет обучения семья теряет возможность платить за его обучение, и он покидает университет. Благодаря своему другу маркизу Гвидобальдо дель Монте в 1589 году Галилей возвращается в Пизанский университет в качестве профессора, получает кафедру математики, в 1592 г. по финансовым соображениям переходит на кафедру в Падуе. Первые астрономические наблюдения Галилей произвел в 1604 г., сконструировал в 1609 г. подзорную трубу (телескоп). С 1611 года – член Академии Деи Линчеи. Галилей открыл четыре спутника Юпитера, законы обращения Луны, лунный пепельный свет, горы на Луне, пятна на Солнце, вращение Солнца вокруг оси, фазы Венеры, выступ



(впоследствии было выяснено, что это кольцо) у Сатурна. Установил, что Млечный Путь состоит из большого количества отдельных звезд. Труды Галилея подтверждали правильность учения Н. Коперника о гелиоцентрической системе мира. Галилей заложил основы классической динамики, сформулировав принцип относительности движения, идеи инерции, закон свободного падения тел. Галилей также открыл параллелограмм сил и изохронизм качания маятника, сконструировал микроскоп, циркуль, термометр и гидростатические весы. Галилей развивал принципы механистического материализма. Он предложил идею материальной субстанции как единой неизменной основы природы, обладающей определенной структурой и требующей для своего описания исключительно механико – математических средств – «фигур, чисел и движений». В 1633 г. ученого арестовали и отдали под суд инквизиции за то, что он продолжал отстаивать точку зрения Коперника (геоцентрическая картина мира). Предстояла смертная казнь, однако ее отменили, учитывая тот факт, что Галилео – старый и больной человек, добровольно отрекшийся от собственных открытий. Скорее всего, его пытали, чтобы заставить это сделать. Лишь через 340 лет после смерти Галилея (в 1981 г.) Ватикан в лице папы Иоанна Павла II признал преследования ученого несправедливыми и согласился, что Земля действительно вращается вокруг Солнца.

Христиан Гюйгенс (14.04.1629 – 08.07.1695)

Нидерландский механик, физик, математик и астроном. Христиан Гюйгенс родился в знатной семье в Гааге и был вторым ребенком своих родителей. У него было еще три брата и сестра. Его отец – Константин Гюйгенс был широко образованным человеком, знал языки, в разное время был советником Вильгема II, затем Вильгема III. Король Яков I возвел его в сан рыцаря, а Людовик XIII наградил орденом Святого Михаила. Уже в раннем детстве Христиан обнаружил разносторонние способности. В восемь лет уже изучил латынь и арифметику, в двенадцать лет – греческий, французский, итальянский, и увлекся механикой. В 16 лет он поступает в Лейденский университет, где был учеником Ф. Скоутена, а два года спустя переходит в институт в Бреде для изучения юридических наук, математики и механики.

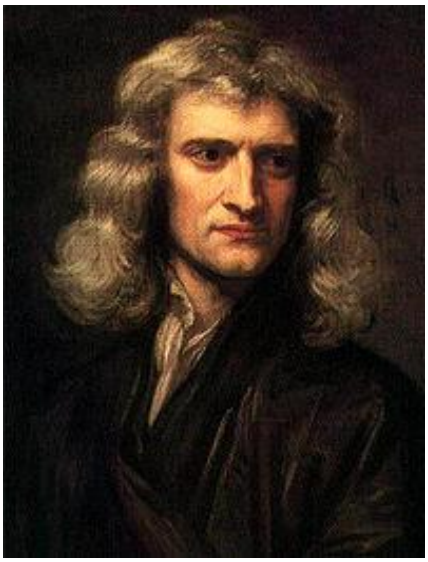
Труды Гюйгенса создали ему широкую известность среди ученых того времени. Он посещал Париж и Лондон, где общался с участниками кружков, из которых впоследствии образовались Лондонское королевское общество (1660 год) и Парижская Академия Наук (1666 год). Он был знаком с И. Ньютоном и Г. Лейбницем. За работы в области механики и математики он стал первым иностранным членом Лондонского королевского общества. В математике его работы были посвящены развитию анализа бесконечно малых величин (сейчас мы называем мат. анализом) и приложением полученных результатов к задачам геометрии, механики, физики, теории вероятностей. Его труд «О расчетах при игре в кости или о расчетах при азартной игре» (1657 г.) становится первой работой в области теории вероятности и вошел в первую часть «Искусства предположений» (1713 г.) Якоба I Бернулли. В 22 года он опубликовал работу по определению длины окружности, дуг эллипса и гиперболы. Определил касательные, максимум и минимум некоторых функций, исследовал трактрису, логарифмическую спираль, цепную линию и др. Занимался вычислением площади поверхности вращения, вычислением моментов инерции.

В механике Гюйгенсу принадлежит изобретение маятниковых часов (1657г.) и разработка их теории (1673 г.), он определил центр качения физического маятника, высказал ряд ценных умозаключений о центростремительной силе. В работе «О причинах тяжести» был на пути открытия закона всемирного тяготения, открытого И. Ньютоном. Еще один трактат «Об ударе тел» он написал для своего брата. Все эти вопросы входят в программы по теоретической механике высшей школы. Ценные

открытия сделаны Гюйгенсом в астрономии и в оптике. Собрание его трудов издало Голландское ученое общество.

Исаак Ньютон (04.01.1643 – 31.03.1727)

Английский физик, механик, астроном и математик, чл. Лондонского королевского о-ва (1672 .) и его президент (1703 г.), иностранный чл. Парижского АН (1699 г.). Род. в Вулсторпе. С 12 лет учился в школе в Грантеме. С 1661 по 1665 годы учился в Кембриджском университете. С 1669 г. был назначен смотрителем, а с 1699 – главным директором Монетного двора в Лондоне. Похоронен в английском национальном пантеоне – Вестминстерском аббатстве. В 1668 г. Ньютон получил степень магистра, а в следующем году его учитель И.Барроу уступил ему свою кафедру в Кембриджском университете. На этой кафедре Ньютон работал до 1701 г. Именно в эти годы он написал свои важнейшие труды. Работая смотрителем Монетного двора, Ньютон занимался по большей части упорядочением английского монетного дела и подготовкой к публикации своих работ за предыдущие годы. Достижения Ньютона в механике были подготовлены работами Г. Галилея, Х. Гюйгенса и др. ученых. В работе «Математические начала натуральной философии» он свел все известные до него и все найденные им самим сведения о движении и силе в одну дедуктивную систему. Установив несколько основных законов механики (закон инерции, закон независимого действия сил, закон о равенстве действия и противодействия), Ньютон вывел



из них все другие теоремы механики. Он открыл закон всемирного тяготения, и вычислил траектории тел, которые двигаются в разных условиях в поле тяготения, указал на ту общую силу, которая является первопричиной таких разнообразных явлений, как падение тел, вращение Луны вокруг Земли и планет вокруг Солнца, движение комет, приливы и отливы и т.д. Исследовал движение тел в среде, оказывающей сопротивление.

В 17 в. перед естествознанием возникла проблема отыскания законов движения и установления законов механики. Для этого существовавший математический аппарат был недостаточным. Заслуга Ньютона заключается в том, что одновременно с Г. Лейбницем (1646 – 1716 гг.), но независимо от него, он создал дифференциальное и интегральное исчисления, которые стали мощным средством решения новых задач. Вклад Ньютона в математику не исчерпывает созданием дифференциального и интегрального исчисления. В алгебре ему принадлежит метод численного решения алгебраических уравнений (метод Ньютона), важные теоремы о симметричных функциях корней алгебраических уравнений, об отделении корней, о проводимости уравнений и т.д.

Леонард Эйлер (15.04.1707 – 18.09.1783)

Математик, механик, физик и астроном. Академик восьми академий, в том числе, Парижской АН, Петербургской АН, член Лондонского королевского общества, Берлинской АН. По происхождению швейцарец. Окончил Базельскую гимназию, еще будучи в гимназии, слушал в Базельском университете лекции Иоганна I Бернулли. Бернулли заметил талантливость юного слушателя и начал с ним заниматься отдельно. Под его руководством Эйлер изучил труды известных математиков в подлинниках. Получив степень магистра в 1723 г. Эйлер начал бывать в доме своего учителя и подружился с сыновьями Бернули – Николаем и Даниилом. В 1725 году братьев Бернулли пригласили в Петербург, где они были избраны академиками Российской АН. Через год они сообщили Эйлеру, что и для него есть место, но в качестве физиолога при медицинском отделении академии. Эйлер тут же записывается на медицинский факультет Базельского университета и начинает успешно изучать новые науки. В 1727 г. он стал адъюнктом, то есть младшим по рангу академиком, в 1730 г. занял кафедру физики, а в 1733 стал академиком математики. В 1740 году началось тяжелое для России время регентства

Бирона, положение Петербургской АН становится шатким. Эйлер принимает предложение короля Фридриха II и в 1741 году переезжает в Берлин. Но связей с Российской АН не порывает. В 1746 году выходят три тома статей Эйлера, посвященных артиллерии, в которых совершенствуются формулы баллистики и делаются удобными для практического применения. В 1775 году в обход своего устава и с согласия французского правительства избирает Эйлера своим девятым «присоединенным членом» (по уставу академии должно было быть не более восьми иностранных членов). В Россию Эйлер возвращается в 1776 году. Л. Эйлер – ученый необычайной широты интересов и творческой продуктивности. Автор свыше 850 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближенным вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и других, оказавших значительное влияние на развитие науки. За время существования Академии наук в России, считается одним из самых знаменитых ее членов. Почти во всех областях математики встречается его имя: теоремы Эйлера, тождества Эйлера, функции, интегралы, формулы (например, для критической силы продольно сжатых упругих стержней), углы, уравнения (вспомните уравнения движения тела с одной неподвижной точкой), подстановки и т.д. Он первым вводит понятие функции комплексной переменной, находит связь между тригонометрическими и показательными функциями. Тригонометрию он изложил в таком виде, в котором мы пользуемся и сейчас. Он начал развивать новое направление в мат. анализе – вариационное исчисление, которое позже было подхвачено Лагранжем, в итоге появился новый раздел математики. Он оказал плодотворное влияние на развитие математических исследований в России в восемнадцатом веке. Петербургская математическая школа, к которой причисляются академики С.К. Котельников, С.Я. Румовский, Н.И. Фусс, М.Е. Головин и др. выполнила под руководством Эйлера целый ряд интересных исследований, создала обширную учебную математическую литературу, вела огромную просветительскую работу.

Кёниг Иоганн Самуэль (31.07.1712 — 21.08.1757)

Швейцарский математик и механик. Член-корреспондент Парижской АН (1740), член Берлинской АН (1749), Лондонского Королевского общества (1750), Гёттингенской АН. Родился 31 июля 1712 в Бюдингене (Германия). Иоганн Самуэль Кёниг был сыном швейцарского теолога и востоковеда Самуэля Генриха Кёнига, преподававшего в Берне, и его жены, Анны Марии Нётигер. Заниматься математикой начал под руководством своего отца. С 1729 г. учился в Лозанне, а с 1730 по 1733. – в Базельском университете у Иоганна Бернулли, у которого годами раньше учился и Л.Эйлер до отъезда в Петербург, а с 1733 по 1735 гг. он учился у Даниила Бернулли. В 1735–1737 г. он продолжил образование в Марбургском университете у Христиана Вольфа, где изучал философию еще одного великого математика Лейбница.

Работал юристом в Берне (1737 г.) и в Париже (1738–1741 гг.). В Париже его однокурсник по Базельскому университету П.Л. Мопертюи представил его маркизе дю Шатле, которой Кёниг преподавал математику и философию Лейбница. В 1740 г. был избран членом-корреспондентом Парижской академии наук. В 1745 г. К. переезжает в Нидерланды, где стал профессором философии, а с 1747 г. – и математики, университета в городе Франекер. С 1749 г. он – профессор философии и естественного права Гаагского университета. В 1751 г. Кёниг, принятый в 1749 году в члены Берлинской академии наук, переехал в Берлин. В историю механики Кёниг вошел прежде всего благодаря теореме о кинетической энергии механической системы в общем случае ее движения (1751 г.). Сегодня она называется теоремой Кёнига: ***кинетическая энергия механической системы в общем случае ее движения равна сумме кинетической энергии центра масс системы, в которой как бы сосредоточена масса всей системы, и кинетической энергии механической системы в ее относительном движении относительно центра масс.***

$$T = Mv_c^2/2 + T_{отн}, \quad \text{где} \qquad T_{отн} = \sum_{k=1}^{n} m_k v_{k,отн}^2/2 .$$

В учебниках и учебных пособиях для высшей школы излагается обычно теорема Кёнига о кинетической энергии твердого тела в плоскопараллельном движении.

$$T = Mv_c^2/2 + J_{zC}\omega^2/2 .$$

Теорема. ***Кинетическая энергия твердого тела складывается из кинетической энергии поступательного движения тела со скоростью центра масс и кинетической энергии тела во вращательном движении тела относительно оси, проходящей через центр масс тела, перпендикулярно к плоскости, в которой движется цент масс тела.***

Умер Кёниг в 45 лет (1757г) от сердечной недостаточности.

Жан Лерон Д'Аламбер (д'Аламбер, Даламбер) (1717–1783 гг.)

Известный французский учёный-энциклопедист-философ, математик и механик. Член Парижской академии наук (1740), Французской Академии (1754), Петербургской (1764) и других академий. Д'Аламбер был незаконным сыном маркизы де Тансен от артиллерийского офицера Детуша. Вскоре после рождения младенец был подкинут матерью на ступени парижской «Круглой церкви св. Иоанна». Воспитывался в усыновившей его семье стекольщика Руссо. Отец в это время был за границей. Вернувшись во Францию, Детуш привязался к сыну, часто навещал его, помогал приемным родителям и оплатил образование Д'Аламбера, хотя официально признать не решился. Мать-маркиза никакого интереса к сыну так и не проявила. Позднее, став знаменитым, Д'Аламбер не забывал приемных родителей, помогал им материально и с гордостью называл своими родителями. В 1726 г. отец, ставший генералом, умирает. По завещанию Д'Аламбер получает пособие в 1200 ливров в год, воспитывается наряду с двоюродными братьями и сёстрами, но до 1765 года, то есть до 48-летнего возраста, живет по-прежнему в семье приёмных родителей. Мальчик получил хорошее образование – сначала в коллегии Мазарини (получил степень магистра свободных наук), затем в Академии юридических наук. В это время он начинает изучать математику. В возрасте 22 лет Д'Аламбер представил Парижской академии свои сочинения, а в 23 года был избран адъюнктом Академии. В 1743 г. вышел «Трактат о динамике», где сформулирован известный студентам фундаментальный «Принцип Д'Аламбера», сводящий динамику несвободной системы к статике. В 1748 г. он блестяще исследует задачу о колебаниях струны.

Решения дифференциального уравнения 2-го порядка в частных производных Д'Аламбер представил как сумму двух произвольных функций, и по граничным условиям сумел выразить одну из них через другую. Эти работы Д'Аламбера, а также последующие работы Л.Эйлера и Д.Бернулли положили начало математической физики. Д'Аламберу принадлежат также важные результаты в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений 1-го и 2-го порядков, которые встречаются в задачах динамики. В 1751–1757 гг. Д'Аламбер работал вместе с Дидро над созданием знаменитой «Энциклопедии наук, искусств и ремёсел». Статьи 17-томной «Энциклопедии», относящиеся к математике и физике, написаны им. В первых томах знаменитой «Энциклопедии» Д'Аламбер поместил важные статьи – «Дифференциалы», «Уравнения», «Динамика» и «Геометрия», в которых подробно излагал свою точку зрения на актуальные проблемы науки. «Энциклопедия» сыграла большую роль в распространении идей Просвещения и идеологической подготовке Французской революции. В 1764г. в статье «Размерность» (для Энциклопедии) впервые высказана мысль о возможности рассматривать время как четвертое измерение. В 1752 году, решая дифференциальное уравнение гидродинамики в частных производных эллиптического типа (обтекания тела), впервые применил функции комплексного переменного. Д'Аламбер вел активную переписку с российской императрицей Екатериной II. В середине 1760-х годов Д'Аламбер был приглашен ею в Россию, в качестве воспитателя наследника престола, однако приглашения не принял. Умер Д'Аламбер после долгой болезни в 1783 году. Церковь отказала «отъявленному атеисту» в месте на кладбище, и его похоронили в общей могиле.

Жозеф Луи Лагранж (25.01.1736–10.04.1813 гг.)

Французский математик и механик. Член Берлинской АН (1759г.), член Парижской АН (1772 г. – иностранный чл. академии, с 1787г. – действит. чл. академии), почетный член Петербургской АН (1776г.). Родился в Итальянском городе Турине, где и получил высшее образование в артиллерийском

училище (школе). Еще будучи слушателем начал преподавать в этом же училище математику, а в 19 лет Лагранж уже стал профессором в артиллерийской школе. Под влиянием книги Э. Галлея «О преимуществах аналитического метода» Лагранж начал исследования в области математического анализа. Книга Лагранжа «О способах нахождения наибольших и наименьших величин интегралов» принесла ему признание. По рекомендации Л. Эйлера, который ознакомился с этой книгой еще до ее опубликования и признал преимущества метода Лагранжа над своим, в 23 года Лагранж был избран членом Берлинской АН. Работы Эйлера и Лагранжа в этой области были первыми в новом разделе математического анализа, который Л.Эйлер назвал вариационным исчислением. С 1766 по 1787гг. Лагранж был президентом Берлинской АН. В 1787 году, после кончины короля Фридриха II, Лагранж переезжает в Париж и избирается действительным членом Парижской АН. В Париже выходит подготовленный еще в Берлине его труд «Аналитическая механика» (1788). Эта работа стала вершиной его научной деятельности. В ней дано большое число новых подходов.

В основу статики положен «принцип возможных перемещений», в основу динамики – «общее уравнение динамики», которое получено сочетанием принципа возможных перемещений с принципом Даламбера. С основами аналитической механики сейчас студенты знакомятся в курсах теоретической механики. В целом построенная Лагранжем классическая аналитическая механика предстает как учение об общих дифференциальных уравнениях движения произвольных механических систем. Эти уравнения и сейчас носят название «Уравнения Лагранжа второго рода». Другими словами, этой работой Лагранж превратил механику в общую науку о движении тел любой природы – жидких, газообразных, упругих. Считается, что этим трудом Лагранжа завершается математизация механики. Огромен и вклад Лагранжа в развитие современной математики и ее приложений. А именно, в создание вариационного исчисления, в развитие теории дифференциальных уравнений, в построение методов и в решение задач на максимум и минимум, в развитие алгебры и теории вероятности, в развитие теории чисел.

Все политические бури обошли Лагранжа стороной – каждому новому правительству был нужен великий математик. Во время Французской революции он принимает участие в работе комиссии по разработке метрической системы мер и весов, введению нового календаря. В 1795 году открывается Институт Франции, который заменил Королевскую академию наук. Лагранж становится главой физико-математического класса. После создания в 1797г. в Париже Политехнической школы, вел активную преподавательскую деятельность, читал курс математического анализа. Умер Жозеф Луи Лагранж в 1813 году, похоронен в Пантеоне (усыпальница выдающихся людей Франции в Париже). Имя Лагранжа внесено в список 72 величайших ученых Франции, помещенный на первом этаже Эйфелевой башни.

Карно Лазар Никола́ - Маргерит (13.05.1753, Ноле, – 02.08.1823, Магдебург-Германия)

Французский военный инженер, математик и механик, государственный и военный деятель эпохи Французской революции и Наполеона, член Парижской АН (Института Франции) с 1791г. После Реставрации Бурбонов в 1816 г. выслан из Франции, жил в Варшаве и Магдебурге. Карно родился в многодетной семье адвоката (в семье было 18 детей). В 1771 г. поступил в Мезьерскую инженерную школу, где учился у Г. Монжа. В 1773 году после окончания военной Мезьерской школы поступил на службу в инженерные войска. Служил инженером в Кале и в 1784 году издал сочинение «Опыт о машинах», заслужившее лестную оценку Араго. В том же году Карно представил в Академию наук научную работу о воздухоплавании и получил от Дижонской академии премию.

Математические труды относятся к анализу и геометрии. Карно исследовал различные способы обоснования математического анализа, изложил ряд идей проективной геометрии и топологии. В трактате «Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых» (1797) исследовал различные способы обоснования математического анализа, подверг критике теорию аналитических функций Лагранжа; предположил, что правильность результатов анализа можно доказать с помощью теоремы о взаимном погашении ошибок, происходящем при отбрасывании в выкладках тех или иных бесконечно малых. Сформулировал (1803) теорему о произведении простых отношений, в которых точки пересечения алгебраической линии со сторонами треугольника делят эти стороны (теорема Карно). В

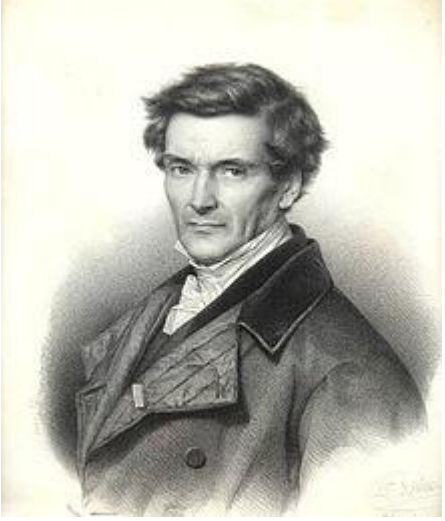
работах «О соотношении геометрических фигур» (1801), «Геометрия положения» (1803), «Этюд о теории трансверсалей» (1806) предложил ряд идей проективной геометрии. В работе «Геометрия положения» высказал некоторые идеи топологии. Первым предложил название «Комплексное число».

В механике предпринял первую попытку создания динамики машин. В работе «Опыт о машинах вообще» (1783), переизданной под названием «Основные принципы равновесия и движения» (1803), предпринял попытку создания динамики машин, проанализировал понятие сил инерции. Вывел уравнение живых сил как основное уравнение движения машины. Следуя духу своего времени, он считал, что для достижения наивысшего коэффициента полезного действия системе нужно избегать ударов, трения и резких, скачкообразных, изменений скорости, считая их потерей «живой силы». Исследования по построению машины с наибольшим КПД продолжил его сын, Сади Карно, предложивший цикл с наибольшей теоретически достижимой эффективностью, названный его именем. Занимался Л. Карно также теорией фортификации. В 1810 году Л. Карно издал составленный им по поручению Наполеона «Трактат о защите крепостей», переведенный почти на все европейские языки.

Не менее любопытна и его государственная деятельность. С большим энтузиазмом Карно принял Великую французскую революцию, был депутатом Законодательного собрания (1791–1792), Конвента (1792–1795, в 1794 г. – президент), членом Комитета общественного спасения (с 1793), где стоял во главе военного управления (включая производство оружия и снаряжения). Проявил себя как крупный военный организатор борьбы с интервентами и роялистами. Создал 14 армий Французской республики, разработал планы ряда кампаний, осуществлял руководство ими. Был прозван «организатором побед». В 1795–1797 гг. – член Директории и руководитель военного ведомства. В 1797–1800 гг. – в изгнании в Швейцарии. Военный министр (1800). Голосовал против установления империи, после чего вынужден был уйти в отставку. Вернулся на государственную службу в 1814 г., во время «Ста дней» Наполеона был министром внутренних дел и возведен в графское достоинство. Прославился героической обороной Антверпена. Когда в начале 1814 года Франции грозило вторжение союзных войск, Карно предложил свои услуги Наполеону и был назначен губернатором Антверпена, оборона которого составляет один из блестящих военных подвигов Карно. В 1816 г. после Реставрации выслан из Франции, жил в Варшаве и Магдебурге. В 1834 году в Антверпене воздвигнут памятник Карно в честь защиты этого города в 1814 году, а в 1881 году поставлена статуя Карно на родине его, в Нолэ. В 1883 г. его останки перевезены из Магдебурга и захоронены в Пантеоне (в Париже). Сыновья: Сади Карно – великий физик, основоположник термодинамики. Ипполит Лазар Карно – политик. Внук Лазара Карно, сын Ипполита, Мари Франсуа Сади Карно, был инженером, политиком и президентом Франции, убит анархистом в 1894 году.

Кориолис Гаспар-Гюстав (21.05.1792 — 19.09.1843 гг.)

Французский **м**еханик, математик и инженер. Член Парижской АН (1836 г.) Родился в Париже. С раннего детства Кориолис отличался здоровьем, слабым настолько, что у него, как писал его биограф, «каждое утро возникала проблема, как прожить до вечера». Несмотря на это он стал одним из великих ученых в области механики. В 18 лет (в 1810 г.) он окончил, как и Лагранж, Политехническую школу, а в 1812 г. Школу мостов и дорог. Четыре года проработал на стройках, но уже с 1816 г. начал преподавать в Политехнической школе, где вскоре стал профессором. В 1831 г. его назначают директором учебной части Политехнической школы. Одновременно преподавал в Центральной школе искусств и ремесел, профессором которой он избирается в 1829 году, и в Школе мостов и дорог. Научные интересы Кориолиса были связаны в первую очередь с решением технических задач. Однако, решая такие задачи, он не только использовал строго научные методы, но и вынужден был развивать саму теоретическую механику. В 1829 году в своей статье «Расчет действия машин» («Трактат о механике твердых тел и о расчете действия машин» (1829г.)), он писал, что в существовавших в то время прикладных работах, посвященных действию машин, теория двигателей развита не полностью, а с другой стороны, труды по теоретической механике не содержат почти ничего, относящегося к теории машин. В итоге Кориолис первым сформулировал понятие «механическая работа» в его современном понимании. В связи с формулировкой нового понятия «работа» он предложил переопределить понятие «живая сила», использовавшееся в то время. Наименование «живая сила» было введено в науку Лейбницем и



первоначально обозначало величину mv^2. То есть под живой силой понималась величина в два раза большая, чем то, что мы называем кинетической энергией точки сегодня. Учитывая связь, что была выявлена между механической работой и величиной $mv^2/2$ (теорема об изменении кинетической энергии), Кориолис предложил называть живой силой именно эту величину. В итоге термин «живая сила» приобрел то же содержание, что и современный термин «кинетическая энергия». Запросы техники подтолкнули Кориолиса и к работе над теоремой о сложении ускорений. Кориолис дал окончательную формулировку теории относительного движения, введя понятия о так называемых «ускорении» и «силе» Кориолиса. В вузах изучается теорема Кориолиса, в которой полное ускорение он представил в виде суммы трех ускорений: переносного, относительного и ускорения, которое получило затем название «кориолисово ускорение». В начале первой из статей, посвященных этой теореме, он писал: «Определение движения системы тел, присоединенных произвольным образом к точкам, которые сами переносятся в пространстве, является одним из вопросов, наиболее интересных в теории машин». 6 июня 1831 года Кориолис сделал в Академии наук доклад, посвященный доказательству теоремы в предварительном варианте, а в следующем, 1832 году, в свет вышла его статья, написанная по материалам этого доклада. В работе «Об уравнениях относительного движения системы тел» (1835 г.) Кориолис рассмотрел более общий случай. В новой работе он ввел в рассмотрение силы инерции нового типа. Их он определил как силы, перпендикулярные одновременно относительной скорости и оси вращения [в частном случае, в современных обозначениях – это векторное произведение $2m\cdot(\overline{\omega}_{пер}\times\overline{v}_{\text{отн}})$]. Видя между этими силами и центробежной силой инерции некоторую аналогию, Кориолис дал им наименование «сложные центробежные силы». Предложенное название не прижилось, и вскоре общепринятым названием новых сил стало «силы Кориолиса». 1835 год считается годом появления теоремы Кориолиса в ее общем виде. К другим научным достижением Кориолиса можно отнести открытие им явления ползучести материалов, которое он сделал в экспериментах со сжатием свинцовых образцов. Умер Гаспар-Гюстав Кориолис 19 сентября 1843 года в возрасте пятидесяти одного года. Похоронен на кладбище Монпарнас в Париже.

Остроградский Михаил Васильевич (24.09.1801 – 01.01.1861)

Наиболее выдающиеся исследования Остроградского относятся к обобщениям основных принципов и методов механики. Он внес существенный вклад в развитие вариационных принципов. Вариационные принципы механики входят в круг вопросов, интересовавших ученого в течение всей его жизни. Постоянное возвращение к вариационному исчислению и вариационным принципам механики роднит его с Лагранжем, одним из создателей вариационного исчисления и творцом аналитической механики.

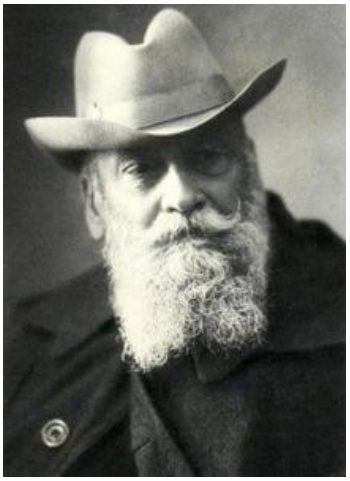
Михаил Остроградский изучал проблемы аналитической механики в самом общем виде. Такая постановка вопроса вела в свою очередь к изучению вариационного исчисления, в которое как частный случай входит динамика. Мемуары Остроградского «О дифференциальных уравнениях, относящихся к задаче «изопериметров», напечатанные в «Трудах» Петербургской академии наук в 1850 году, принадлежит в равной мере механике и вариационному исчислению. В силу такого подхода исследования Остроградского по механике значительно обогатили и развили понимание вариационных принципов, прежде всего, с математической точки зрения. Поэтому интегрально-вариационный принцип, сформулированный Гамильтоном, справедливо называется принципом Гамильтона-Остроградского. Его труды по механике, включая «Лекции по аналитической механике» и «Курс небесной механики», явились фундаментом, на котором строилась и развивалась русская школа в области механики. Работы Остроградского по математическому анализу в большинстве случаев вызваны его исследованиями по математической физике и механике: они дают решение математических вопросов, поставленных теоретическим естествознанием того времени. Так, в связи с исследованиями вопросов распространения тепла в твердом теле он получил знаменитую

формулу, вошедшую теперь во все учебники математического анализа под именем формулы Остроградского-Грина. В настоящее время эта формула играет огромную роль в математической физике, векторном анализе и других разделах математики и ее приложений. Разработки Остроградского, связанные с интегрированием уравнений динамики, оказались значимыми для Н.Д. Брашмана и Н. Е. Жуковского.

Остроградский оказал неоценимую услугу русской науке, воспитав целую плеяду талантливых учеников, впоследствии ставших выдающимися представителями русской науки. В их числе И.А.Вышнеградский – основоположник теории автоматического регулирования; Н. П. Петров – создатель гидродинамической теории смазки и автор классических исследований по теории механизмов, А. Н. Тихомандрицкий, Е. И. Бейер, Д. М. Деларю, Д. И. Журавский, И. П. Колонг, Е. Ф. Сабинин – профессора математики и многие другие математики и выдающиеся инженеры. Идеи Остроградского легли в основу методических разработок, и сегодня работа высшей школы сформирована в том числе и благодаря Остроградскому, крупнейшему педагогу-практику 19-го века.

Жуковский Николай Егорович (17.01.1847–17.03.1921)

Русский ученый, создатель аэродинамики как науки. В.И. Ленин назвал его отцом русской авиации. Заслуженный профессор Московского университета, профессор теоретической механики Императорского Московского технического училища (с 1918 года – Московского высшего технического училища им. Н.Э. Баумана); член-корреспондент Императорской Академии наук по разряду математических наук (1894 г.). Н.Е.Жуковскому принадлежат замечательные труды по аэродинамике, гидравлике, механике и математике.



Работы Жуковского в области аэродинамики явились источником основных идей, на которых строится авиационная наука. Он всесторонне исследовал динамику полета птиц, 3 ноября 1891 года сделал доклад «О парении птиц». В 1892 году сделал доклад «По поводу летательного снаряда Чернушенко»; составив основные уравнения динамики для центра тяжести планирующего тела (то есть при постоянном угле атаки), Жуковский нашел траектории при различных условиях движения воздуха, в том числе теоретически предсказал возможность мертвой петли. Жуковский вел большую педагогическую работу, организовал курсы для подготовки инженеров-конструкторов самолетов, на основе которых выросла Военно-воздушная инженерная академия им. Н.Е. Жуковского. В 1918 году Жуковский создал легендарный ЦАГИ. Центральный аэрогидродинамический институт. Среди его учеников Туполев А.Н. – сконструировал множество самолетов и стал учителем для Сергея Королева, протянув ниточку от Жуковского до космических полетов, Ветчинкин В.П. – профессор, принимал участие в создании крылатых ракет и реактивных самолетов; Юрьев Б.Н. принимал участие в создании Московского авиационного института и двухвинтового вертолета «Омега», Голубев В. В. – механик, математик, академик, генерал-майор инженерно-технической службы, Микулин А. А. – создал первый советский поршневой двигатель с водяным охлаждением и турбореактивный двигатель для самолета, Мусиньянц Г.И. – ученый и конструктор, создатель весов для аэродинамических труб. Жуковский – автор фундаментального учебника по теоретической механике.

Мещерский Иван Всеволодович (10.08.1859 – 07.01.1935)

Один из крупнейших русских механиков, основоположник механики тел переменной массы. Ученик П.А. Чебышева.Родился в небогатой архангельской семье. Вся его жизнь связана с Петербургом (Ленинградом). В семнадцать лет поступил на математическое отделение физико-математического факультета Петербургского университета, где увлекся механикой. После успешного окончания курса в 1882 году был оставлен при университете для подготовки к профессорскому званию. В 1891году он занял кафедру механики Петербургских высших женских курсов, которую курировал до их слияния с университетом в 1919 году. В 1897 году в Петербургском университете защитил диссертацию по прикладной математике, и получил степень магистра. В 1902 году был приглашен на заведование кафедрой Петербургского политехнического института, с которой была связана вся его последующая научно-педагогическая деятельность. В 1904 году выходит его выдающаяся работа «Уравнения движения точки переменной массы в общем случае», в которой дается вывод уравнений движения точки,

масса которой является функцией времени из-за присоединения или отделения материальных частиц, указал на возникновение реактивной силы и реактивной тяги. Эти уравнения вошли в литературу под названием уравнений Мещерского. И.В. Мещерский сформулировал и обратную задачу, в которой по известным траекториям и действующим на точку силам определяется закон изменения массы точки. В этих вопросах он опередил свое время.

Практическое значение трудов И.В. Мещерского в полном объеме стало понятно только с началом эры ракетостроения и последующего освоения Космоса. За заслуги перед наукой в 1928 году ему присвоено звание «Заслуженный деятель науки РСФСР», его именем назван один из Лунных кратеров.

В историю механики И.В. Мещерский вошел и как выдающийся педагог высшей технической школы. «Сборник задач по теоретической механике», подготовленный группой преподавателей политехнического института под его руководством до настоящего времени является одним из лучших и самым распространенным задачником, на котором выросли десятки поколений инженеров. Этот задачник выдержал более 40 переизданий в нашей стране, переведен на многие языки Мира, был принят в качестве основного в технических вузах многих стран, в том числе в американских высших технических учебных заведениях. Другая его работа «Преподавание механики и механические коллекции в некоторых высших учебных заведениях Италии, Франции, Швейцарии и Германии» (1895 год) способствовала повышению научного уровня преподавания механики в высших технических учебных заведениях России и СССР.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика. М.: Интеграл-пресс, 2006.– 603 с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Изд. 15-е, стереотипное. М.: «Высшая школа», 2006.– 416 с.
3. Дронг В.И., Дубинин В.В., Ильин М.М. и др. Курс теоретической механики. Под ред. К.С. Колесникова, В.В. Дубинина. Изд. 4-е, исправленное. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2011. – 760 с.
4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. Изд. 8-е, стереотипное.– СПб.: «Лань», 2011. – 720 с.
5. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Изд. 11-е, стереотипное.– СПб.: «Лань», 2009. – 736 с.
6. Шигабутдинов Ф.Г., Шигабутдинов А.Ф. Краткий курс теоретической механики. Часть 1. Статика. Казань: Изд. Казанского государственного архитектурно-строительного университета, 2009. – 171 с.
7. Шигабутдинов Ф.Г., Шигабутдинов А.Ф. Краткий курс теоретической механики. Часть 2. Кинематика. Казань.: Изд. Казанского государственного архитектурно-строительного университета, 2012.– 176 с.
8. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике. Изд. 51-е, стереотипное, СПб.: «Лань», 2012. – 448 с.
9. Сборник задач по теоретической механике. Под редакцией К.С. Колесникова. Изд. 2-е.– М.: Наука, Физматлит, 1989.–447 с.
10. Сборник коротких задач по теоретической механике. Под ред. О.Э. Кепе. Изд. 3-е, стереотипное, СПб.: «Лань», 2009.– 368 с.
11. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. Статика и кинематика. Т.2. Динамика. – Спб.: ООО «Лань», 2012. – 1312 с.
12. Айзенберг Т.Б., Воронков И.М., Осецкий В.М. Руководство к решению задач по теоретической механике. Изд. 6-е стереотипное. – М.: Высшая школа, 1968. – 419 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ОТ АВТОРА_____3

ГЛАВА 1. ДИНАМИКА ТОЧКИ

§ 1.1. Краткие сведения из теоретического материала к гл.1_____4
§ 1.2. Решение первой задачи динамики_____ 8
§ 1.3. Решение второй задачи динамики _____ 12
§ 1.4. Задачи на относительное движение точки_____ 23
§1.5. Задачи на применение теоремы об изменении количества движения точки 26
§ 1.6. Задачи на применение теорем об изменении моментов количества движения точки_____ 28
§ 1.7. Задачи на вычисление работы, мощности и применение теоремы об изменении кинетической энергии точки_____ 30
§ 1.8. Задачи на свободные прямолинейные колебания точки_____ 35
§ 1.9. Задачи на прямолинейные свободные затухающие колебания материальнойточки_____39
§ 1.10. Задачи на вынужденные колебания точки с учетом сил сопротивления, пропорциональных скорости_____ 40
§ 1.11. Задачи на применение принципа Даламбера для точки _____ 40

ГЛАВА 2. ЗАДАЧИ ПО ДИНАМИКЕ СИСТЕМЫ

§ 2.1. Краткие сведения из теоретического материала к гл.2_____44
§ 2.2. Задачи на применение теоремы о движении центра масс механической системы_____49
§ 2.3. Задачи на применение теоремы об изменении количества движения механической системы_____ 51
§ 2.4. Задачи на вычисление работы, мощности и применение теоремы об изменении кинетической энергии механической системы_____54
§ 2.5. Задачи на применение принципа Даламбера для механических систем____58

ГЛАВА 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

§ 3.1. Краткие сведения из теоретического материала к гл.3_____ 63
§ 3.2. Задачи на применение принципа возможных перемещений_____68
§ 3.3. Задачи на применение общего уравнения динамики_____ 74
§ 3.4. Уравнение Лагранжа второго рода_____ 79

ГЛАВА 4. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ УДАРА

§ 4.1. Краткие сведения по элементарной теории удара_____87
§ 4.2. Задачи на определение характеристик удара_____ 90

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Моменты инерции некоторых тел_____92
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Краткие сведения из математики_____94
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. История механики в лицах_____102
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ_____ 111
СОДЕРЖАНИЕ_____ 112

Шигабутдинов Ф. Г.

СБОРНИК ЗАДАЧ

ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Часть 3. ДИНАМИКА

Учебное пособие