Р.А.Каюмов

Сопротивление материалов

Конспект лекций

Казань 2010

УДК 539.2/.6
ББК 30.121
К31

Каюмов Р.А.
К31 Сопротивление материалов. Конспект лекций. Казань: КГАСУ, 2010.- 170с.

ISBN 978-5-7829-0282-7

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

В учебном пособии изложены основные понятия, допущения и законы, применяемые в сопротивлении материалов, методы решения задач растяжения, изгиба, кручения и потери устойчивости брусьев. Теоретическое изложение сопровождается примерами расчета.

Учебное пособие предназначено для студентов специальностей: 290300,270100,27010,291100.

Табл.6. Илл. 102. Библиогр. 20 назв.

Рецензенты:

заведующий кафедрой «Сопротивление материалов» КГТУ имени А.Н.Туполева академик АН РТ, доктор физико-математических наук профессор **В.Н.Паймушин**

заведующий кафедрой «Теоретическая механика и сопротивление материалов» КГТУ имени С.М.Кирова доктор физико-математических наук профессор **М.Н.Серазутдинов**

УДК 539.2/6.
ББК 30.121

JSBN 978-5-7829-0282-7

ВВЕДЕНИЕ

В 1638 году вышла книга Галилео Галилея «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению», этот год и считается годом рождения науки о сопротивлении материалов (а также раздела «динамика» теоретической механики), хотя некоторые правила оценки прочности сооружений были известны задолго до этого.

Сопротивление материалов – это наука, которая изучает (в узком смысле) проблемы *прочности, жесткости и устойчивости* брусьев - элементов различных сооружений и конструкций (*брус* - это тело, у которого два размера много меньше третьего).

Конструкция называется *разрушенной*, если под действием нагрузок она разделяется на части. Будем говорить, что конструкция *выдержит* данную внешнюю нагрузку, если она не разрушится при этой нагрузке.

Конструкция называется *прочной*, если под действием рабочей (проектной) нагрузки не возникает таких воздействий на его элементы, которые превышают их нормативные значения, вызывающие *опасность* разрушения (рабочими или проектными называются нагрузки, которые предполагается прикладывать к конструкции по проекту). Эти нормативные значения назначаются заказчиками. Поэтому, когда говорят, например, что вторая конструкция является более прочной по сравнение с первой, то это означает, что величины воздействий на *элементы* второй конструкции меньше по сравнению с первой.

Конструкция называется *жесткой*, если рабочие нагрузки вызывают ее деформацию в пределах нормы.

Упругая конструкция называется *устойчивой*, если после добавления к внешним силам небольших нагрузок, конструкция также деформируется мало, а после снятия этих нагрузок возвращается в исходное состояние равновесия.

Для решения вопросов прочности, жесткости и устойчивости брусьев большое значение имеют их размеры и форма, особенно геометрические характеристики их поперечных *сечений*. Как и в других дисциплинах, некоторые термины в сопротивлении материалов имеют двоякое значение.

Например, говорят «проведем сечение». Это означает, что тело мысленно разделено (рассечено) на две части плоскостью ***П*** (см. рис.1). Если не оговорено противное, то сечение проводят всегда перпендикулярно оси бруса.

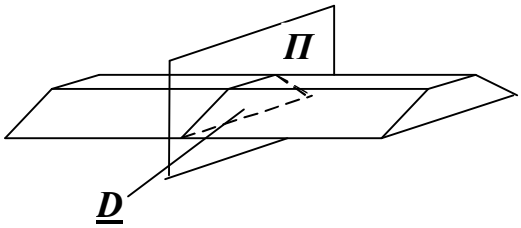


Рис 1. Сечение бруса

С другой стороны, под термином «сечение» понимают плоскую фигуру ***D***, площадь которой обозначается буквой ***A***.

Весьма специфичным в сопротивлении материалов является вопрос о системе координат. При определении реактивных сил и моментов можно использовать любую систему. При определении же величин, являющихся предметом сопротивления материалов, для того, чтобы формулы были простыми, используются следующие правила для введения системы координат.

1. Проводится сечение (см. рис. 2). Его положение обычно определяется продольной координатой ***s*** (длиной дуги оси бруса). Начало координаты ***s*** может вводиться произвольно (оно может быть на левом конце, в середине бруса и т.д.). В криволинейных брусьях положение сечения может определяться угловой координатой.
2. В исследуемом сечении вводится местная правая система координат ***xyz*** (рис. 2), причем, ось *z* направляется по оси бруса. Начало координат располагается в центре тяжести сечения .

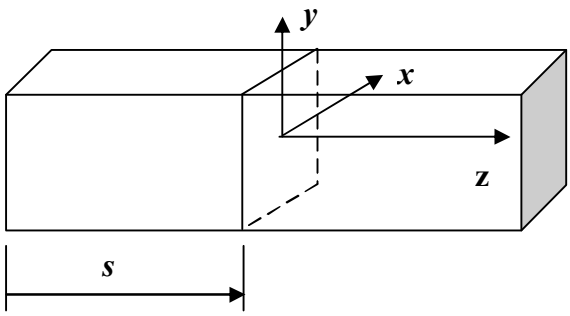


Рис.2

Таким образом, в первую очередь необходимо уметь определять центр тяжести фигуры. Кроме того, жесткость и прочность балки при изгибе зависят от того, в каком направлении приложены силы. Следовательно, необходимо уметь определять направление наибольшей жесткости балки. Помочь решить эти вопросы позволяет теория геометрических характеристик сечений бруса, некоторые основные положения которой изложены ниже.

1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЙ

Одним из наиболее важных понятий во многих дисциплинах (в частности, в сопромате) является понятие момента некоторого объекта относительно оси. В различных областях науки вводятся различные моменты в зависимости от исследуемого объекта (например, в теоретической механике вводят момент силы, в теории вероятности вводят моменты случайной величины, в математике – момент и т.д.). Все они связаны с понятием плечо, которое представляет собой расстояние от объекта до оси. Если умножить плечо на величину, которая характеризует объект, то получим момент первого порядка. Если взять квадрат плеча, то получим момент второго порядка, если взять плечо в третьей степени, то получим момент третьего порядка и т.д.

1.1. Статический момент фигуры

В теории геометрических характеристик сечений бруса исследуемым объектом является площадь этого сечения. Рассмотрим сначала бесконечно малую площадь *dA*. Расстояние *a* от центра *dA* до оси *x* назовем ее плечом.

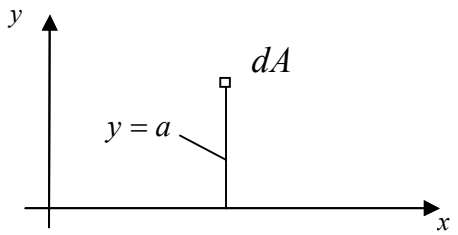


Рис1.1

<u>Статическим моментом dS_x относительно оси x</u> бесконечно малой площади *dA* называется произведение *dA* на *a:*

$$dS_x = dA \cdot a \tag{1.1}$$

Учитывая, что *a*=*y* запишем:

$$dS_x = dA \cdot y$$

Если фигура имеет конечную площадь, то мы её можем разбить на бесконечно малые площади и для каждой из них найти статический момент. Просуммировав их, найдем статический момент всей фигуры относительно оси *x*.

$$S_x = \sum dS_x = \int_A dS_x = \int_A y \cdot dA \tag{1.2}$$

Аналогично вводится понятие статического момента относительно оси *y*

$$S_y = \int_A x \cdot dA \qquad (1.3)$$

<u>Вычисление статических моментов.</u>

Используем для получения формулы вычисления S_x , S_y аналогию с моментом силы в теоретической механике. Будем считать что наша фигура dA имеет толщину t, тогда объём фигуры :

$$dV = t \cdot dA$$

Вес dP фигуры dA равен произведению удельного веса $\rho \cdot g$ на объём dV :

$$dP = \rho \cdot g \cdot dV = \rho \cdot g \cdot t \cdot dA \cdot$$

Обозначаем $\rho \cdot t \cdot g = C = const$, тогда $dP = C \cdot dA \cdot$

Вес P всей фигуры вычисляется аналогично:

$$P = g \cdot t \cdot \rho \cdot A = C \cdot A \qquad (1.4)$$

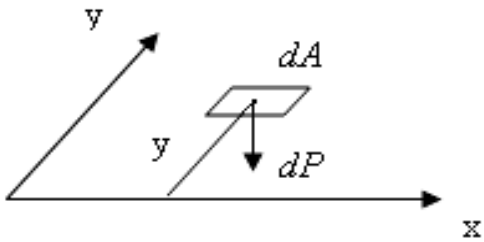


Рис.1.2

Момент силы dP относительно оси x будет:

$$dM_x = dP \cdot y = C \cdot dS_x \quad (1.5)$$

Суммируя эти моменты, получим:

$$M_x = C \cdot \sum dS_x = C \cdot S_x \qquad (1.6)$$

Из теоретической механики известно, что равнодействующий момент можно вычислить через равнодействующую силу P следующим образом:

$$M_x = P \cdot y_{p.}$$

где y_p - координата точки приложения силы P. Но равнодействующая силы тяжести фигуры приложена в центре тяжести, значит:

$$M_x = C \cdot A \cdot y_{ц.т} \qquad (1.7)$$

Подставляя слева (1.4) получим:

$$C \cdot A \cdot y_{ц.т} = C \cdot S_x$$

Таким образом:

$$\boxed{S_x = A \cdot y_{ц.т.}} \qquad (1.8)$$

Аналогично вычисляется статический момент относительно оси y:

$$\boxed{S_y = A \cdot x_{ц.т.}} \qquad (1.9)$$

Отсюда вытекают формулы для вычисления координат центра тяжести фигуры:

$$\boxed{x_{ц.т.} = \frac{S_y}{A}} \qquad \boxed{y_{ц.т.} = \frac{S_x}{A}} \qquad (1.10)$$

1.2. Моменты второго порядка

1.2.1. Осевой момент инерции

Рассмотрим бесконечно малую площадь dA (см. рис.1.3).

<u>Осевым моментом инерции</u> $\boldsymbol{dJ_x}$ ***<u>относительно оси x</u>*** бесконечно малой площади dA называется произведение dA на квадрат плеча, то есть на y^2:

$$dJ_x = dA \cdot y^2$$

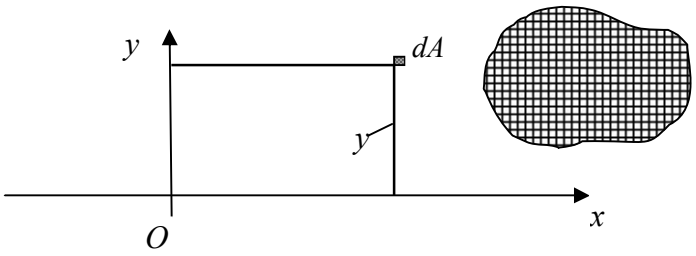


Рис. 1.3

Если фигура имеет конечную площадь A, то как обычно, разбиваем ее на бесконечно малые площади и для каждой из них вычисляем dJ_x. Просуммировав их, найдем осевой момент инерции всей фигуры:

$$J_x = \sum dJ_x = \int_A dJ_x = \int_A y^2 dA \qquad (1.11)$$

Аналогично вводится осевой момент инерции относительно оси y:

$$J_y = \int_A x^2 dA \qquad (1.12)$$

Из (1.11), (1.12) видно, что осевые моменты инерции J_x, J_y никогда не равны нулю и не бывают меньше нуля, они всегда положительны.

1.2.2. Центробежный момент площади

Аналогично осевым моментам (1.11), (1.12) вводится центробежный момент с помощью соотношения:

$$J_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA \qquad (1.13)$$

1.2.3. Свойства симметричных фигур

Если фигура симметрична то:

1) Ось симметрии является центральной.
2) Относительно любой системы координат, у которой одна из осей совпадает с осью симметрии, центробежный момент равен нулю:

$$J_{xy}=0 \qquad (1.14)$$

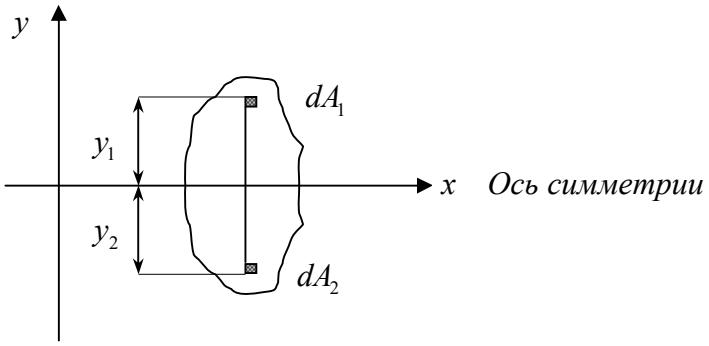


Рис.1.4

Доказательство:

Для dA_1 найдется dA_2, такая что $dA_2 = dA_1$, при этом будет $y_1 = -y_2$.

Тогда

$$S_x = \int_A y dA = \int_{\frac{A}{2}} y_1 dA_1 + \int_{\frac{A}{2}} y_2 dA_2 = \int_{\frac{A}{2}} y_1 dA_1 - \int_{\frac{A}{2}} y_1 dA_1 = 0$$

Используя формулу (1.8) получим:

$$S_x = y_{ц.т.} \cdot A = 0$$

Отсюда следует, что:

$$y_{ц.т.} = 0$$

Аналогично доказывается второе утверждение:

$$J_{xy} = \int x \cdot y \cdot dA = \int_{\frac{A}{2}} x \cdot y_1 \cdot dA_1 + \int_{\frac{A}{2}} x \cdot y_2 \cdot dA_2 = \int_{\frac{A}{2}} x \cdot y_1 \cdot dA_1 - \int_{\frac{A}{2}} x \cdot y_1 \cdot dA_1 = 0$$

1.2.4. Геометрический и механический смысл моментов

Напомним формулу (1.8): $S_x = A \cdot y_{ц.т.}$. Если ось *x* проходит через центр тяжести (см. рис.1.5), то $y_{ц.т.} = 0$, следовательно:

$$S_{x_c} = y_{ц.т.} A = 0$$

Если же $y_{ц.т.}$ не равно нулю, то чем больше площадь *A* или плечо $y_{ц.т.}$, тем больше S_x.

Таким образом, S_x ***- характеризует и величину площади фигуры, и удаленность ее от оси x.*** При этом, если фигура лежит над осью *x,* то $S_x > 0$, если ниже оси *x,* то $S_x < 0$.

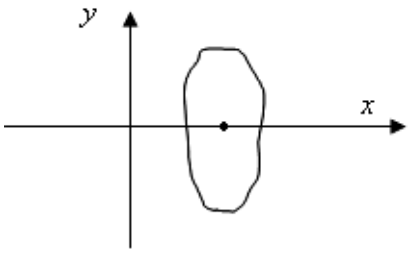


Рис. 1.5

Моменты J_x, J_y ***- характеризуют инерцию вращения тела около соответствующей оси.***

Например, на рис.1.6 $J_x^1 > J_x^2$

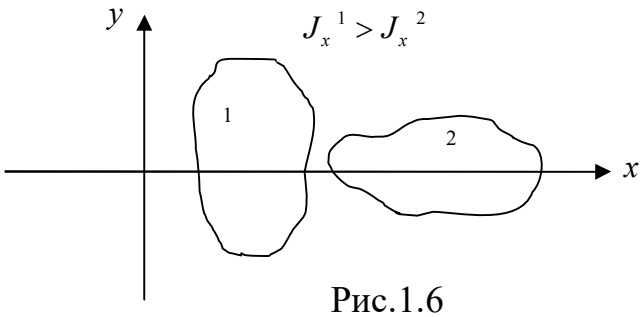


Рис.1.6

С точки зрения сопротивления материалов J_x, J_y характеризуют жесткость бруса на изгиб. Например, балка с сечением, отмеченным на рис 1.6 цифрой 1, будет жестче балки со вторым сечением при вертикальном изгибе.

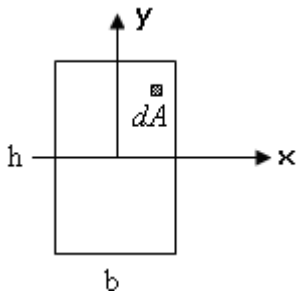
1.2.5. Формулы для вычисления моментов инерции канонических фигур

1.2.5.1. Формулы для вычисления моментов инерции прямоугольника относительно центральных осей:

Выразим площадь *dA* в формулах (1.11), (1.12) через малые отрезки *dx, dy* :

$$dA = dx \cdot dy$$

Заменяя в (1.12) интеграл по площади кратным интегралом, получим:



$$J_y = \int_A x^2 dA = \int_A x^2 dx \cdot dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 dx =$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dy \left[\frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \right] = \frac{b^3}{3 \cdot 4} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dy = \frac{b^3}{12} \cdot y \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{b^3 \cdot h}{12}$$

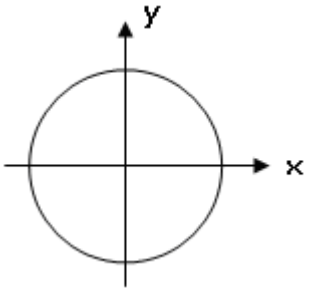
Аналогично найдем J_x. Таким образом:

$$\boxed{J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}} \quad \boxed{J_y = \frac{b^3 \cdot h}{12}} \qquad (1.15)$$

Центробежный момент равен нулю $J_{xy} = 0$, поскольку оси *x,y* совпадают с осями симметрии.

1.2.5.2. Формула для вычисления момента инерции окружности относительно центральных осей

Ее получают аналогично.

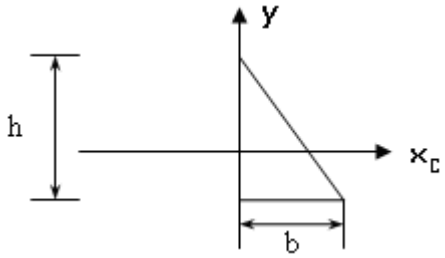


$$\boxed{J_x = J_y = \frac{\pi \cdot R^4}{4}} \quad \boxed{J_{xy} = 0} \qquad (1.16)$$

Центробежный момент равен нулю, поскольку оси *x,y* совпадают с осями симметрии.

1.2.5.3. Формула для вычисления момента инерции треугольника

Поскольку любой треугольник можно представить в виде суммы двух прямоугольных, то приведем формулы для следующего случая:



$$\boxed{J_y = \frac{b^3 \cdot h}{12}} \quad \boxed{J_{x_c} = \frac{b \cdot h^3}{36}} \qquad (1.17)$$

1.2.6. Связь моментов относительно разных осей

1.2.6.1. Связь моментов относительно параллельных осей

Рассмотрим следующую задачу. Пусть даны $J_{x_1}, J_{y_1}, J_{x_1 y_1}, a, b$ (см. рис.1.7), а необходимо найти $J_{x_2}, J_{y_2}, J_{x_2 y_2}$

Согласно определению $J_{x_2} = \int y_2^2 dA,$

Выразим y_2 через y_1

$$y_2 = y_1 + a$$

Тогда получим:

$$J_{x_2} = \int (y_1 + a)^2 dA =$$
$$\int (y_1^2 + 2 \cdot a \cdot y_1 + a^2) dA = \qquad (1.18)$$
$$\int y_1^2 dA + \int 2 \cdot a \cdot y_1 \cdot dA + \int a^2 dA.$$

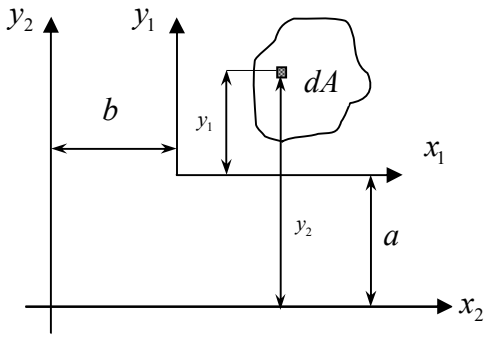


Рис.1.7

Таким образом,

$$J_{x_2} = J_{x_1} + 2 \cdot S_x \cdot a + a^2 \cdot A$$

Аналогично:

$$J_{y_2} = J_{y_1} + 2 \cdot S_y \cdot b + b^2 \cdot A$$
$$J_{x_2 y_2} = J_{x_1 y_1} + (b \cdot S_x + S_y \cdot a) + a \cdot b \cdot A$$

Рассмотрим важный **частный** случай. Если оси x_1, y_1 являются **<u>центральными</u>**, то $S_{x_1} = S_{y_1} = 0$. Тогда получим:

$$\boxed{\begin{aligned} J_{x_2} &= J_{x_c} + a^2 \cdot A \\ J_{y_2} &= J_{y_c} + b^2 \cdot A \\ J_{x_2 y_2} &= J_{x_c y_c} + a \cdot b \cdot A \end{aligned}} \qquad (1.19)$$

<u>Примечание.</u> При использовании формул (1.19) необходимо помнить, что *a* и *b* могут быть отрицательными, а именно, если центр тяжести расположен ниже оси *x*, то *a<0,* если он расположен левее оси *y,* то *b <0.*

1.2.6.2. Связь моментов относительно повернутых осей

Рассмотрим следующую задачу:

Дано: $J_{x_1}, J_{y_1}, J_{x_1 y_1}, \alpha$

Найти: $J_{x_2}, J_{y_2}, J_{x_2 y_2}$

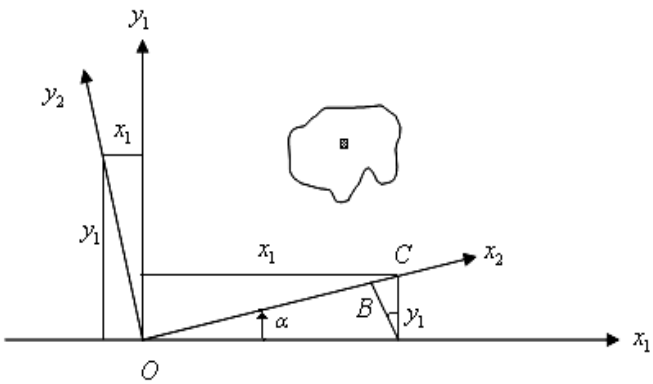


Рис.1.8

Выразим y_2, x_2 через x_1, y_1. Из рис. 1.8 видно, что:

$$x_2 = OC = OB + BC$$

$$OB = x_1 \cdot Cos\ \alpha\ ;\quad BC = y_1 \cdot Sin\ \alpha$$

Следовательно:

$$x_2 = x_1 \cdot Cos\ \alpha + y_1 \cdot Sin\ \alpha \tag{1.20}$$

Для подсчета y_2 можно использовать эту формулу, увеличив угол на 90°. Тогда получим:

$$y_2 = y_1 \cdot Cos\ \alpha - x_1 \cdot Sin\ \alpha \tag{1.21}$$

Теперь подсчитываем момент инерции относительно оси y_2. Согласно определению:

$$J_{y_2} = \int_A x_2^2 dA = \int_A (x_1 \cdot Cos\ \alpha + y_1 \cdot Sin\ \alpha)^2 dA =$$

$$\int_A x_1^2 \cdot Cos^2\alpha \cdot dA + \int_A y_1^2 \cdot Sin^2\alpha \cdot dA + \int x_1 \cdot y_1 \cdot 2 \cdot Sin\ \alpha \cdot Cos\ \alpha \cdot dA =$$

$$= Cos^2\alpha \cdot J_{y_1} + Sin^2\alpha \cdot J_{x_1} + J_{x_1 y_1} \cdot Sin\ 2\alpha$$

Для подсчета момента относительно оси x_2 можно использовать эту же формулу, увеличив угол на 90°. Таким образом получим:

$$\begin{aligned} J_{x_2} &= J_{y_1} \cdot Sin^2\alpha + J_{x_1} \cdot Cos^2\alpha - J_{x_1 y_1} \cdot Sin\ 2\alpha \\ J_{y_2} &= J_{y_1} \cdot Cos^2\alpha + J_{x_1} \cdot Sin^2\alpha + J_{x_1 y_1} \cdot Sin\ 2\alpha \end{aligned} \tag{1.22}$$

Центробежный момент находим аналогично:

$$J_{x_2 y_2} = \int_A x_2 \cdot y_2 \cdot dA = \int_A y_1^2 \cdot Sin\ \alpha \cdot Cos\ \alpha \cdot dA + \int_A x_1 \cdot y_1 \cdot Cos^2\alpha \cdot dA - \int_A x_1 \cdot y_1 \cdot Sin^2\alpha \cdot dA -$$

$$-\int_A x_1^2 \cdot Sin\ \alpha \cdot Cos\ \alpha \cdot dA = J_{x_1} \frac{Sin\ 2\alpha}{2} + J_{x_1 y_1} \cdot Cos\ 2\alpha - J_{y_1} \frac{Sin\ 2\alpha}{2}$$

Окончательно:

$$J_{x_2 y_2} = J_{x_1 y_1} \cdot Cos\ 2\alpha + (J_{x_1} - J_{y_1}) \frac{Sin\ 2\alpha}{2} \tag{1.23}$$

1.2.6.3. Главные оси и главные моменты

Меняя угол α,можно построить график зависимости J_{x_2} от α

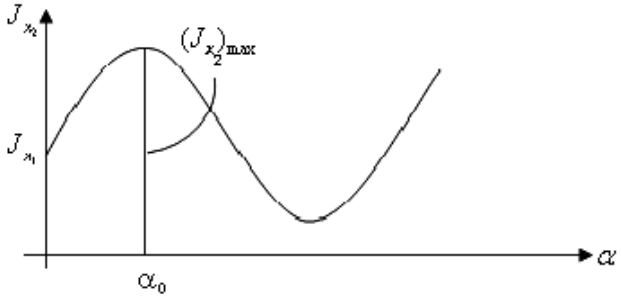


Рис.1.9

Угол α_0, при котором момент инерции достигает экстремума (min или max), определяет положение осей, которые называются главными. Главные оси будем обозначать y_0, x_0.

Основные свойства главных осей:

1°. Относительно главных осей центробежный момент равен нулю.

Доказательство:

Запишем условия экстремума J_{x_2}:

$$\frac{dJ_{x_2}}{d\alpha} = 0 \ , \ \alpha = \alpha_0$$

$$2 \cdot Sin\ \alpha_0 \cdot Cos\ \alpha_0 \cdot J_{y_1} - 2 \cdot Cos\ \alpha_0 \cdot Sin\ \alpha_0 \cdot J_{x_1} - 2 \cdot J_{x_1 y_1} \cdot Cos\ 2\alpha_0 = 0 \Big|$$

Деля на (–2) получим:

$$-J_{y_1} \frac{Sin\ 2\alpha_0}{2} + J_{x_1} \frac{Sin\ 2\alpha_0}{2} + J_{x_1 y_1} \cdot Cos\ 2\alpha_0 = 0 \qquad (1.24)$$

Как видно из (1.23), при $\alpha = \alpha_0$ справа будет стоять то же выражение, что и в (1.24). Таким образом получим $J_{x_0 y_0} = 0$.

Что и требовалось доказать.

2°. Оси симметрии являются главными, т.к. относительно них $J_{x_0 y_0} = 0$.

3°. Относительно главных осей один из моментов инерции минимален, а другой максимален (это является перефразированным определением главных осей, введенным выше**).**

Вычисление α_0

Его определяем из уравнения (1.24). Деля на $Cos\ 2\alpha_0$ получим

$$J_{x_1 y_1} \cdot Cos\ 2\alpha_0 + (J_{x_1} - J_{y_1}) \frac{Sin\ 2\alpha_0}{2} = 0 \Big| \div Cos\ 2\alpha_0$$

$$J_{x_1 y_1} + (J_{x_1} - J_{y_1}) \frac{tg\ 2\alpha_0}{2} = 0$$

$$tg\ 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot J_{x_1 y_1}}{J_{y_1} - J_{x_1}}$$

Таким образом, зная $J_{x_1 y_1}, J_{x_1}, J_{y_1}$, можно найти $tg\ 2\alpha_0$, а затем - угол α_0.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНОМЕРНОСТИ

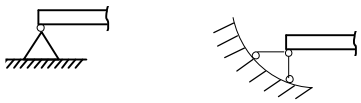
2.1. Расчетная схема

Расчетная схема – это упрощенное изображение конструкции, условий его закрепления и нагружения. Напомним некоторые обозначения и термины.

2.1.1. Условия закрепления

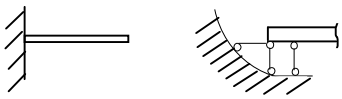
Их изображают следующим образом.

Неподвижный шарнир



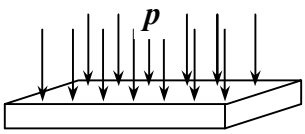
Подвижный шарнир

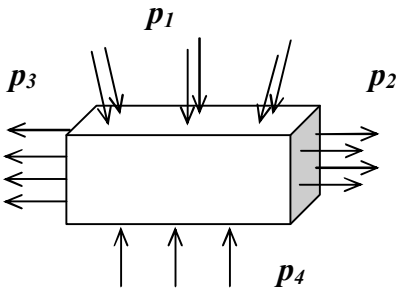
Заделка



2.1.2. Внешние силовые факторы

1) На поверхность конструкции воздействуют другие тела (снег, оборудование, ветер, и т.д.). Это воздействие часто называют **силой, нагрузкой и т.п.** В природе из таких воздействий существует только один фактор – это *внешнее давление*, которое будем называть **поверхностной нагрузкой,** а обозначать буквой ***p***. Это можно изобразить в виде, приведенном на рис.2.1 (единица измерения поверхностных нагрузок – Н/м^2, можно сказать, т.е. сила, приходящаяся на единицу площади тела). Таким образом, поверхностная нагрузка – это давление или интенсивность силы.





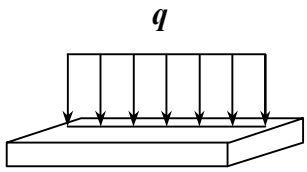


Рис.2.1.
Поверхностная нагрузка ***p***.
Единица измерения - Н/м^2

Рис.2.2.
Погонная сила ***q***.
Единица измерения - Н/м

2) Кроме поверхностных существуют объемные нагрузки (например, силы веса, инерции, центробежные и магнитные силы), которые действуют на каждый малый элемент тела (единица измерения – Н/м^3 , т.е. сила, приходящаяся на единицу объема тела).

3) В строительстве часто используется изображение внешних воздействий в виде **погонной силы** – *т.е. силы, которая воздействует на один метр конструкции.* Изображение погонной силы $\boldsymbol{q}$ (единица измерения – Н/м) показано на рис.2.2.

4) Внешнюю **поверхностную или объемную нагрузку** часто заменяют их суммарной величиной (*сосредоточенной силой*). Ее изображают так, как показано на рис. 2.3. Момент *этой силы называют сосредоточенным моментом и* изображают так, как показано на рис. 2.4.

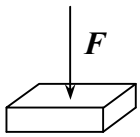


Рис.2.3. Сосредоточенная сила *F* (единица измерения – Н)

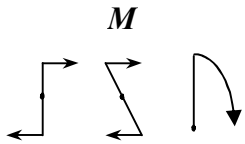


Рис.2.4. Сосредоточенный момент *M* (единица измерения – кНм).

Примечание. Важно отметить, что законы механики (закон равенства действия и противодействия и т.д.) формулируются в величинах суммарного воздействия поверхностной или объемной нагрузки, т.е. *в силах и моментах.* Например, третий закон Ньютона нельзя формулировать в терминах поверхностной нагрузки, т.е., если тело находится в состоянии покоя (см. рис. 2.5.), то из этого не следует, что давления $p_1=p_2$.

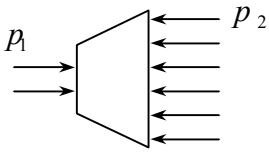


Рис.2.5.

2.2. Усилие растяжения (сжатия)

С этого раздела начинается введение новых понятий, специфических для дисциплины «сопротивление материалов».

Первым важным является понятие под названием **продольная сила.**

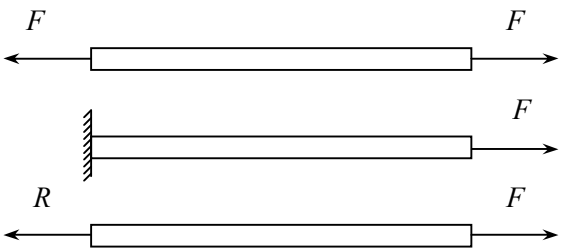


Рис.2.6

Рассмотрим рис.2.6. Если для среднего стержня ответ на вопрос «чему равняется усилие растяжения?» является очевидным (оно равняется F), то для верхнего стержня этот вопрос обычно вызывает затруднения (часто говорят, что оно равно нулю или $2F$). Однако третий нижний рисунок равносилен первым двум, поскольку реакция $R=F$. Таким образом, во всех этих случаях усилие растяжения равно F , поскольку схемы равносильны.

Сила растяжения обозначается буквой $\boldsymbol{N}$ (иногда через $\boldsymbol{N_z}$.). В нашем случае

$$\boldsymbol{N} = F.$$

Рассмотрим теперь рис.2.7. Можно ли сказать, чему равна сила растяжения? Нет, т.к. это равносильно тому, что спросить: «Чему равна ширина реки Волга»? В обоих случаях, нужно указывать – в каком месте.

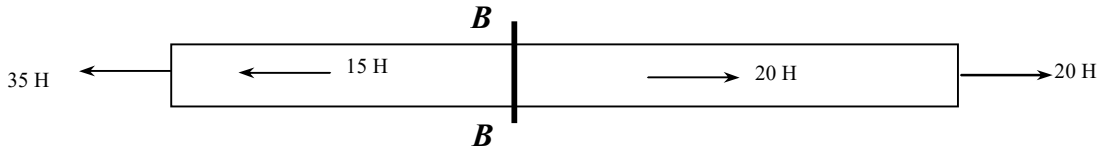


Рис.2.7

Введем следующее *определение.* Разделим мысленно брус на две части сечением *B-B.*

<u>Продольной силой N</u> **в рассматриваемом внутреннем сечении назовем равнодействующую всех <u>внешних</u> осевых сил, с которой левая часть воздействует на правую часть (или с которой правая часть воздействует на левую).**

Синонимами термина «продольная сила»» являются термины *нормальная сила, усилие растяжениия (сжатия), осевая сила*.

Это определение можно сформулировать как следующее правило для вычисления ***N:*** **продольная сила это сумма всех <u>внешних</u> осевых сил, которые лежат справа или слева от сечения.**

<u>Примечание.</u>

Главная идея сопротивления материалов заключается именно в том, что конструкция считается состоящей из двух частей и отыскивается сила, момент, давление, с которыми одна часть воздействует на другую.

Правило знаков.

Если внешняя сила действует на сечение растягивающим образом, то она дает вклад в $\boldsymbol{N}$ со знаком «+», если действует сжимающим образом, то она делает вклад в $\boldsymbol{N}$ со знаком «-».

Для того чтобы указать, на какое сечение действует продольная сила, сечение и N снабжаются номером и индексом. Например, так, как показано на рис.2.8.

При наличии внешних **погонных** сил осевая сила N зависит от положения сечения более сложным образом. Рассмотрим, например, задачу

$$N_1 = F - 3F$$

$$N_2 = -3F$$

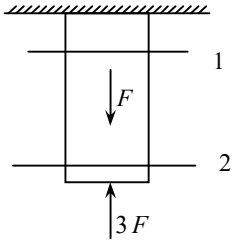


Рис.2.8

вычисления продольной силы с учетом силы тяжести (рис.2.9). Обозначим через q погонный вес бруса (для стандартных профилей прокатной стали, погонная масса приводится в таблицах сортамента). Пусть F = 400 *Н*, q = 200 *Н/м.* Рассмотрим сечение на расстоянии s от незакрепленного конца (см. рис.2.9). Тогда:

$$N = -F - qs.$$

Задавая разные значения для s получим разные значения N (см. таблицу).

s(*м*)	0	1	2	3
N(*Н*)	-400	-600	-800	-1000

Зависимость N от положения сечения для наглядности представляют графически. График этой зависимости называется ***<u>эпюрой N.</u>***

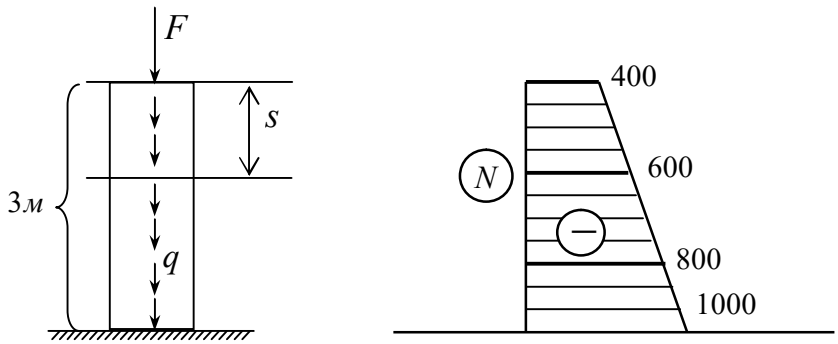


Рис.2.9

<u>Правила графического изображения N.</u>

1) Значения N откладываются перпендикулярно оси бруса.

2) Если усилие N является растягивающим, то ставится знак «+», если сжимающим, то «-» (в нашем примере на рис.2.9 имеем отрицательный знак).

2.3. Метод сечений

Это метод, который позволяет определять N в сложных конструкциях типа стержневой системы, например, фермы. Суть метода рассмотрим на простом примере, приведенном на рис.2.10. Пусть длины стержней l_1=4м, l_2=5м, BC=3м. Тогда $\sin\alpha = 0.6$; $\cos\alpha = 0.8$.

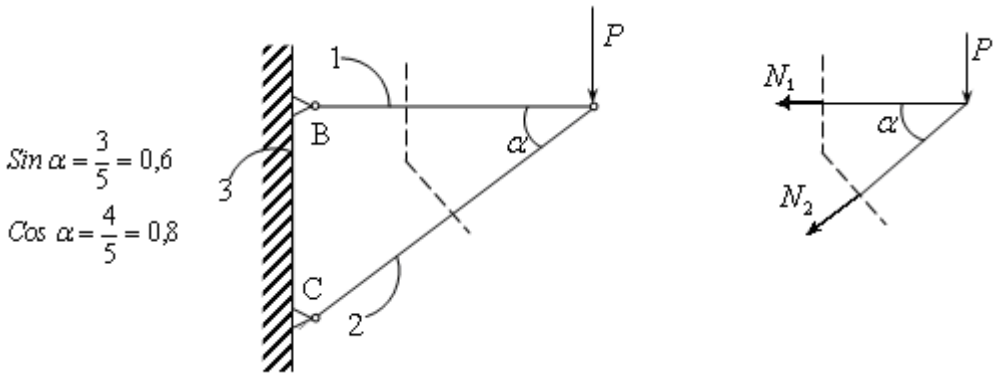


Рис.2.10.

Найдем усилия растяжения.

Сделаем сечение, которое делит конструкцию на две части. Нарисуем правую часть. На нее левая часть действует силами N_1, N_2.

Конструкция в целом находится в покое, следовательно, любая её часть то же находится в покое, тогда для правой части можно записать уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum_x F = 0: \\ \sum_y F = 0: \end{cases} \qquad \begin{cases} -N_1 - N_2 \cdot Cos\ \alpha = 0 \\ -P - N_2 \cdot Sin\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Отсюда, находим:

$$N_2 = -\frac{P}{Sin\ \alpha}, \qquad N_1 = P\frac{Cos\ \alpha}{Sin\ \alpha}.$$

<u>Анализ решения:</u>

- Видно, что первый стержень растягивается, так как N_1 >0, а второй стержень сжимается, так как N_2<0.
- Чем меньше α, тем меньше $Sin\alpha$, следовательно, тем больше N_1, N_2, причем, $N_1 \to \infty$, $N_2 \to \infty$ при $\alpha \to 0$.

Резюмируя можно сказать, что **<u>метод сечений заключается в следующем:</u>**

1) Конструкция делится на две части сквозным сечением.
2) В сечениях стержней изображаются силы растяжения (т.е. изображается - воздействие одной части конструкции на другую).
3) Записываются уравнения равновесия для одной из частей конструкции.

4) Проводится решение системы уравнений, и отыскиваются силы растяжения.

2.4. Нормальное напряжение

Это второе важнейшее понятие, которое вводится в сопротивлении материалов.

Рассмотрим воздействие верхней части бруса на сечение (рис.2.11). Она давит на нижнюю часть поверхностной нагрузкой σ. Эта давление (поверхностная нагрузка) называется ***нормальным напряжением***. Другими словами, нормальное напряжение это интенсивность усилия сжатия (или растяжения), т.е. это усилие сжатия (растяжения) на единичную площадку сечения, которым одна часть тела действует на другую). Единица измерения: $Н / м^2$ (или *Паскаль*).

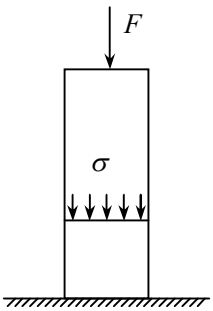


Рис.2.11

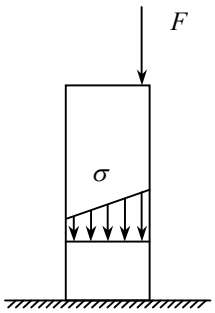


Рис.2.12

Другим способом интерпретации понятия напряжения растяжения (сжатия) σ является следующее.

Назовем волокном кусок бруса единичного сечения (см.рис.2.13).

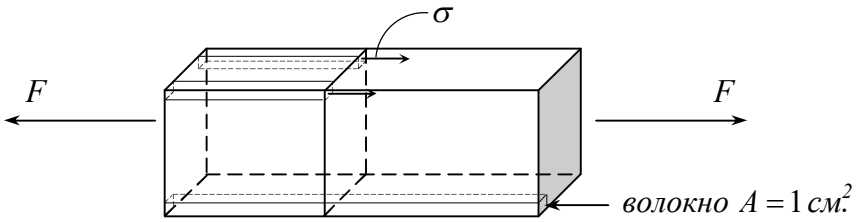


Рис.2.13

Тогда можно сказать, что *напряжение σ* - это сила растяжения (сжатия) волокна.

Правило знаков. Нормальное напряжение считается положительным, если действует ***растягивающим*** образом.

2.5. Закон равномерного распределения нормального напряжения при растяжении (сжатии)

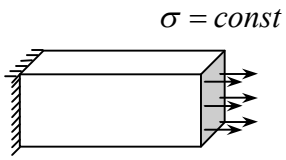
При условии, что внешние силы действуют по центрам сечений (рис.2.11) ***считается, что напряжение σ распределено по сечению <u>равномерно</u>, то есть*** $\sigma = const$ ***, причем, независимо от формы сечения***.

И наоборот, если сила действует внецентренно, то напряжения распределены не равномерно (рис.2.12).

<u>Следствие из закона равномерного распределения нормального напряжения.</u>

Если $\sigma = const$, то

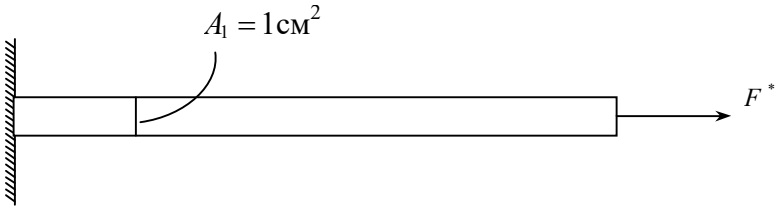
$$\boxed{N = \sigma \cdot A}$$



Следовательно, $\boldsymbol{\sigma = N / A}$

2.6. Предел прочности

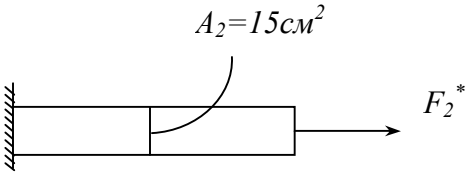
Пусть стержень с площадью сечения A_1 =1см^2 разрушается при $F^* = 2\,kH$ (под разрушением будем понимать разделение тела на части). Поскольку $A_1 = 1см^2$, то $\sigma^*_1 = \dfrac{F_1^*}{A_1} = 2\,kH/см^2$



Для любых других стержней теперь можно найти силу, при которой происходит разрушение. Например, при A=2$см^2$ разрушающая сила F^* = 4kH при A=0.3$см^2$ разрушающая сила F^* = 0.6 kH и т.д.

И наоборот, пусть известна сила, например, F^*_2 = 30 kH, при которой происходит разрушение стержня сечением 15 см^2. Тогда можно найти напряжение, при котором происходит разрушение:

$$\sigma^*_2 = \frac{F_2^*}{A_2} = 30\ kH/15\ см^2 = 2\ kH/см^2$$



***<u>Определение</u>*:** Напряжение σ^*, больше которого не может выдержать материал (другими словами, σ^*, при котором происходит разрушение образца), называется **<u>пределом прочности</u>**. Для него используют и другие обозначения, например, для бетона R, для стали $\sigma_в$ и т.д.

2.7. Условие прочности

Согласно условиям заказчика, рабочая нагрузка F не должна превышать некоторую допустимую величину $[F]$ (квадратные скобки означают фразу «допустимое значение величины»). Т.е. должно выполнятся условие

$$F < [F] \tag{2.1}$$

Оно называется **условием прочности**.

Обычно допустимое значение нагрузки получают, уменьшая в k раз нагрузку, при которой происходит разрушение:

$$[F] = \frac{F^*}{k}$$

Константа k называется **коэффициентом запаса** (в строительстве нередко принимают $k = 1{,}5$)

Чаще же условие прочности записывают в виде ограничения на **рабочие напряжения** σ, которые возникнут в конструкции при приложении проектной нагрузки F:

$$\sigma \le \frac{\sigma^*}{k}$$

При использовании введенного обозначения (квадратных скобок), условие прочности примет вид

$$\sigma \le [\sigma]$$

Величина $[\sigma]$ называется **допустимым напряжением**. Если пределы прочности на растяжение и сжатие у материала разные (как например, для чугуна, бетона, камня, дерева), то $[\sigma]$ снабжается соответствующим индексом. Тогда в сечениях, испытывающих растяжение, условие прочности записывают в виде

$$\sigma \le [\sigma]^{\text{раст.}}$$

Там, где имеет место сжатие, условие прочности имеет вид

$$|\,\sigma\,| \le [\sigma]^{\text{сжат.}}$$

Здесь учтено, что в области сжатия напряжения принимают отрицательный знак (согласно принятому выше соглашению). Поэтому-то и использована запись $|\sigma|$.

3. ПОПЕРЕЧНАЯ СИЛА И ИЗГИБАЮЩИЙ МОМЕНТ

3.1. Случай воздействия внешних сил в одной плоскости

Рассмотрим брус длины l, нагруженный внешними силами F_1, F_2,… Для простоты рассмотрим случай, когда внешние силы действуют лишь в плоскости yz (в плоскости листа). *Напомним, что главный способ анализа напряженного состояния бруса в интересующем нас сечении заключается в том, что тело считается состоящим из двух частей.*

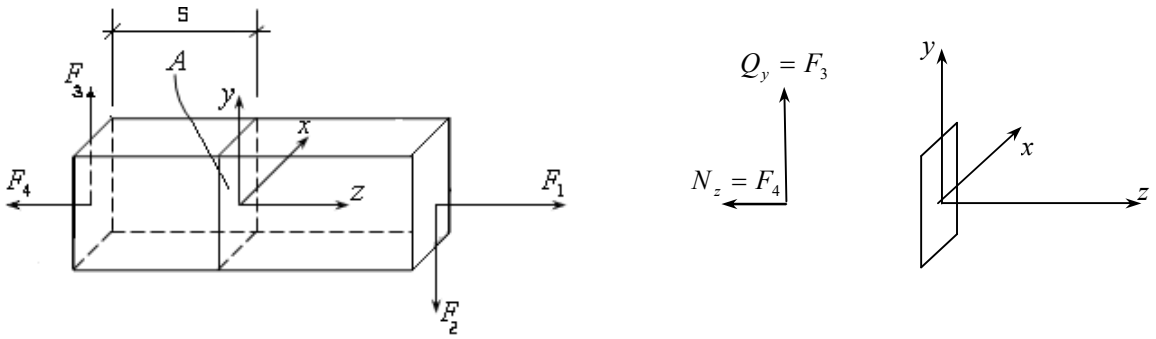


Рис.3.1.

В соответствии с этим правилом разделим брус, изображенный на рис. 3.1, сечением A на две части. Напомним, что систему координат связывают с этим сечением и вводят по следующим правилам.

1) Система координат вводится в рассматриваемом сечении, а начало координат располагается в центре тяжести сечения.
2) Ось z направляется вдоль оси бруса, оси x и y располагают в плоскости сечения по правилу правого винта.
3) Положение сечения может определяться каким-либо параметром (например, расстоянием s на рис.3.1).

Для простоты будем использовать термин «правая часть бруса». Согласно рис.3.1, это та часть, которая находится со стороны конца оси z. Другую часть будем называть «левой частью бруса». На правую часть воздействует левая часть бруса через внутреннее сечение A силами $N_z = F_3$, $Q_y = F_4$ и моментом $M_x = F_3 \cdot s$ относительно оси x.

Напомним, что согласно определению (см. раздел 2.2), сумма внешних сил, действующих на сечение **слева (или справа)** в осевом направлении, называется продольной силы $\boldsymbol{N_z}$. Аналогично вводятся следующие понятия.

Определение 1. Суммарная сила, с которой левая часть бруса воздействует на правую поперек ее оси (в направлении оси y), называется **поперечной силой** $\boldsymbol{Q_y}$. (синоним - перерезывающая сила $\boldsymbol{Q_y}$.).

Отсюда вытекает правило вычисления $\boldsymbol{Q_y}$:

$$\boldsymbol{Q_y} = \Sigma F_y \text{ (слева от сечения)}$$

<u>Определение 2.</u> Суммарный момент, которым левая часть бруса воздействует на правую относительно оси, поперечной брусу (относительно оси x), называется ***<u>изгибающим моментом M_x</u>***.

Отсюда вытекает правило вычисления M_x :

$$M_x = \Sigma\, m_x \cdot (\text{слева от сечения})$$

Отметим еще раз, что правила знаков в сопромате весьма специфичны. Для приведенной на рис.3.1 системы координат их можно ввести следующим образом.

1) **<u>Правило знаков для N_z</u>** Вклад внешней силы в суммарную продольную силу $\boldsymbol{N_z}$ положителен, если эта внешняя сила действует вдоль оси бруса на сечение **растягивающим** образом (независимо от направления оси z). В нашем случае слева на сечение воздействует F_4, а справа F_1. Поэтому $N_z = F_4 = F_1$.

2) **<u>Правило знаков для Q_y</u>.** Если *внешняя* сила действует <u>слева</u> на сечение поперек оси, то вклад этой внешней силы в суммарную поперечную силу Q_y положителен при совпадении направлений оси y и *внешней* силы.

В нашем случае слева на сечение воздействует F_3. Поэтому $Q_y = F_3$.

<u>Примечание</u>. В силу закона Ньютона, действие правой части должно быть равно действию левой. Поэтому при подсчете N_z , Q_y и слева, и справа должны получаться одни и те же значения. Однако второе правило знаков приходится формулировать по другому, а именно следующим образом: **если внешняя сила *F* действует на сечение <u>справа</u> и его направление совпадает с направлением оси *y*, то вклад внешней силы во поперечную силу Q_y будет отрицателен**. Поскольку в силу условий равновесия бруса в целом имеем равенство $F_2 = F_3$, то легко убедиться, что при подсчете Q_y и слева, и справа получатся одни и те же значения..

3) **<u>Правило знаков для</u>** M_x : Изгибающий момент $M_x > 0$, если он, изгибая брус, создает положительную кривизну бруса. Например, в выбранной системе координат это правило для M_x можно представить графически в виде, приведенном на нижеследующем рисунке.

$M_x > 0$ $\qquad$ $M_x < 0$

Для бруса длины l , изображенном на рис.3.1, получим: $M_x = F_3 \cdot s = -F_2 \cdot (l - s)$.

<u>Примечания</u>.

1. Если рассматривать воздействие левой части бруса на правую, то правило знаков для моментов M_x совпадает с правилом, вводимым в теоретической механике.

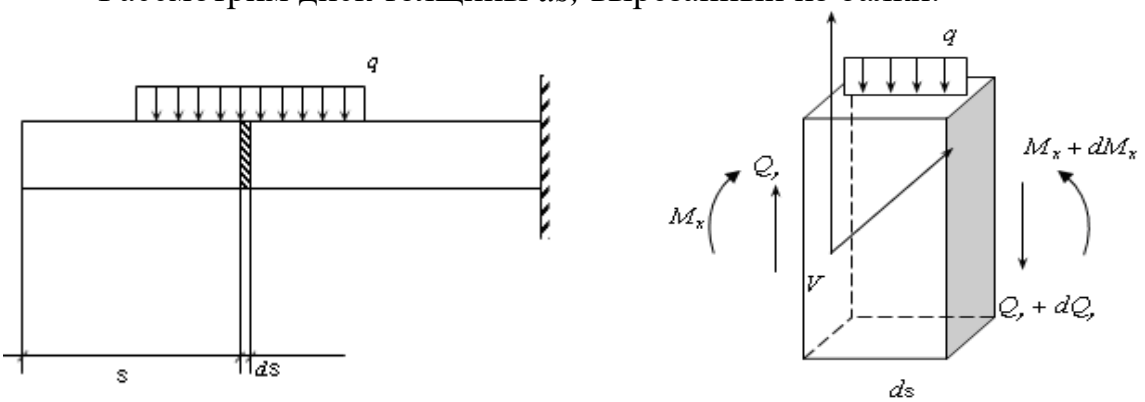
2. Часто вместо координаты s, определяющей положение сечения, используют обозначение z. Если ось бруса прямолинейна, то это не вызывает недоразумений. Но в случае, например, криволинейного кругового бруса положение сечения определяют угловой координатой. При этом необходимо помнить, что ось z направлена перпендикулярно нормальному сечению бруса и поэтому меняет свое направление.

3. Силы N_z , Q_y и момент M_x часто называют **внутренними силовыми факторами.**

3.2. Основные соотношения между погонной силой *q*, поперечной силой Q_y и изгибающим моментом M_x

Эти соотношения важны с двух точек зрения: они позволяют контролировать правильность построения эпюр изгибающих моментов, они нужны при выводе, например, формул вычисления касательных напряжений при изгибе.

Рассмотрим диск толщины *ds,* вырезанный из балки:



Согласно определению на левое сечение с левой стороны действуют Q_y, M_x.

Аналогично, справа действует почти такая же сила и момент, поскольку толщина диска бесконечно мала. Так как они мало отличаются от воздействий с левой стороны, то согласно принятым в математике обозначениям это будут силы $Q_y + dQ_y$, $M_x + dM_x$.

Связь между Q_y, M_x, q найдем из соотношений статики. Выпишем первое уравнение равновесия: $\sum F_y = 0$: $\quad Q_y - (Q_y + dQ_y) - q \cdot ds = 0$.

Отсюда вытекает соотношение, называемое **первым уравнением равновесия элемента балки**

$$\frac{dQ_y}{ds} = -q\,. \tag{3.1}$$

Выпишем второе уравнение равновесия:

$$\sum M_x = 0: \qquad M_x - (M_x + dM_x) + (Q_y + dQ_y) \cdot ds + q \cdot ds \cdot \frac{ds}{2} = 0\,.$$

Деля на *ds* получим $-\dfrac{dM_x}{ds} + Q_y + dQ_y + q\dfrac{ds}{2} = 0$.

Отсюда следует соотношение, называемое ***вторым уравнением равновесия элемента балки***

$$\frac{dM_x}{ds} = Q_y\,. \tag{3.2}$$

<u>*Следствие:*</u> Согласно известной теореме там, где производная меняет знак, там функция экстремальна. Поэтому там, где меняет знак Q_y, изгибающий момент M_x экстремален.

4.ЭПЮРЫ СИЛ И МОМЕНТОВ

Графическое изображение зависимостей N_z, Q_y, M_x от положения сечения в брусе называется **«эпюрами сил и моментов».**

Рассмотрим пример построения эпюр для бруса, изображенного ниже на рисунке 4.1. Вычислим N_z, Q_y, M_x в разных сечениях и сведем в таблицу (s - расстояние от левого торца до сечения).

s (*м*)	0	2	4-	4+	6
N_z (*Н*)	3	3	3	3	3
Q_y (*Н*)	2	2	2	-4	-4
M_x (*Нм*)	0	4	8	8	0

В соответствии с таблицей построим графики функций N_z, Q_y, M_x под силовой схемой бруса. Эти графики и есть эпюры N_z, Q_y, M_x.

<u>Правила изображения эпюр.</u>

Эпюру N_z откладывают перпендикулярно оси балки и ставят знак «+», если в рассматриваемом сечении имеет место растяжение (см. рис.4.1).

Для построения эпюры поперечных сил можно ввести мнемоническую формулу следующим образом: Q_y откладываем по направлению действия равнодействующей сил, лежащих **слева** от сечения (и наоборот, Q_y откладываем против направления действия сил, лежащих **справа** от сечения)

Согласно мнемонической формуле **строительной механики** изгибающий момент M_x будем откладывать на растянутых волокнах, как это показано на рис.4.1, т.е. с выпуклой стороны изогнутого бруса, независимо от того, действуют они слева или справа.

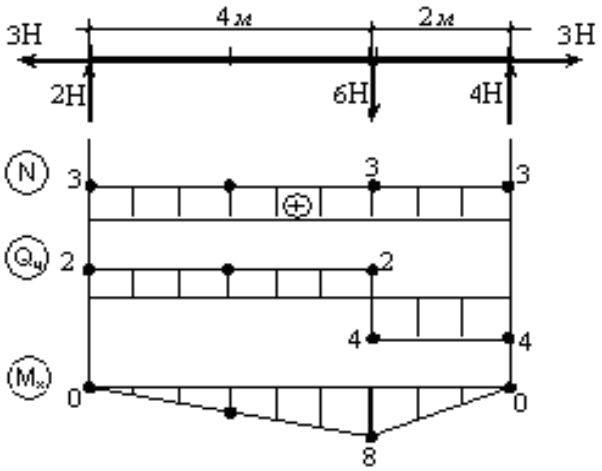


Рис.4.1.

<u>Примечание.</u> В большинстве учебников по сопротивлению материалов M_x откладывают на сжатых волокнах.

5. ПРАВИЛА КОНТРОЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР

Они вытекают из определения продольной силы N_z , поперечной силы Q_y , изгибающего момента M_x и второго уравнения равновесия элемента балки.

1) Там, где есть сосредоточенная внешняя сила, направленная вдоль оси *z,* на эпюре сил N_z имеет место скачок на величину этой силы.
2) Точно так же там, где есть сосредоточенная внешняя сила, направленная поперек оси *z,* на эпюре поперечных сил Q_y имеет место скачок на величину этой силы.
3) Аналогично, там, где есть сосредоточенный момент, на эпюре моментов есть скачек на величину этого момента.
4) Там где поперечная сила Q_y пересекает нулевую линию, там имеет место экстремум на эпюре M_x (см. следствие в конце раздела 3.2).

6. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

6.1.Нормальные и касательные напряжения

Рассмотрим брус. Разделим его на две части (см. рис.6.1)..

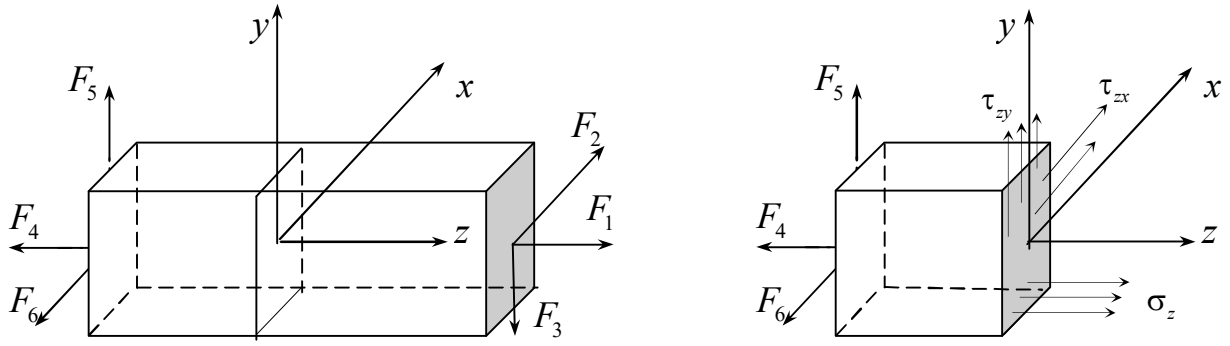


Рис.6.1.

Правая часть действует на левую в каждой точке сечения. Нарисуем это утверждение (см. рис.6.1). Введем термины для поверхностных нагрузок, которыми правая часть действует на левую:

σ_z - нормальное напряжение (напряжение растяжения или сжатия);

τ_{zx}, τ_{zy} - касательные напряжения (первый индекс определяет рассматриваемую площадку, второй индекс указывает направление действия напряжения).

<u>Правило знаков для</u> σ_z**:** Если оно действует на сечение растягивающим образом, то оно считается положительным.

<u>Правило знаков для</u> τ_{zx}, τ_{zy}: Для прочностных расчетов знак касательных напряжений τ_{zx}, τ_{zy} не имеет значения, но для определенности

введем его в соответствии с правилом, применяемым в теории упругости, то есть, **касательное напряжение τ_{zx} положительно, если оно действует в направлении оси *x* и при этом направление нормали к сечению совпадает с осью *z*.**

Аналогично вводится знак касательных напряжений τ_{zx}.

6.2. Закон парности касательных напряжений

Вырежем из тела малый элемент (рис.6.2). Со стороны соседних элементов на него кроме растягивающих напряжений действуют и касательные напряжения (рис.6.3). Рассмотрим случай, когда растягивающих напряжений нет. Поскольку все тело находится в покое, то и любая его часть, в том числе рассматриваемый малый параллелепипед также находится в покое.

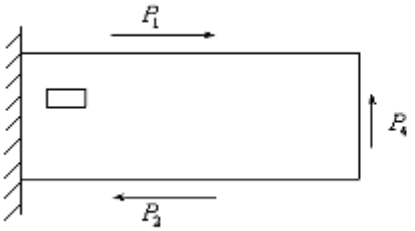


Рис.6.2

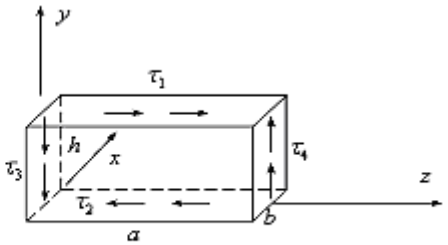


Рис.6.3

Запишем для него уравнения равновесия:

$$\sum F_z = 0 \qquad \tau_1 \cdot a \cdot b - \tau_2 \cdot a \cdot b = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad -\tau_3 \cdot bh + \tau_4 \cdot bh = 0$$

$$\sum_x M = 0 \qquad \tau_4 \cdot bh \cdot a - \tau_1 \cdot ab \cdot h$$

Отсюда вытекает

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4$$

Закон парности можно сформулировать следующим образом.

***<u>Если на грани элемента тела возникает напряжение τ, то на других трех гранях также возникает такое же напряжение τ. При этом они сходятся к ребру или расходятся от ребра</u>*.**

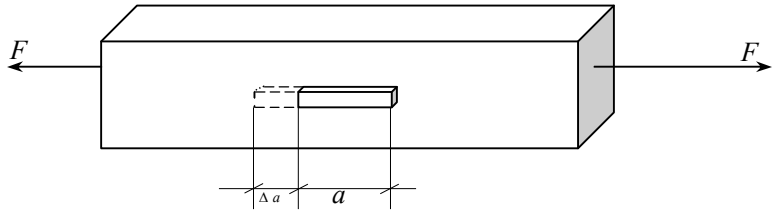
<u>Примечание.</u> Здесь мы рассмотрели случай отсутствия нормальных напряжений. Но этот закон имеет место и при их наличии. Для доказательства этого надо использовать следующие приемы.

Если вертикальные грани имеют бесконечно малый размер h по сравнению с горизонтальным, то нормальные напряжения не будут давать вклад в первое уравнение равновесия. Аналогично для второго уравнения. Для третьего уравнения можно выбрать ось *x*, проходящую через центр параллелепипеда.

7. ДЕФОРМАЦИИ

Деформирование – это процесс изменения размеров тела.

Деформация – это число, которое характеризует изменение размера тела.



Рассмотрим растяжение бруса. В результате деформирования малый элемент получит **абсолютное удлинение** на величину Δa.

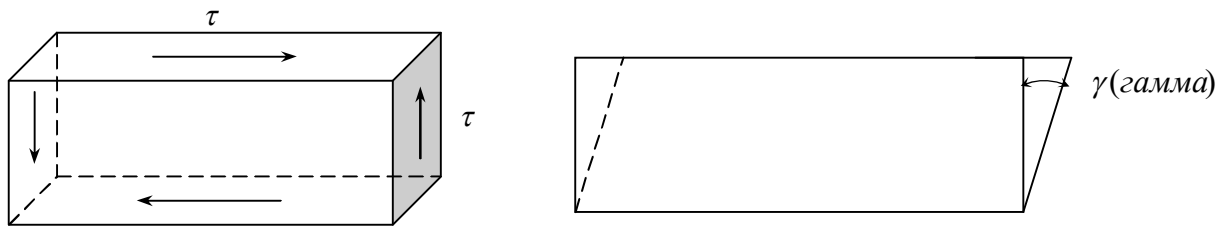
Определение: **<u>Относительным удлинением</u>** (синоним - **<u>линейная деформация</u>**) называется величина:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta a}{a}}$$

<u>Правило знаков</u>. Согласно определению понятия «приращение» запишем $\Delta a = a_{кон} - a_{нач}$. Отсюда следует, что если элемент удлиняется, то $\Delta a > 0$, а значит $\varepsilon > 0$, если элемент укорачивается то $\Delta a < 0$, и значит $\varepsilon < 0$.

<u>Примечание</u>: Часто понятия растяжение и удлинение используют как синонимы. Однако это не так, понятие растяжение (сжатие) - это силовая характеристика, удлинение (укорочение) – геометрическая. Иногда бывает и так, что элемент сжат, но не деформируется (например, при нагреве элемента, зажатого в жесткой обойме) или даже удлиняется.

Рассмотрим теперь другой вид деформирования элемента тела под действием касательных воздействий.



Под действием τ прямой параллелепипед превращается в косоугольный.

Угол γ называется <u>деформацией сдвига</u> (синонимы: <u>угол сдвига</u>, <u>сдвиг</u>).

8. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И ЗАКОНЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

8.1. Основные предположения, используемые в сопротивлении материалов

В каждой области науки используются различные свойства тел или полей и наблюдаемые в природе связи между собой различных величин, характеризующих эти свойства, поля, тела. Эти связи называются закономерностями (в разных областях науки и техники они называются по разному – аксиомами, постулатами, гипотезами, законами, правилами, принципами, предположениями).

В сопротивлении материалов используют следующие предположения (хорошо подтверждаемые экспериментально при изучении не слишком малых объектов).

1. Тело считается однородным и сплошным, а не состоящим из молекул и атомов, частиц и т.д. Эта гипотеза позволяет применять дифференциальное и интегральное исчисления, в основе которых лежит метод анализа бесконечно малых величин (следовательно, и бесконечно малых расстояний).

2. В традиционных курсах сопротивления материалов принимается, что свойства тела одинаковы во всех направлениях. Такое тело называется изотропным. Эта гипотеза позволяет уменьшить до минимума число физико-механических характеристик, которые требуется определять из эксперимента. Материалы типа древесины, стеклопластика и т.п. называются анизотропными. У них в разных направлениях механические характеристики разные.

3. Перемещения и деформации тела считаются малыми настолько, что изменением направления действия внешних сил на сечения по мере деформирования тела можно пренебречь. Это позволяет ограничиться знанием только начального положения тела и начального направления внешних воздействий.

4. Принцип Сен-Венана. Он гласит, что напряженное и деформированное состояния тела вдали от области приложения нагрузок мало зависят от истинного (детального) способа приложения этих нагрузок. Это позволяет использовать замену истинных поверхностных нагрузок и объемных сил сосредоточенными силами, погонными силами, моментами. Этот закон проверялся на многих задачах и хорошо подтверждался и экспериментальными исследованиями, и численными расчетами.

8.2. Основные законы, используемые в сопротивлении материалов

1) **Соотношения статики.** Их записывают в виде следующих уравнений равновесия.

$$\sum F_x = 0$$

.....

$$\sum M_z = 0$$

2) **Закон Гука (**1678 год): **чем больше сила, тем больше деформация, причем, прямо пропорционально силе**. Физически это означает, что все тела это пружины, но с большой жесткостью. При простом растяжении бруса продольной силой $N=F$ этот закон можно записать в виде:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}.$$

Здесь N – продольная сила, l - длина бруса, A - площадь его поперечного сечения, E - коэффициент упругости первого рода (**модуль Юнга**).

С учетом формул для напряжений и деформаций, закон Гука записывают следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}.$$

Аналогичная связь наблюдается в экспериментах и между касательными напряжениями и углом сдвига:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}.$$

G называют **модулем сдвига**, реже – модулем упругости второго рода. Как и любой закон, имеет предел применимости и закон Гука. Напряжение $\sigma_{пц}$, до которого справедлив закон Гука, называется **пределом пропорциональности** (это важнейшая характеристика в сопромате).

Изобразим зависимость σ от ε графически для стали Ст.3 (рис.8.1). Эта картина называется **диаграммой растяжения**. После точки B (т.е. при $\sigma > \sigma_{пц}$) эта зависимость перестает быть прямолинейной.

При $\sigma > \sigma_y$ после разгрузки в теле появляются остаточные деформации, поэтому σ_y называется **пределом упругости.**

При достижении напряжением величины $\sigma = \sigma_т$ многие металлы начинают проявлять свойство, которое называется текучестью. Это означает, что даже при постоянной нагрузке материал продолжает деформироваться (то есть ведет себя как жидкость). Графически это означает, что диаграмма параллельна абсциссе (участок DL). Напряжение $\sigma_т$, при котором материал течет, называется **пределом текучести**.

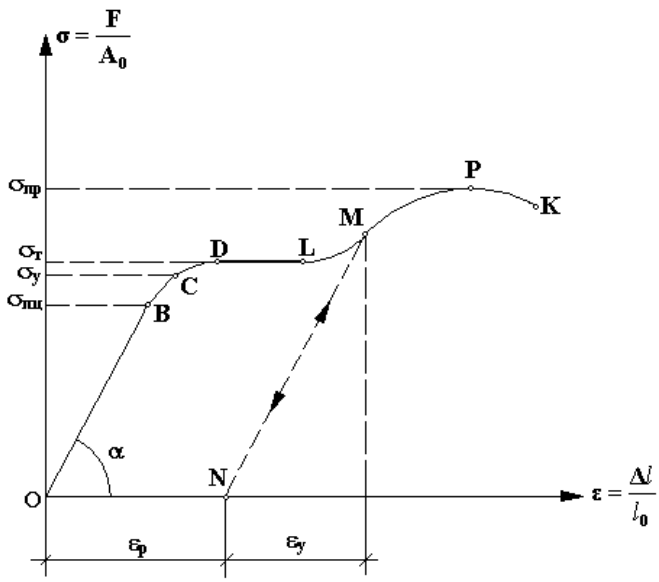


Рис.8.1

Некоторые материалы (Ст.3 - строительная сталь) после непродолжительного течения снова начинают сопротивляться. Сопротивление материала продолжается до некоторого максимального значения $\sigma_{пр}$, в дальнейшем начинается постепенное разрушение. Величина $\sigma_{пр}$ - называется **<u>пределом прочности</u>** (синоним для стали: временное сопротивление, для бетона – кубиковая или призменная прочность). Применяют также и следующие обозначения:

$$\sigma_в\ ,\ \sigma^*,\ R_b\ ,\ R_{bt}.$$

Аналогичная зависимость наблюдается в экспериментах между касательными напряжениями и сдвигами.

3) **<u>Закон Дюгамеля – Неймана (линейного температурного расширения):</u>**

<u>При наличии перепада температур тела изменяют свои размеры, причем прямо пропорционально этому перепаду температур.</u>

Пусть имеется перепад температур $\Delta T = T^{кон} - T^{нач}$. Тогда этот закон имеет вид:

$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta T\ .$$

Здесь α - **коэффициент линейного температурного расширения**, l - длина стержня, $\Delta\ l$-его удлинение.

4) **<u>Закон ползучести</u>**.

Исследования показали, что все материалы сильно неоднородны в малом. Схематическое строение стали изображено на рис.8.2.

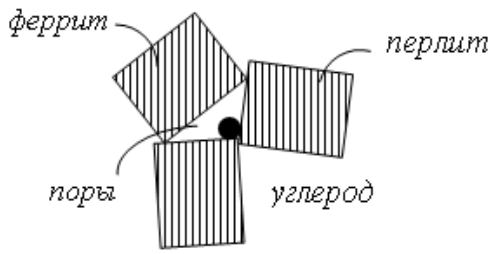


Рис.8.2

Некоторые компоненты материалов обладают свойствами жидкости, поэтому с течением времени образцы из таких материалов под нагрузкой получают дополнительное удлинение Δ^C (рис.8.3.) (металлы при высоких температурах, бетон, дерево, пластики – при обычных температурах). Это явление называется **ползучестью** материала.

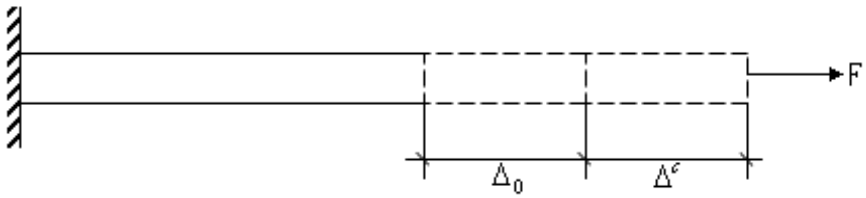


Рис.8.3

Для жидкости справедлив закон: **чем больше сила, тем больше скорость движения тела в жидкости**. Если это соотношение линейно (т.е. сила пропорциональна скорости), то можно записать его в виде:

$$\dot{\Delta}^C = \frac{F}{\mu}.$$

Если перейти к относительным силам и относительным удлинениям, то получим

$$\boxed{\dot{\varepsilon}_{cr} = \frac{\sigma}{\eta}}$$

Здесь индекс «*cr*» означает, что рассматривается та часть удлинения, которая вызвана ползучестью материала. Механическая характеристика η называется коэффициентом вязкости.

5) **<u>Закон сохранения энергии.</u>**

Рассмотрим нагруженный брус

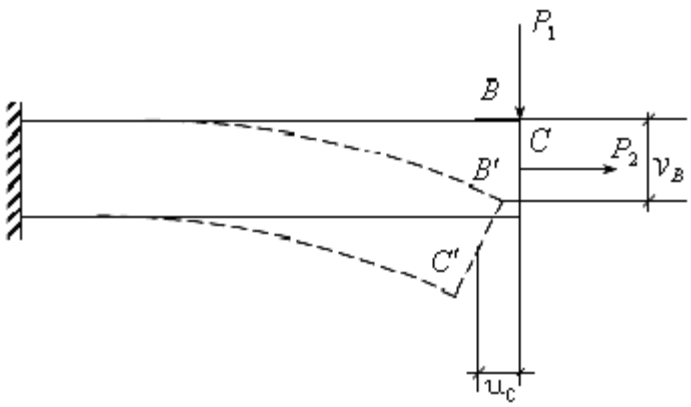


Рис.8.4

Введем понятие перемещения точки, например,

v_B - вертикальное перемещение точки B;

u_c - горизонтальное смещение точки C.

Силы P_1, P_2 при этом совершают некоторую работу *U*. Учитывая, что силы P_1, P_2 начинают возрастать постепенно и предполагая, что возрастают они пропорционально перемещениям, получим:

$$U = \frac{1}{2} \cdot P_1 \cdot v_B + \frac{1}{2} \cdot P_2 \cdot u_c .$$

Согласно закону сохранения (Ломоносов, 1745) **никакая работа не исчезает, она тратится на совершение другой работы или переходит в другую энергию** (*энергия* – это работа, которую может совершить тело.).

Работа сил P_1, P_2, тратится на преодоление сопротивления упругих сил, возникающих в нашем теле. Чтобы подсчитать эту работу учтем, что тело можно считать состоящим из малых упругих частиц. Рассмотрим одну из них:

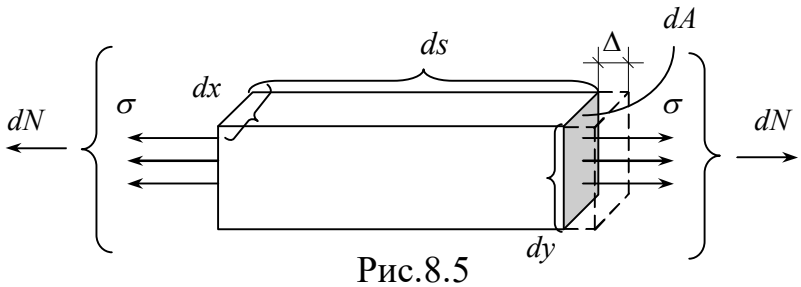


Рис.8.5

Со стороны соседних частиц на него действует напряжение σ. Равнодействующая напряжений будет dN

$$dN = \sigma \cdot dA .$$

Под действием σ частица удлинится. Согласно определению относительное удлинение это удлинение на единицу длины. Тогда:

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{ds} \quad \Rightarrow \quad \Delta = \varepsilon \cdot ds .$$

Вычислим работу dW, которую совершает сила dN (здесь также учитывается, что силы dN начинают возрастать постепенно и возрастают они пропорциональны перемещениям):

$$dW = dN \cdot \Delta \cdot \frac{1}{2} = \sigma \cdot dA \cdot \varepsilon \cdot ds \cdot \frac{1}{2}$$

$$dW = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \varepsilon \cdot dV$$

Для всего тела получим:

$$W = \sum dW = \int_V dW = \int_V \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \varepsilon \cdot dV \ .$$

Работа W, которую совершило σ, называют **<u>энергией упругой деформации.</u>**

Согласно закону сохранения энергии:

$$\boxed{\int_V \sigma \cdot \varepsilon \cdot dV = (P_1 \cdot v_B + P_2 \cdot u_c)}$$

6) **<u>Принцип возможных перемещений.</u>**

Это один из вариантов записи закона сохранения энергии.

Пусть на брус действуют силы F_1, F_2,…. Они вызывают в теле перемещения точки $u(x, y, z)$ и напряжения $\sigma(x, y, z)$. Дадим телу <u>*дополнительные малые возможные перемещения*</u> $\delta u(x, y, z)$. В механике запись вида δa означает фразу «возможное значение величины a». Эти возможные перемещения вызовут в теле <u>дополнительные возможные деформации</u> $\delta\varepsilon(x, y, z)$. Они приведут к появлению дополнительных внешних сил и напряжений $\delta F_1, \delta F_2 \ldots$, $\delta\sigma$.

Вычислим работу внешних сил на дополнительных возможных малых перемещениях:

$$U = (F_1 + \delta F_1)\delta u_1 + (F_2 + \delta F_2)\delta u_2 + \ldots \approx F_1 \delta u_1 + F_2 \delta u_2 + \ldots$$

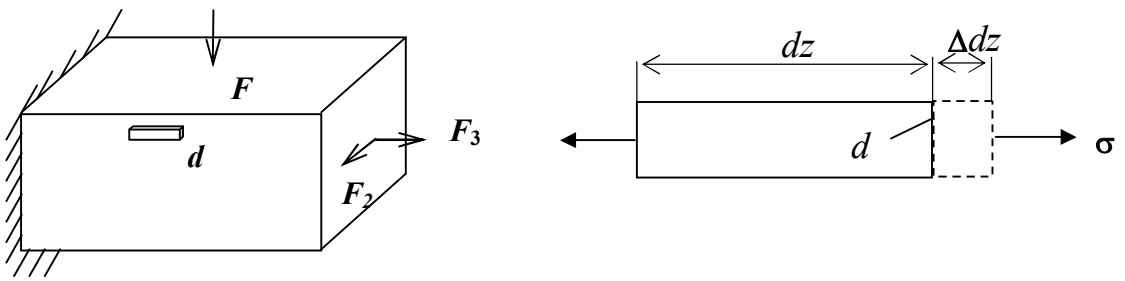


Рис.8.6

Здесь δu_1, $\delta u_2 \ldots$ - дополнительные перемещения тех точек, в которых приложены силы F_1, F_2, …

Рассмотрим снова малый элемент с поперечным сечением dA и длиной dz (см. рис.8.5. и 8.6.). Согласно определению дополнительное удлинение Δdz этого элемента вычисляется по формуле:

$$\Delta dz = \delta\varepsilon\, dz.$$

Сила растяжения элемента будет:

$$dN = (\sigma+\delta\sigma)\, dA \approx \sigma\, dA.$$

Работа внутренних сил на дополнительных перемещениях вычисляется для малого элемента следующим образом:

$$dW = dN\, \Delta dz = \sigma\, dA\, \delta\varepsilon\, dz = \sigma\, \delta\varepsilon\, dV.$$

Суммируя энергию деформации всех малых элементов получим полную энергию деформации:

$$W = \int_V \sigma\, \delta\varepsilon\, dV$$

Закон сохранения энергии $W = U$ дает:

$$\int_V \sigma\, \delta\varepsilon\, dV = F_1\, \delta u_1 + F_2\, \delta u_2 + \ldots .$$

Это соотношение и называется <u>принципом возможных перемещений</u> (его называют также <u>принципом виртуальных перемещений).</u> Аналогично можно рассмотреть случай, когда действуют еще и касательные напряжения. Тогда можно получить, что к энергии деформации W добавится следующее слагаемое:

$$W_1 = \int_V \tau\, \delta\gamma\, dV .$$

Здесь τ - касательное напряжение, γ - сдвиг малого элемента. Тогда <u>принцип возможных перемещений</u> примет вид:

$$\int_V \sigma\, \delta\varepsilon\, dV + \int_V \tau\, \delta\gamma\, dV = F_1\, \delta u_1 + F_2\, \delta u_2 + \ldots$$

В отличие от предыдущей формы записи закона сохранения энергии здесь нет предположения о том, что силы начинают возрастать постепенно и возрастают они пропорционально перемещениям.

7) **<u>Эффект Пуассона.</u>**

Рассмотрим картину удлинения образца:

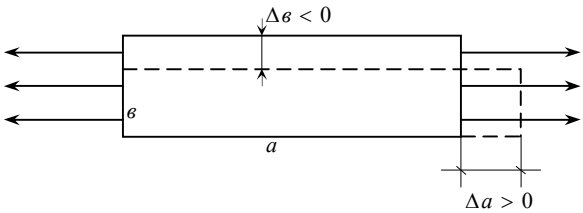


Рис.8.7

Явление укорочения элемента тела поперек направления удлинения называется *эффектом Пуассона*.

Найдем продольную относительную деформацию.

$$\varepsilon_{продоль} = \frac{\Delta a}{a} > 0 .$$

Поперечная относительная деформация будет:

$$\varepsilon_{попереч} = \frac{\Delta в}{в} < 0 .$$

Коэффициентом Пуассона называется величина:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{попереч}}{\varepsilon_{продоль}} .$$

Для изотропных материалов (сталь, чугун, бетон) коэффициент Пуассона

$$\boxed{0 < \nu < 0,5} .$$

Это означает, что в поперечном направлении деформация **меньше** продольной.

Примечание. Современные технологии могут создать композиционные материалы, у которых коэффициент Пуассона >1, то есть поперечная деформация будет больше, чем продольная. Например, это имеет место для материала, армированного жесткими волокнами под малым углом $\pm\alpha$ <<1 (см. рис.8.8.). Оказывается, что коэффициент Пуассона при этом почти пропорционален величине $ctg^2\alpha$, т.е. чем меньше α , тем больше коэффициент Пуассона.

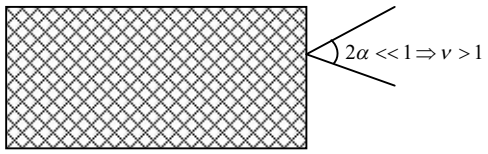


Рис.8.8

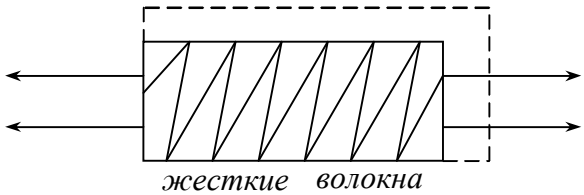
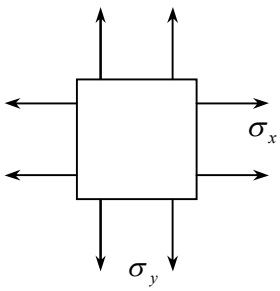


Рис.8.9

Еще более удивительным является материал, приведенный на (рис.8.9.), причем для такого армирования имеет место парадоксальный результат – продольное удлинение ведет к увеличению размеров тела и в поперечном направлении.

8) **Обобщенный закон Гука.**

Рассмотрим элемент, который растягивается в продольном и поперечном направлениях. Найдем деформацию, возникающую в этих направлениях.



Вычислим деформацию ε'_x, возникающую от действия σ_x:

$$\varepsilon_x' = \frac{\sigma_x}{E}.$$

От действия σ_y в результате эффекта Пуассона возникает дополнительная деформация:

$$\varepsilon_x'' = -\nu \frac{\sigma_y}{E}.$$

Общая деформация будет:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x' + \varepsilon_x'' = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}.$$

Если действует и σ_z, то добавиться еще одно укорочение в направлении оси x $\varepsilon_x''' = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$.

Следовательно: $$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}.$$

Аналогично: $$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E}.$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}.$$

Эти соотношения называются **обобщенным законом Гука.**

Интересно, что при записи закона Гука делается предположение о независимости деформаций удлинения от деформаций сдвига (о независимости от касательных напряжений, что одно и то же) и наоборот. Эксперименты хорошо подтверждают эти предположения. Забегая вперед, отметим, что прочность напротив сильно зависит от сочетания касательных и нормальных напряжений.

Примечание: Приведенные выше законы и предположения подтверждаются многочисленными прямыми и косвенными экспериментами, но, как и все другие законы, имеют ограниченную область применимости.

9. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЗАКОНОВ МЕХАНИКИ ДЛЯ РАСЧЕТА СТРОИТЕЛЬНЫХ СООРУЖЕНИЙ

9.1. Расчет статически неопределимых систем

9.1.1. Статически неопределимая железобетонная колонна

Рассмотрим бетонную колонну с металлической арматурой, нагруженную через жесткую плиту силой F (рис.9.1).

Примем следующие исходные данные (они приняты таковыми только для демонстрации метода отыскания продольных сил сжатия).

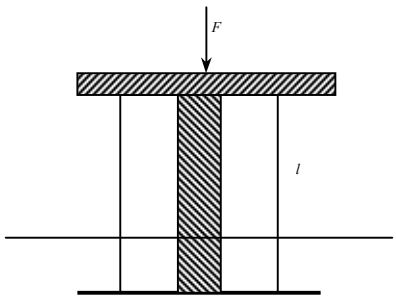


Рис.9.1

<u>Дано</u>:

$$A^{бет} = 2 \cdot A^{арм}$$

$$E^{арм} = 5 \cdot E^{бет}$$

<u>Найти</u>: Силу сжатия бетона и силу сжатия арматуры $N^{бет}, N^{арм}$.

<u>Решение</u>: Возьмем сечение:

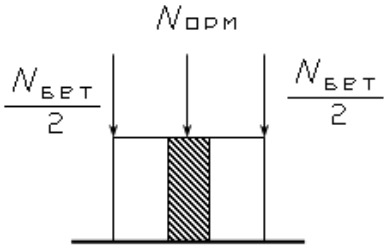


Рис.9.2

На это сечение сила давления F распределяется не одинаково, хотя суммарно имеет место равенство:

$$-F = N^{арм} + N^{бет} \qquad (9.1)$$

Здесь знак «-» поставлен потому , что имеет место сжатие сечения. Уравнение (9.1) имеет бесконечное множество решений. Уравнений равновесия для однозначного определения сил сжатия бетона и арматуры записать не удается. Поэтому задача называется статически неопределимой. Поскольку методами теоретической механики выбрать решение, отвечающее реальности, невозможно, то для этого используем свойство тел деформироваться по закону Гука, т.е. кинематические соображения. Из рисунка рис.9.1 видно, что и бетон, и арматура укорачиваются одинаково, т.е.

$$\Delta l^{бет} = \Delta l^{арм}$$

Это соотношение называется **уравнением совместности деформации**.

Подставим сюда закон Гука.

$$\frac{N^{бет} \cdot l}{E^{бет} \cdot A^{бет}} = \frac{N^{арм} \cdot l}{E^{арм} \cdot A^{арм}}.$$

Найдем соотношение знаменателей:

$$E^{бет} \cdot A^{бет} = \frac{1}{5} \cdot E^{арм} \cdot 2A^{арм}.$$

Тогда получим:

$$\frac{N^{бет}}{\frac{2}{5} E^{арм} \cdot A^{арм}} = \frac{N^{арм}}{E^{арм} \cdot A^{арм}}.$$

Отсюда

$$N^{бет} = \frac{2}{5} \cdot N^{арм} = 0,4 \cdot N^{арм}.$$

Подставляя в (9.1) найдем:

$$0,4 \cdot N^{арм} + N^{арм} = -F.$$

Отсюда:

$$N^{арм} = -\frac{5}{7} F = -0.71F$$

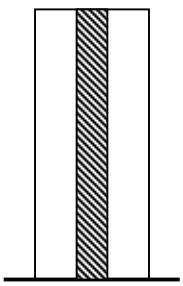
$$N^{бет} = -\frac{2}{7} F$$

Вывод: хотя арматуры в колонне в два раза меньше чем бетона, но она воспринимает основную часть нагрузки (а именно - 71% нагрузки).

9.1.2 Температурные напряжения

Рассмотрим ту же колонну, но не нагруженную. Пусть в ней произошел перепад температуры на 100°. Примем следующие исходные данные (они снова приняты таковыми только для демонстрации метода отыскания температурных напряжений).

Дано:



$A^{бет} = 2 \cdot A^{арм}$

$E^{арм} = 5 \cdot E^{бет}$

$\Delta T = 100^{\circ}$

$\alpha^{бет} = 3\alpha^{арм}$

$E^{арм} = 2000\ кН/см^2$, $\alpha^{арм} = 10^{-5}\ \frac{1}{град}$, $A^{арм} = 10\ см^2$

Найти: $\sigma^{арм}, \sigma^{бет}$

Решение:

От перепада температур в несвязанных арматуре и бетоне деформации были бы разные. Но в колонне они воздействуют друг на друга, следовательно:

$$N^{бет}, N^{арм} \neq 0 .$$

С другой стороны, колонна не нагружена, следовательно, нет суммарных сил сжатия на любые сечение, поэтому:

$$N^{арм} + N^{бет} = 0 \qquad (9.2)$$

Поскольку неизвестных два, а уравнение одно, то снова привлечем геометрические соображения. Из рисунка видно, что и бетон, и арматура могут укорачиваться только одинаково. Тогда:

$$\Delta l^{бет} = \Delta l^{арм} \qquad (9.3)$$

Запишем выражения для удлинений с учетом закона Гука и Дюгамеля-Неймана:

$$\Delta l^{бет} = \frac{N^{бет} \cdot l}{E^{бет} \cdot A^{бет}} + \alpha^{бет} \cdot l \cdot \Delta T$$

$$\Delta l^{арм} = \frac{N^{арм} \cdot l}{E^{арм} \cdot A^{арм}} + \alpha^{арм} \cdot l \cdot \Delta T$$

Подставим в условие совместности деформации (9.3). С учетом исходных данных получим:

$$\frac{N^{бет} l}{\frac{1}{5} \cdot E^{арм} \cdot 2 \cdot A^{арм}} + 3\alpha^{арм} \cdot 100^{\circ} l = \frac{N^{арм} l}{E^{арм} \cdot A^{арм}} + \alpha^{арм} \cdot 100^{\circ}\, l \quad .$$

Умножая на $0,4 E^{арм} \cdot A^{арм} / l$ и учитывая исходные данные, получим:

$$N^{бет} + 0,4 \cdot 20000 \cdot 3 \cdot 10^{-5} \cdot 100 кН = N^{арм} \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 20000 \cdot 10^{-5} \cdot 100 кН \qquad (9.4)$$

Таким образом, имеем систему уравнений (9.2), (9.4):

$$\begin{cases} N^{бет} + 24 = N^{арм} \cdot 0,4 + 8 \\ N^{бет} + N^{арм} = 0 \end{cases}$$

Решая, получим:

$$N^{арм} = \frac{16}{1,4} kH = \frac{80}{7} kH \approx 11,5\, kH .$$

Знак «+» говорит о том, что арматура растянута. Из (9.2) вытекает, что $N^{бет} = -N^{арм} = -11,5\, кН$, следовательно, бетон сжат.

Отметим следующий интересный факт. Хотя бетон сжат, но ввиду нагрева вся колонна, а значит и бетонная ее часть, удлинились.

Действительно, подсчитаем:

$$\Delta l^{бет} = \Delta l^{арм} = \frac{N^{арм} \cdot l}{E^{арм} \cdot A^{арм}} + \alpha^{арм} \cdot \Delta T \cdot l = l(11,5 \frac{1}{2000 \cdot 10} + 10^{-5} \cdot 100) = 0,00157\, l$$

Знак «+» говорит о том, что колонна удлинилась.

Можно подсчитать напряжения:

$$\sigma^{бет} = \frac{N^{бет}}{A^{бет}} = -\frac{80\,кН}{7 \cdot 20\,см^2} = -0.57\,\frac{кН}{см^2}$$

$$\sigma^{арм} = \frac{N^{арм}}{A^{арм}} = \frac{80}{7 \cdot 10} = 1.14\,\frac{кН}{см^2}$$

Видно, что арматура является в два раза более нагруженной, чем бетон.

9.1.3. Монтажные напряжения

При изготовлении элементов конструкции их размеры невозможно изготовить точно по проекту. В результате, при сборке приходится некоторые элементы предварительно нагружать. Иногда элементы делают заведомо меньше или больше проектных для создания предварительных напряжений (преднапряженный железобетон). Снова методику расчета монтажных напряжений рассмотрим на примере бетонной колонны с металлической арматурой.

Дано:

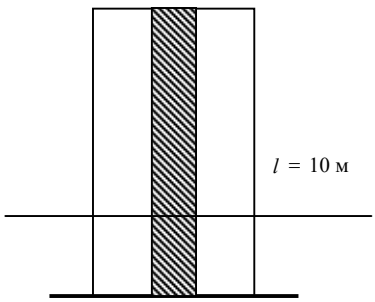
$A^{арм} = 10\,см^2$

$A^{бет} = 20\,см^2$

$E^{арм} = 2000\,кН/см^2$

$E^{бет} = 400\,кН/см^2$

$l = 10м$



Пусть арматура сделана короче проектной длины на 10см., т.е.

$$\Delta^{арм} = l^{арм} - l^{проектн} = -10\,см$$

Найти: $N^{бет}, N^{арм}$

Решение:

Как и в температурной задаче имеем систему уравнений.

$$N^{бет} + N^{арм} = 0 \qquad (9.5)$$

$$\Delta l^{бет} = \Delta l^{арм} \qquad (9.6)$$

По закону Гука:

$$\Delta l^{бет} = \frac{N^{бет} \cdot l}{E^{бет} \cdot A^{бет}} = \frac{N^{бет} \cdot 10\,00см}{400 \cdot 20\,кН} = \frac{N^{арм} см}{8кН}.$$

Учтем, что арматура сделана короче проектной длины на 10 см., но удлиняется от силы $N^{арм}$ по закону Гука. Тогда получим

$$\Delta l^{арм} = \frac{N^{арм} \cdot l}{E^{арм} \cdot A^{арм}} - 10см = \frac{N^{арм} \cdot 10\,00см}{2000 \cdot 10\,кН} - 10см = \frac{N^{арм} см}{20кН} - 10см.$$

Подставляя в (9.6), получим:

$$\frac{N^{бет} см}{8кН} = \frac{N^{арм} см}{20кН} - 10\,см \qquad (9.7)$$

Из (9.5) следует, что $N^{арм} = -N^{бет}$.

Подставляя в (9.7) получим:

$$-20 \cdot N^{арм} - 8 \cdot N^{арм} = -1600 кН \qquad \Rightarrow \qquad N^{арм} = \frac{1600}{28} кН \approx 60\, кН\ .$$

Таким образом, арматура растянута. Для бетона получим, что он сжат силой

$$N^{бет} = -N^{арм} = -60\, кН\ .$$

Теперь при необходимости можно подсчитать напряжения

$$\sigma^{арм} = \frac{60}{10} кН / см^2 = 6\, кН / см^2, \qquad \sigma^{бет} = -\frac{60}{20} кН / см^2 = -3\, кН / см^2\ .$$

Снова видим, что арматура нагружена в два раза больше, чем бетон.

9.1.4. Расчет колонны по теории предельного равновесия

Этот метод является основным при расчете ЖБК. Основная суть метода состоит в следующем.

Пусть конструкция нагружается внешней силой. При её увеличении, один из элементов может достигнуть состояния, которое называется предельным (металлы достигают предела текучести). Дальнейшая деформация не может повысить в этом элементе силу сопротивления. Таким образом, этот элемент продолжает сопротивляться, но не может сдержать деформацию. После этого другой элемент достигает предельного состояния и так далее, пока вся конструкция не перейдет в предельное состояние. Нагрузка, при которой это происходит, называется предельной.

Рассмотрим задачу отыскания предельной нагрузки на нашем примере бетонной колонны с металлической арматурой.

Пусть известны площади сечения арматуры, бетона, предел текучести арматуры $\sigma_T^{арм}$ и предел прочности бетона $\sigma_B^{бет}$. Таким образом,

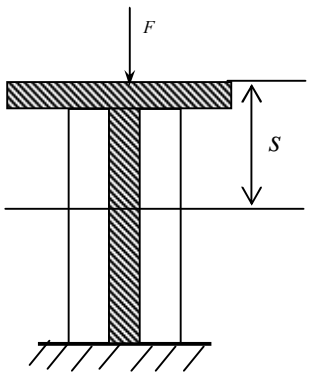
<u>Дано:</u>

$A^{арм} = 10\, см^2$

$A^{бет} = 20\, см^2$

$\sigma_T^{арм} = 3\, кН/см^2$

$\sigma_B^{бет} = 0{,}3\, кН/см^2$



<u>Найти</u>: силу $F*$, которую может выдержать колонна.

<u>Решение</u>.

Сила сжатия колонны N будет:

$$N = -F* = N^{бет} + N^{арм} \tag{9.8}$$

Сначала потечет арматура, она будет сопротивляться с напряжением $\sigma^{арм} = -\sigma_T^{арм} = -3\, кН/см^2$, но не сможет сдерживать деформацию колонны. Разрушение начнется тогда, когда и в бетоне будет достигнут предел

прочности, то есть, когда в бетоне напряжения достигнут разрушающего значения $\sigma_B^{бет}$. Таким образом, в предельном состоянии (знаки «-» поставлены потому, что и арматура, и бетон сжимаются):

$$N^{арм} = -\sigma_T^{арм} \cdot A^{арм} = -3 \cdot 10\, kH$$
$$N^{бет} = -\sigma_B^{бет} \cdot A^{бет} = -0{,}3 \cdot 20\, kH \,.$$

Из (9.8) вытекает, что $-F^* = -30\, кН$ - $6\, кН = -36\, кН$.

Таким образом, $F^* = 36$ кH .

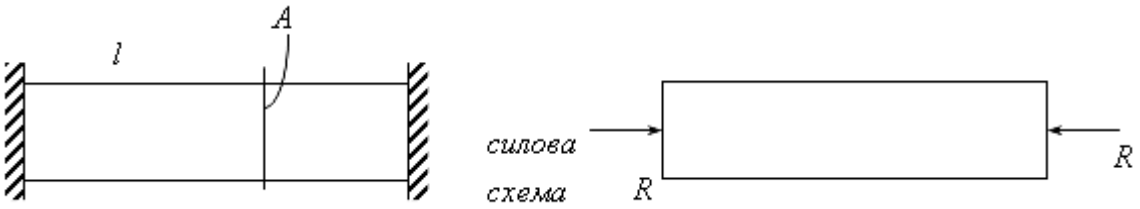
9.2. Особенности температурных и монтажных напряжений

9.2.1. Независимость температурных напряжений от размеров тела

Для простоты анализа рассмотрим задачу о закрепленном с двух концов брусе, хотя выводы справедливы для любых конструкций при некоторых оговорках.

<u>Дано:</u> $\Delta T, \alpha, l, A, E$

<u>Найти:</u> $\boldsymbol{\sigma}^{\text{Т}}$ (индексом «Т» зашифровано слово «температурное»)



Найти R из уравнения равновесия не удается, поэтому используем геометрическое условие: $\Delta l = 0$

$$\frac{N^T \cdot l}{A \cdot E} + \Delta t \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot l = 0$$
$$\frac{N^{\text{Т}}}{A} = \boldsymbol{\sigma}^{\text{Т}} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{\sigma}^{\text{Т}}}{E} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \Delta T = 0 \,.$$

Отсюда находим температурное напряжение:

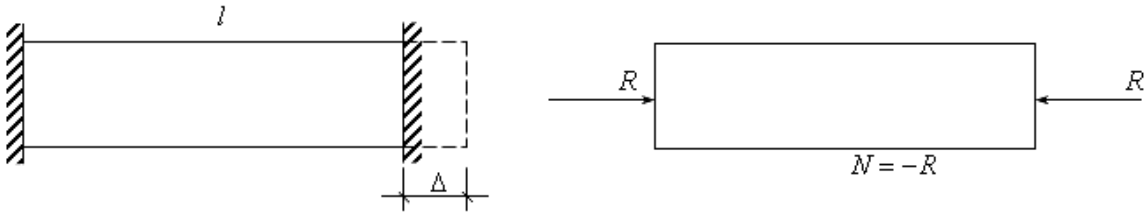
$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}^{\text{Т}} = -\boldsymbol{\alpha} \cdot \Delta T \cdot E}$$

<u>Следствия.</u>

1) Чем больше жесткость материала (E), тем больше температурное напряжение $\boldsymbol{\sigma}^{\text{Т}}$.
2) Температурное напряжение не зависит ни от длины стержня, ни от формы сечения, ни от ее площади.

9.2.2. Независимость монтажных напряжений от размеров тела

Пусть стержень имеет длину, которая больше проектной на Δ*см*.



И в этой задаче найти R из уравнений равновесия не удается, поэтому используем геометрическое условие:

$$\frac{N \cdot l}{A \cdot E} + \Delta = 0 \Big| \cdot E .$$

Аналогично предыдущей задаче получаем отсюда $\sigma^{\Delta} l + E \cdot \Delta = 0$.

Окончательно $\sigma^{\Delta} = -\dfrac{\Delta \cdot E}{l}$.

Введем относительную неточность изготовления: $\delta = \dfrac{\Delta}{l}$.

Тогда $\boxed{\sigma^{\Delta} = -E\delta}$

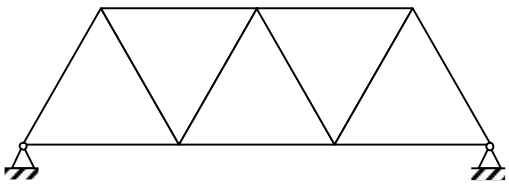
Следствие:

1) Чем больше E, тем больше монтажное напряжение σ^{Δ}.

2) Если неточность задавать в относительных величинах δ, то монтажное напряжение σ^{Δ} не зависит ни от формы, ни от площади сечения, ни от длины, а зависит только от материала (т.е. от E) и относительной неточности изготовления δ.

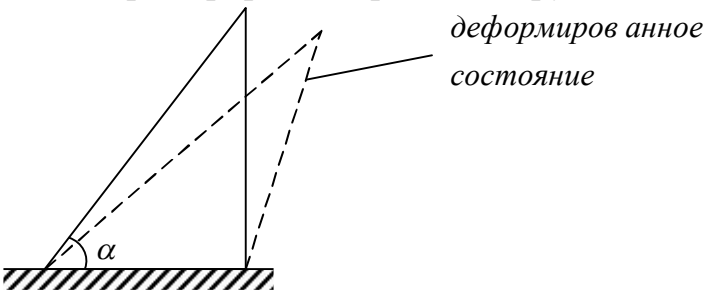
9.2.3. О температурных и монтажных напряжениях в статически определимых системах

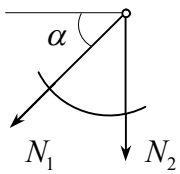
Если произойдет перепад температуры, то в конструкции возникнут удлинения элементов.



Но если нет лишних связей, (то есть задача статически определима), то температурные и монтажные напряжения не возникают.

Например, рассмотрим конструкцию, изготовленную из двух стержней:





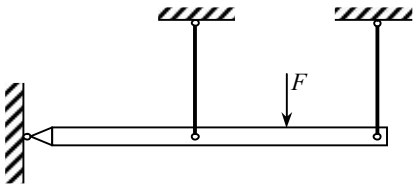
Если ее нагреть, то она деформируется. Покажем, что нет напряжений. Сделаем сечение и запишем уравнения равновесия для верхней части:

$$\sum F_x = 0: \quad N_1 Cos\boldsymbol{\alpha} = 0 \to N_1 = 0 \to \boldsymbol{\sigma}_1 = 0$$
$$\sum F_y = 0: \quad -N_2 - N_1 Sin\boldsymbol{\alpha} = 0 \to N_2 = 0 \to \boldsymbol{\sigma}_2 = 0$$

Получили, что напряжения равны нулю в обоих стержнях.

9.3. Независимость предельной нагрузки от самоуравновешенных начальных напряжений

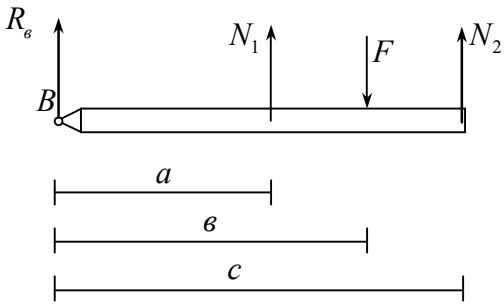
Рассмотрим статически неопределимую, например, стержневую систему. Пусть имеется и перепад температур, и неточности изготовления, т.е. известны $\sigma^T, A_1, A_2, \alpha, \Delta T, \delta, E$.



Из рисунка видно, что неограниченная деформация системы начнется тогда, когда потекут оба стержня, то есть при:

$$\sigma_1 = \sigma_T, \qquad \sigma_2 = \sigma_T$$
$$N_1 = \sigma_T A_1, \quad N_2 = \sigma_T A_2$$

Запишем уравнения равновесия после введения реакций и сил растяжения стержней:



$$\sum M_B = 0: \quad N_1 a - F * в + N_2 c = 0.$$

Подставляем N_1, N_2, F в это уравнения в предельном состоянии:

$$a\sigma_T A_1 + c\sigma_T A_2 - F * в = 0$$

$$\boxed{F* = \frac{aA_1 + cA_2}{в}\sigma_T}$$

Следствия:

1) От монтажных и температурных напряжений F^* не зависит

Кроме того, можно видеть, что

2) F^* не зависит от длин стержней;

3) F^* не зависит также от жесткости стержней.

9.4. Некоторые особенности деформирования стержней при растяжении и сжатии с учетом силы тяжести

Рассмотрим тяжелый стержень (т.е. учитывается собственный вес).

Пусть ρ - плотность материала. Сделаем сечение на расстоянии s от свободного конца (см. рис.9.3)

Усилие сжатия на сечение будет:

$$N = -P_{веса} = -\rho g V = -\rho g A s$$

Тогда $$\sigma = \frac{N}{A} = -\frac{\rho g A s}{A} = -\rho g s$$

Итак:

$$\sigma = -\rho g s.$$

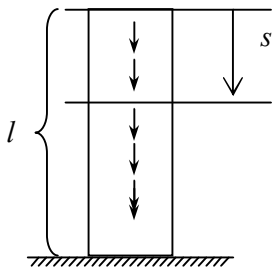


Рис. 9.3

Следствие: напряжение, возникающее под действием силы тяжести, не зависит от площади и формы сечения, а зависит только от положения сечения и материала.

Рассмотрим теперь задачу вычисления осадки колонны. Вырежем на некотором расстоянии s элемент длины ds.

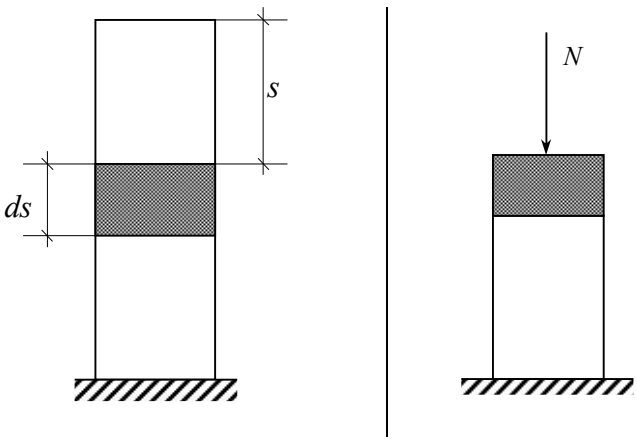


Рис. 9.4

Подсчитаем его укорочение по закону Гука:

$$\Delta(ds) = \frac{N}{A}\frac{ds}{E} = \frac{-\rho g A \cdot s \cdot ds}{AE}.$$

Суммируя укорочения всех таких элементов, получим полное укорочение стержня длины *l*. Это будет сумма бесконечно малых величин, то есть интеграл:

$$\Delta l = -\int_0^l \rho g \frac{sds}{E} = -\frac{\rho g}{E}\int_0^l sdv = -\frac{\rho g}{E}\frac{s^2}{2}\Big|_0^l = -\frac{\rho g}{E}\frac{l^2}{2}.$$

Итак,

$$\boxed{\Delta l = -\frac{\rho g}{E}\frac{l^2}{2}}$$

<u>Следствие</u>: деформация стержня под действием собственного веса не зависит от размеров и формы сечения стержня.

9.5. Расчет элементов конструкций с трещинами

Теория расчета тел с трещинами была создана в 1930-ых годах (автором является Гриффитс, первая работа была им опубликована в 1921 г.). Рассмотрим вывод формулы Гриффитса:

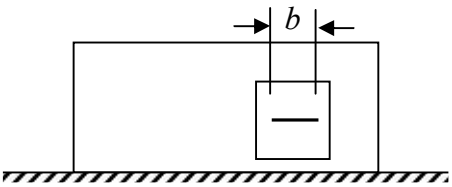


Рис.9.5

Пусть в теле есть трещина длины *b* (рис.9.5). Вырежем содержащий её элемент (см. рис.9.6).

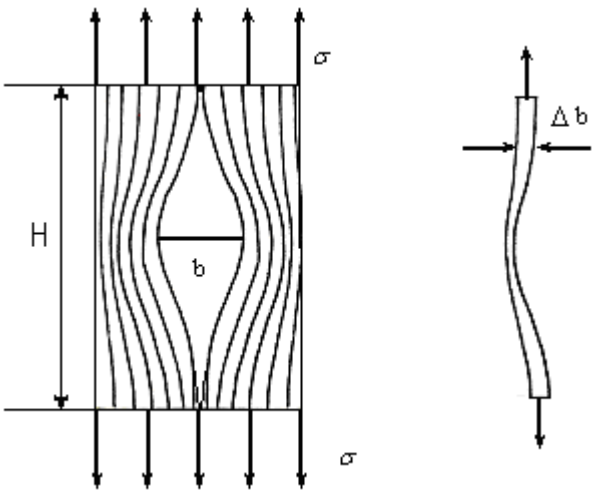


Рис.9.6

Нарисуем растянутые полоски (см. рис.9.6). В областях над трещиной и под трещиной материал не может быть нагружен (на рис.9.6 они представляют собой фигуры типа криволинейных треугольников).

Подсчитаем энергию, накопленную в одной полоске, примыкающей к трещине. Пусть t-толщина пластинки, l -длина полоски. Тогда энергия упругой деформации будет

$$W = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \varepsilon \cdot V .$$

Здесь V - объем полоски. Он равен $V \approx t \cdot l \cdot \Delta b$

Рассмотрим случай, когда трещина начала расти, пусть она увеличилась на ширину полоски Δb. Но после этого в выделенной полоске энергия деформации исчезает, поскольку там нет напряжений. С другой стороны энергия исчезнуть не может - она была потрачена на увеличение трещины на величину Δb, то есть была потрачена на разрыв межмолекулярных связей. Пусть на создание одного квадратного сантиметра трещины требуется энергия C (размерность - *кН/см*).

Тогда на создание трещины длины Δb *см.* требуется энергия, равная $U = C \cdot \Delta b \cdot t$. Согласно закону сохранения энергии должно быть:

$$W = U.$$

Свяжем l с шириной трещины. Ясно, что чем больше b, тем больше l. Это утверждение можно записать в виде:

$$l = k \cdot b .$$

Кроме того, имеет место закон Гука: $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$. Тогда получим:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{E} \cdot k \cdot b \cdot t \cdot \Delta b = C \cdot \Delta b \cdot t \qquad \Rightarrow \qquad \sigma^2 = \frac{2 \cdot E \cdot C}{k \cdot b} .$$

Обозначим: $$a = \frac{2 \cdot C}{k} .$$

Тогда: $$\sigma^2 = \frac{E \cdot a}{b} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma = \sqrt{\frac{E \cdot a}{b}} .$$

Поскольку трещина начала увеличиваться, это означает, что тело начинает разрушаться. Поскольку напряжение, при котором тело разрушается, называется пределом прочности (обозначим через σ^*), то окончательно **формула Гриффитса** принимает вид:

$$\boxed{\sigma^* = \sqrt{\frac{E \cdot a}{b}}}$$

Здесь E – модуль Юнга, a – константа материала, b - длина трещины. В частности, для стали E= 2000 т/см^2, a = 0.003 т/см. Для бетона E= 200 т/см^2, a =1,5/10^{-6} т/см.

<u>Порядок расчета тел с трещинами</u>

Пусть имеется тело, нагруженное какими-то силами, и обнаружена трещина длины b . Расчет производится в следующем порядке. Мысленно вырезают элемент вблизи трещины и определяют напряжение растяжения σ.

Из справочника для данного материала находят механические константы E, a и вычисляют предел прочности по формуле Гриффитса:

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{E \cdot a}{b}}.$$

Если $\sigma < \sigma^*$, то говорят, что конструкция выдержит заданные нагрузки. Если известен коэффициент запаса, который даётся заказчиком, то вычисляют допустимое напряжение

$$[\sigma] = \frac{\sigma^*}{k}.$$

Тогда, если $\sigma \le [\sigma]$, то говорят, что тело является прочным.

9.6. Расчет конструкций на долговечность

До сих пор ничего не говорилось о времени эксплуатации конструкции. Однако под воздействием эксплуатационных факторов или просто со временем свойства материала изменяются (говорят – «материал стареет»), что может через некоторое время привести к разрушению изделий или его элементов. Это время, уменьшенное на коэффициент запаса, называют **ресурсом** конструкции (можно его назвать и долговечностью конструкции). Ниже рассмотрим некоторые факторы, которые могут ограничить время эксплуатации зданий и сооружений.

9.6.1. Долговечность железобетонной колонны при наличии ползучести бетона

Как и ранее метод определения ее ресурса рассмотрим на примере железобетонной колонны (см. рис.9.6.1.).

Пусть как и ранее:

$$A^{бет} = 2 \cdot A^{арм}$$
$$E^{арм} = 5 \cdot E^{бет}.$$

Примем, что арматура чисто упругий элемент, а бетон является вязким, то есть ползет (см. раздел 8.1) по закону:

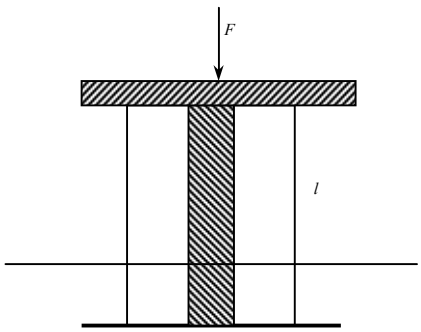


Рис. 9.7

$$\dot{\varepsilon}_{cr}^{бет} = \frac{\sigma^{бет}}{\eta^{бет}} \qquad (9.9)$$

Упругая часть деформации определяется по закону Гука:

$$\varepsilon_{упр}^{бет} = \frac{\sigma^{бет}}{E^{бет}} \tag{9.10}$$

$$\varepsilon_{упр}^{арм} = \frac{\sigma^{арм}}{E^{арм}} \tag{9.11}$$

Найдем сначала напряжения в бетоне $\sigma^{бет}$ и в арматуре $\sigma^{арм}$, а затем из условия прочности определим время, до которого оно будет выполняться.

Поскольку ползучесть происходит во времени, то напряжения и деформации тоже являются функциями времени *t:*

$$\sigma^{бет} = \sigma^{бет}(t), \quad \sigma^{арм} = \sigma^{арм}(t), \quad \varepsilon_{cr}^{бет} = \varepsilon_{cr}^{бет}(t), \quad \varepsilon_{упр}^{бет} = \varepsilon_{упр}^{бет}(t).$$

Часть силы F распределяется на бетон, часть на арматуру:

$$\boxed{N^{бет} + N^{арм} = -F} \tag{9.12}$$

Решений бесконечное множество, для выбора из них соответствующего задаче нужно привлекать дополнительное условие. Как и ранее имеем:

$$\Delta l^{арм} = \Delta l^{бет}, \qquad \frac{\Delta l^{арм}}{l} = \frac{\Delta l^{бет}}{l} \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon^{арм} = \varepsilon^{бет} \tag{9.13}$$

В (9.13) подставим нижеследующие соотношения:

$$\varepsilon^{бет} = \varepsilon_{упр}^{бет} + \varepsilon_{cr}^{бет} = \frac{\sigma^{бет}}{E^{бет}} + \varepsilon_{cr}^{бет}, \qquad \varepsilon^{арм} = \frac{\sigma^{арм}}{E^{арм}}.$$

Продифференцируем условие совместности (9.13) по времени:

$$\frac{\dot{\sigma}^{арм}}{E^{арм}} = \frac{\dot{\sigma}^{бет}}{E^{бет}} + \dot{\varepsilon}_{cr}^{бет}.$$

Подставим сюда $\dot{\varepsilon}_{cr}^{бет}$ в соответствии с законом ползучести (9.9):

$$\frac{\dot{\sigma}^{арм}}{E^{арм}} = \frac{\dot{\sigma}^{бет}}{E^{бет}} + \frac{\sigma^{бет}}{\eta^{бет}} \tag{9.14}$$

Исключим отсюда $\sigma^{арм}$. Для этого используем связь усилий и напряжений:

$$N^{бет} = \sigma^{бет} \cdot A^{бет} = \sigma^{бет} \cdot 2 \cdot A^{арм}, \qquad N^{арм} = \sigma^{арм} \cdot A^{арм}$$

Тогда из (9.14) вытекает, что:

$$\sigma^{бет} \cdot 2 \cdot A^{арм} + \sigma^{арм} \cdot A^{арм} = -F.$$

Деля на площадь арматуры, получим:

$$2\sigma^{бет} + \sigma^{арм} = -\frac{F}{A^{арм}}. \tag{9.15}$$

Продифференцируем это соотношение по *t*:

$$\dot{\sigma}^{арм} = -2\dot{\sigma}^{бет}$$

Теперь подставим $\dot{\sigma}^{арм}$ это в (9.14):

$$\frac{-2 \cdot \dot{\sigma}^{бет}}{E^{арм}} = \frac{\dot{\sigma}^{бет}}{E^{бет}} + \frac{\sigma^{бет}}{\eta^{бет}}.$$

Получили дифференциальное уравнение относительно неизвестной $\sigma^{бет}$. Умножая его на $E^{арм}$ и деля на 7 получим:

$$\dot{\sigma}^{бет} = -\sigma^{бет}\left(\frac{E^{арм}}{7\eta^{бет}}\right).$$

Решение его известно и имеет вид:

$$\sigma^{бет} = Ce^{-\left(\frac{E^{арм}}{7\eta^{бет}}\right)\cdot} \qquad (9.16)$$

Константу C находят из каких-либо известных условий, а именно нам известны $\sigma^{бет}$ и $\sigma^{арм}$ в начальный момент времени (см. задачу 9.1), т.е. при $t = 0$ можно записать:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{cr}^{бет} = 0$$

$$N^{бет} = -\frac{2}{7}F$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{бет} = -\frac{2}{7}\frac{F}{A^{бет}} = -\frac{2}{7}\frac{F}{2A^{арм}}$$

Подставим в (9.16):

$$-\frac{F}{7A^{арм}} = Ce^{0} = C.$$

Полученное C подставляем в (9.15). Учитывая, что $A^{бет} = 2\cdot A^{арм}$, $E^{арм} = 5\cdot E^{бет}$ находим:

$$\sigma^{бет} = \frac{-F}{3.5A^{бет}}\; e^{-t\left(\frac{5E^{бет}}{7\eta^{бет}}\right)}.$$

<u>Анализ решения</u>:

Из последнего выражения видно, что при больших t напряжение $\sigma^{бет}$ становится все меньше и меньше, т.е. стремится к нулю.

Таким образом, с течением времени бетон разгружается.

<u>Определение</u>: такое явление называется **релаксацией** или **отдыхом** материала.

Арматура, напротив, в это время догружается, значит при больших t получим, что $\sigma^{арм} \to \frac{F}{A^{арм}}$, т.е. вся нагрузка будет приходиться на арматуру.

Проведем теперь расчет на долговечность. Под термином **долговечность** будем понимать время t^*, в течение которого удовлетворяются условия прочности. Имеем:

$$\boldsymbol{\sigma}^{арм}\cdot A^{арм} + \boldsymbol{\sigma}^{бет}\cdot A^{бет} = -F$$

Поделим на $A^{арм}$, тогда получим:

$$\sigma^{арм} = \frac{-F}{A^{арм}} - \sigma^{бет}\frac{A^{бет}}{A^{арм}} \quad \Rightarrow \quad \sigma^{арм} = \frac{-F}{A^{арм}} + 2\frac{F}{7A^{арм}}e^{-t\left(\frac{E^{арм}}{7\eta^{бет}}\right)}$$

Пусть в момент t^*, в арматуре напряжение $\sigma^{арм}$ достигает предела прочности σ^* (ниже учтено, что при сжатии напряжения отрицательны):

$$-\frac{F}{A^{арм}}+2\frac{F}{7A^{арм}}e^{-t^*\cdot(\frac{E^{арм}}{7\eta^{бет}})}=-\sigma^*.$$

Перенося первое слагаемое вправо и логарифмируя это уравнение, получим:

$$\ln\frac{2F}{7A^{арм}}+(-t^*(\frac{E^{арм}}{7\eta^{бет}}))=\ln(\frac{F}{A^{арм}}-\sigma^*).$$

Отсюда:

$$t^*=\left[\ln\frac{2F}{7A^{арм}}-\ln\left(\frac{F}{A^{арм}}-\sigma^*\right)\right]/\left(\frac{E^{арм}}{7\eta^{бет}}\right).$$

Это и есть время, по достижении которого произойдет разрушение арматуры. Из решения видно, что это произойдет только в том случае, если сила F достаточно велика, а именно, если выражение под логарифмом будет положительно, т.е. при $\left(\frac{F}{A^{арм}}-\sigma^*\right)>0$. Очевидно также, что сила F не должна быть и слишком большой, при которой произойдет мгновенное разрушение. Это будет тогда, когда t^*=0, т.е., когда квадратная скобка равна нулю.

9.6.2. Условие независимости напряжений от времени в конструкциях из вязкоупругих материалов

Отметим следующий интересный факт. Оказывается, если материалы, из которых изготовлены конструкции, обладают линейно-вязко-упругими свойствами, причем они имеют коэффициенты вязкости, пропорциональные жесткостям этих материалов, то напряжения в конструкции не изменятся с течением времени (то есть релаксации не происходит, а происходит только деформация конструкции).

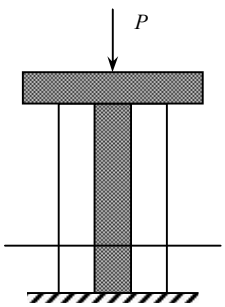
Проверим это на примере железобетонной колонны.

Примем, как и ранее:

$$5E^{бет}=E^{арм}$$

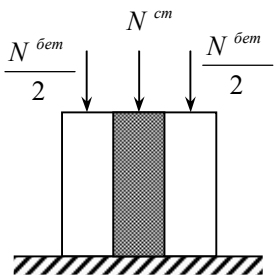
$$A^{бет}=2A^{арм}$$

Сделаем сечение. На него сверху действуют силы $N_{арм}$ и $N_{бет}$



Согласно правила знаков:

$$N^{арм}+N^{бет}=-P \qquad (9.17)$$



Условие совместности деформации:

$$\Delta l^{бет} = \Delta l^{арм} \Big| \div l \rightarrow \varepsilon^{бет} = \varepsilon^{арм}$$

$$\varepsilon^{бет} = \varepsilon^{арм} \Big| \frac{d}{dt}$$

$$\dot{\varepsilon}^{бет} = \dot{\varepsilon}^{арм} \qquad (9.18)$$

Полная деформация ε состоит из упругой части и деформации ползучести:

$$\varepsilon^{бет} = \frac{\sigma^{бет}}{E^{бет}} + \varepsilon^{бет}_{creep}$$

$$\varepsilon^{арм} = \frac{\sigma^{арм}}{E^{арм}} + \varepsilon^{арм}_{creep}$$

Возьмем производную по времени:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{бет} = \frac{\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{бет}}{E^{бет}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{бет}_{creep}, \qquad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{арм} = \frac{\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{арм}}{E^{ст}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{арм}_{creep}$$

Согласно закону ползучести имеем:

$$\dot{\varepsilon}^{арм}_{creep} = \frac{\sigma^{арм}}{\eta^{арм}}$$

$$\dot{\varepsilon}^{бет}_{creep} = \frac{\sigma^{бет}}{\eta^{бет}}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{бет} = \frac{\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{бет}}{E^{бет}} + \frac{\boldsymbol{\sigma}^{бет}}{\boldsymbol{\eta}^{бет}}$$

Таким образом: $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{арм} = \frac{\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{арм}}{E^{арм}} + \frac{\boldsymbol{\sigma}^{бет}}{\boldsymbol{\eta}^{бет}}$

Подставим в (9.18) и получим:

$$\frac{\dot{\sigma}^{арм}}{E^{арм}} + \frac{\sigma^{арм}}{\eta^{арм}} = \frac{\dot{\sigma}^{бет}}{E^{бет}} + \frac{\sigma^{бет}}{\eta^{бет}} \qquad (9.19)$$

Выразим напряжения через силу P.

Из уравнения равновесия:

$$N^{бет} = -P - N^{арм}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{бет} = \frac{-P - N^{арм}}{2A^{арм}} = \frac{-P}{2A^{арм}} - \frac{\boldsymbol{\sigma}^{арм}}{2}$$

Подставим в (9.19). Учитывая, что $P = const$ получим:

$$\frac{\dot{\sigma}^{арм}}{E^{арм}}+\frac{\sigma^{арм}}{\eta^{арм}}=-\frac{-\dot{\sigma}^{арм}}{2E^{бет}}+\frac{-P}{2A^{арм}\eta^{бет}}-\frac{\sigma^{арм}}{2\eta^{бет}} \qquad (9.20)$$

Запишем начальные условия для $\sigma^{арм}$.

При *t=0* деформаций ползучести еще нет $\varepsilon_{creep}^{арм}=0$, то есть задача чисто упругая, следовательно, из предыдущих лекций можно записать решение:

$$t=0: \qquad \sigma^{арм}=-\frac{5}{7A^{арм}}P. \qquad (9.21)$$

В теории линейных дифференциальных уравнений существует теорема: если найдено решение уравнения, которое удовлетворяет всем начальным условиям, то оно единственное.

Проверим, не является ли $\sigma^{арм}=const=-\frac{5}{7A^{арм}}P$ решением нашего уравнения (9.20). Подставим $\sigma^{арм}=const$ в (9.20) и получим, что:

$$\frac{const}{\eta^{арм}}+\frac{const}{2\eta^{бет}}=-\frac{P}{2A^{арм}\eta^{бет}} \qquad (9.22)$$

Примем, как говорилось выше, что вязкость стали, так же как и модуль упругости, в 5 раз больше вязкости бетона:

$$\eta^{арм}=5\eta^{бет}.$$

Подставляя в (9.22) получим

$$\frac{const}{5\eta^{бет}}+\frac{const}{2\eta^{бет}}=-\frac{P}{2A^{арм}\eta^{бет}}\Bigg|\cdot\eta^{бет}$$

$$\frac{7}{10}\sigma^{арм}=-\frac{P}{2A^{арм}}$$

Подставив сюда $\sigma^{арм}=const=-\frac{5}{7A^{арм}}P$, получаем тождество

$$\boxed{\frac{7}{10}\frac{-5}{7A^{арм}}P=\frac{-P}{2A^{арм}}}$$

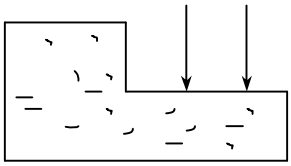
Это говорит о том, что $\sigma^{арм}=const=-\frac{5}{7A^{арм}}P$ является решением дифференциального уравнения, следовательно, оно единственное. Таким образом, в арматуре напряжение не изменится со временем, следовательно, и в бетоне не будет релаксации (это следует из. (9.17)).

Что и требовалось показать.

9.7 Теория накопления микроповреждений

В любом теле существуют микротрещины и микропоры. Под нагрузкой с течением времени эти микротрещины возрастают в размерах.

Через некоторое время их размеры достигают критических величин, после чего начинается неудержимый рост трещины, и разделение тела на части, т.е. наступает разрушение.

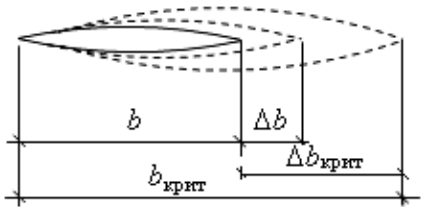


На основе анализа экспериментов были выявлены законы развития микротрещин (см. в монографии Работнова Ю.Н. [3]). Эта теория позволяет определить время, в течение которого конструкция выдерживает внешнюю нагрузку без разрушения. Это время $t*$ назовем критическим временем.

Рассмотрим трещину, длины b. Пусть Δb - приращение трещины, $b_{крит}$ - длина микротрещины при котором начинается неудержимый её рост .

Введем параметр поврежденности:

$$\omega = \frac{\Delta b}{\Delta b_{крит}} = \omega(t)$$



1) В начальный момент времени (при $t = 0$) в теле $\Delta b = 0$, тогда:

$$\omega(0) = 0 \tag{9.23}$$

2) В момент разрушения при $t = t*$ получим $\Delta b = \Delta b_{крит}$, значит:

$$\omega\,(t*) = 1 \tag{9.24}$$

Здесь (9.23) – начальное условие, (9.24) – условие разрушения.

Закон подрастания трещины, предложенный Работновым Ю.Н., можно представить в виде:

$$\dot{\omega} = \frac{B\,|\,\sigma\,|^n}{(1-\omega)^n} \tag{9.25}$$

Здесь точка означает дифференцирование по времени, B, n - механические характеристики материала.

Процедура вычисления $t*$ состоит из следующих этапов:

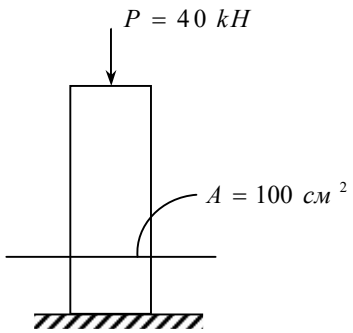
1) Определяется напряжение в конструкции в каком-то сечении

2) После подстановки σ в закон (9.25) решается дифференциальное уравнение (9.25).

3) Из начального условия (9.23) находятся константы интегрирования.

4) Из условия прочности (9.24) находится критическое время $t*$.

Рассмотрим примеры.



<u>Пример №1</u>: Задача о бетонной колонне

Найдем напряжение:

$$\sigma = -\frac{P}{A} = -\frac{40\ \text{kH}}{100\ \text{см}^2} = -0{,}4\ \text{kH/см}^2 .$$

Пусть известен закон (9.7.3) и пусть B=0.01см^2/(kH·лет), $n=1$. Тогда:

$$\dot{\omega} = \frac{0.01\cdot 0{,}4}{1-\omega}\ \text{/лет.}$$

Отсюда получаем: $d\omega(1-\omega)=0.0004dt$ /лет.

Слева и справа одинаковые функции, значит и первообразные от них равны, или отличаются на константу.

$$-\frac{(1-\omega)^2}{2} = C+0.004t\ \text{/лет} \qquad (9.26)$$

Константу С найдем из начального условия (9.23):

$$\omega(0)=0$$

$$-\frac{(1-0)^2}{2} = 0.004\cdot 0+C \quad \Rightarrow \quad C=-0{,}5 \qquad (9.27)$$

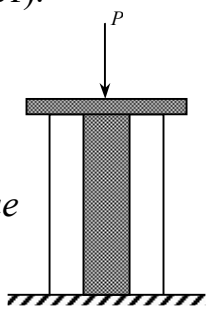
Теперь (9.26) примет вид

$$-\frac{(1-\omega)^2}{2} = 0.004t-0{,}5 .$$

Найдем критическое время t^* для колонны (ее долговечность) из условия (9.24). Подставляя $\omega=1$ в (9.27) получаем:

$$-\frac{(1-1)^2}{2} = -0.5 + 0.004t^*\ \text{/лет}$$

Отсюда t^*=125 лет (т.е., колонна не разрушаясь простоит 125 лет).



<u>Пример №2</u>:

Задача о накоплении повреждений в железобетонной колонне с учетом ползучести.

С течением времени ввиду релаксации (отдыха) бетона все большую часть нагрузки начинает воспринимать арматура.

То есть, напряжения в бетоне стремятся к нулю. Таким образом, если не учесть накопления повреждений, то напряжение в бетоне уменьшается и его разрушение никогда не наступит.

Однако, это не так. Решим задачу о разрушении колонны в результате накопления повреждений.

Ранее было найдено: $\sigma^{бет} = \frac{P}{7A^{арм}} \times e^{-t(\frac{E^{арм}}{7\eta^{бет}})}$.

Перепишем в новых обозначениях:

$$\sigma^{бет} = k \cdot e^{-\lambda \cdot t},$$

где

$$\lambda = (\frac{E^{арм}}{7\eta^{бет}}), \quad k = \frac{P}{7A^{арм}} \cdot .$$

Закон (9.25) примет теперь вид:

$$\dot{\omega} = \frac{(Bke^{-\lambda \cdot t})^m}{(1-\omega)^n}.$$

Получили обыкновенное дифференциальное уравнение, которое легко решается

Пусть B=0.01см^2/(т·лет), $n=1$.

Тогда получим:

$$d\omega(1-\omega) = Bke^{-\lambda \cdot t} dt.$$

Легко проверить, что решение этого уравнения можно записать в виде:

$$-\frac{(1-\omega)^2}{2} = -Bk\frac{e^{-\lambda \cdot t}}{\lambda} + c.$$

Константу c находим из начального условия при t = 0:

$$\omega(0) = 0 \qquad -\frac{1}{2} = -\frac{Bk}{\lambda} + c$$

$$c = \frac{Bk}{\lambda} - \frac{1}{2}$$

В момент разрушения $\omega(t^*) = 1$. Из этого условия находим уравнение для t^*:

$$0 = -\frac{Bk}{\lambda} e^{-\lambda \cdot t^*} + c$$

$$e^{-\lambda \cdot t^*} = \frac{c}{Bk} \cdot \lambda$$

Логарифмируя обе части, получим:

$$t^* = -\frac{1}{\lambda} \ln(\frac{c}{Bk} \cdot \lambda)].$$

Если $(\frac{c}{Bk} \cdot \lambda) < 0$, то логарифма не существует. Это значит, что не существует t^*, то есть, бетон успеет отрелаксировать и не разрушиться. Если $(\frac{c}{Bk} \cdot \lambda) > 0$, то можно найти критическое время t^*, по достижении которого произойдет разрушение колонны.

10. РАСЧЕТ СТЕРЖНЕЙ И СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ НА ЖЕСТКОСТЬ

Стержень называется жестким, если при рабочих нагрузках он деформируется в пределах нормы.

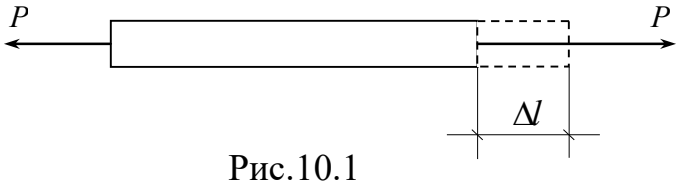


Рис.10.1

Пусть [Δl] – допустимое значение удлинения, тогда должно быть:

$$|\Delta l| \le [\Delta l]$$

Это соотношение называется **условием жесткости**.

<u>Составные стержни</u>

Если стержень состоит из двух и более участков, то ясно, что общее удлинение Δl состоит из суммы удлинений каждого участка. Например, для случая, приведенного на рис.10.2.

$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$, где $\Delta l_i = \dfrac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i}$.

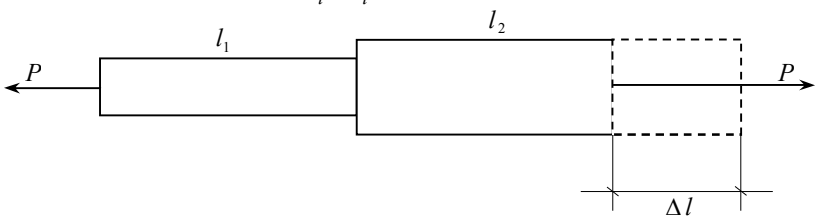


Рис.10.2

<u>Пример:</u>

Пусть $[\Delta\ell]$=0.5см, E=2000 kH.

Тогда

$$N_1 = 10kH$$
$$N_2 = -30kH$$
$$\Delta l_1 = \frac{10kH \cdot 2м}{2000kH/см^2 \cdot 10см^2} = 0{,}1см$$
$$\Delta l_2 = \frac{-30kH \cdot 2м}{2000kH/см^2 \cdot 20см^2} = -0{,}15см$$

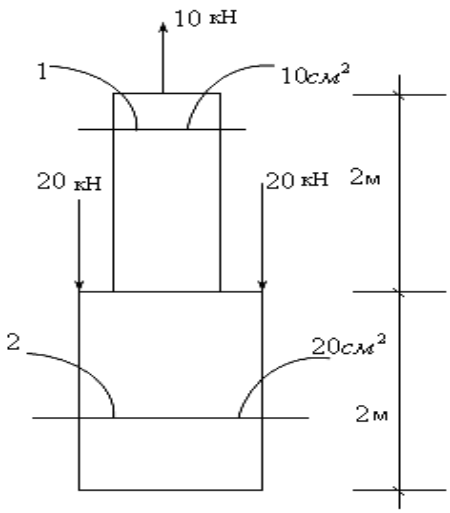


Рис.10.3

Первый стержень удлиняется, второй укорачивается.

Общее удлинение $\Delta l = (0{,}1 - 0{,}15)см = -0{,}05\,см$. По абсолютной величине это намного меньше $[\Delta\ell]$=0.5$см$. Значит колонна жесткая.

Стержневые системы

Сложнее с системами стержней. Это системы типа ферм или жестких элементов, удерживаемых стержнями с шарнирными закреплениями.

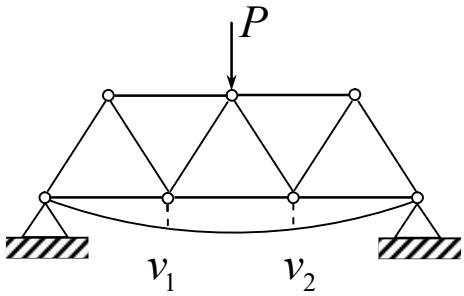


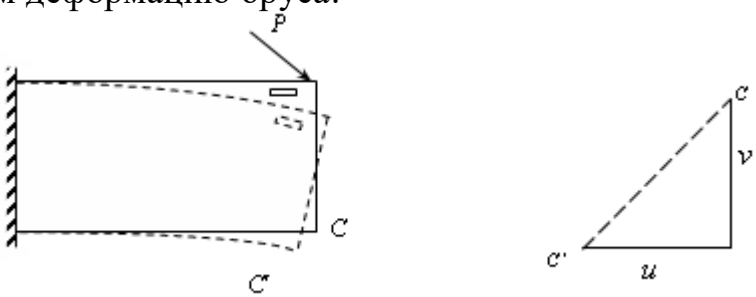
Рис.10.4

Условия жесткости для таких систем могут содержать требования ограничения, например, только вертикальных составляющих перемещений в виде:

$$\boxed{|v_1| \le [v], \quad |v_2| \le [v]}$$

10.1. Формула Мора для вычисления перемещения конструкции

Рассмотрим деформацию бруса:



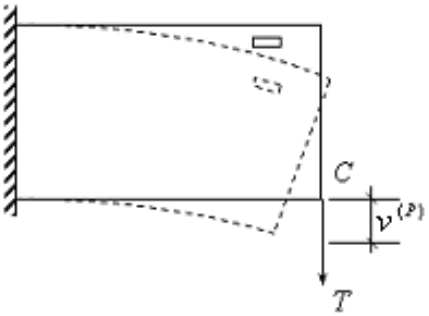
Под действием P, точка C перейдет C', а каждый малый элемент деформируется.

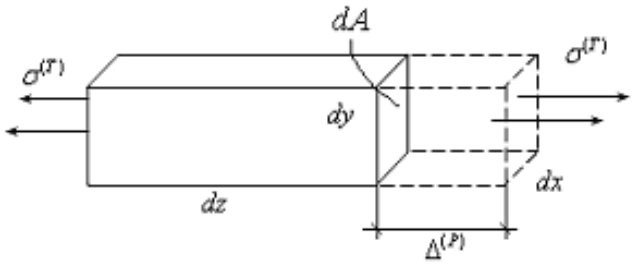
Рассмотри **задачу** отыскания **перемещения** CC'. Разложим его на вертикальную и горизонтальную составляющие. Тогда:

$$CC' = \sqrt{u^2 + v^2}\ .$$

Введем обозначения: $\sigma^{(p)}, \varepsilon^{(p)}, u^{(p)}, v^{(p)}$ - напряжения, деформации, перемещения, полученные при действии внешней силы P .

Далее рассмотрим другую, фиктивную задачу для нашей конструкции, а именно, приложим единичную силу T по вертикали в рассматриваемой точке C.





Здесь все малые элементы тоже получают деформации. Введем обозначения: $\sigma^{(T)}, \varepsilon^{(T)}, u^{(T)}, v^{(T)}$ - напряжения, деформации, перемещения, полученные при действии силы *T*.

Для вычисления $v^{(P)}$ в точке *C* применим закон сохранения энергии в варианте **принципа возможных перемещений**,. В качестве возможных выберем перемещения $u^{(p)}, v^{(p)}$. Вычислим работу силы *T* на **возможном** перемещении $v^{(p)}$:

$$W_p = T \cdot v^{(p)}.$$

Эта работа согласно закону сохранения должна быть равна работе W_P, которую совершают силы сопротивления (напряжения $\sigma^{(T)}$) на **возможных** удлинениях $\Delta^{(p)}$ малых элементов (**возможных** абсолютных деформациях малых элементов). Подсчитаем ее.

Рассмотрим малый элемент. Сила его растяжения - будет:

$$dN^{(T)} = \sigma^{(T)} dA = \sigma^{(T)} dxdy.$$

Согласно определению удлинение малого элемента будет:

$$\Delta^{(p)} = \varepsilon^{(p)} \cdot dz.$$

Подсчитываем работу, которую совершает сила $dN^{(T)}$ на перемещение $\Delta^{(T)}$

$$dW_T = dN^{(T)} \cdot \Delta^{(P)} = \sigma^{(T)} dxdy \cdot \varepsilon^{(P)} dz = \sigma^{(T)} \varepsilon^{(P)} dV.$$

Во всем теле суммарная работа будет:

$$W_T = \sum dW_T = \sum \sigma^{(T)} \cdot \varepsilon^{(P)} dV = \int_V \sigma^{(T)} \varepsilon^{(P)} dV.$$

Запишем закон сохранения энергии: $W_T = W_P$.

Отсюда: $\int_v \sigma^{(T)} \varepsilon^{(P)} dV = T \cdot v^{(P)}$.

Для удобства счета полагают *T*=1, тогда **<u>формула Мора</u>** принимает вид:

$$\boxed{v^{(P)} = \int \sigma^{(1)} \varepsilon^{(P)} dV}$$

$v^{(p)}$ - искомое перемещение

$\varepsilon^{(P)}$ - деформация, которую вызывают внешние силы P

$\sigma^{(1)}$ - напряжение, которое создано единичной силой T

T – единичная сила, которая приложена в интересующей нас точке и в интересующем нас направлении.

Примечание. Если после вычисления получится что $v^{(P)} < 0$, то это значит, что направление перемещения нужно выбрать в другую сторону, т.е. она направлено против направления действия силы $T=1$.

10.2. Формула Мора для стержневых систем

Для отдельного стержня при растяжении имеем:

$$\sigma^{(T)} = \frac{N^{(T)}}{A} = const_1$$

$$\varepsilon^{(P)} = \frac{\sigma^{(P)}}{E} = const_2 = \frac{N^{(P)}}{AE}$$

$$V = A \cdot l$$

Тогда

$$v^{(P)} = \frac{N^{(T)}}{A} \cdot \frac{N^{(p)}}{AE} \cdot \int_V dV = \frac{N^{(T)}}{A} \cdot \frac{N^{(P)}}{AE} \cdot V = \frac{N^{(T)}}{A} \cdot \frac{N^{(P)}}{E} l$$

Если система содержит несколько стержней, то можно просуммировать работы W_T каждого стержня. Согласно закону Гука:

$$\boxed{\Delta l_i^{(P)} = \frac{N_i^{(P)} l_i}{E_i A_i}}$$

В результате формулу Мора можно записать в виде:

$$\boxed{v^{(P)} = \sum_{i=1}^{n} N_i^{(1)} \Delta l_i^{(P)}}$$

$N_i^{(1)}$ - усилия растяжения стержней, которые возникают от действия единичной силы.

$\Delta l_i^{(P)}$ - удлинения стержней, которые появляются под действием силы P.

Пример: рассмотрим систему, приведенную на рис. 10.5. Найдем сначала $u^{(P)}$.

Ранее усилия растяжения при действии силы P уже были получены.

$$N_1^{(P)} = P\frac{Cos\ \alpha}{Sin\ \alpha}$$

$$N_2^{(P)} = -\frac{P}{Sin\ \alpha}$$

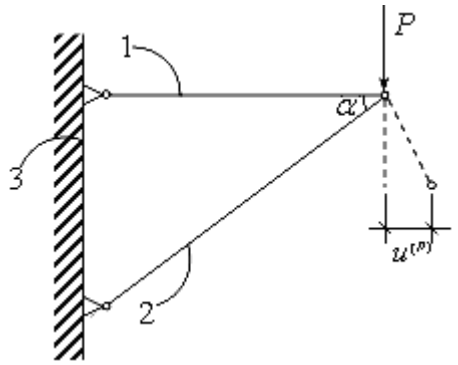


Рис.10.5

Решим теперь задачу о единичной силе (рис.10.6)

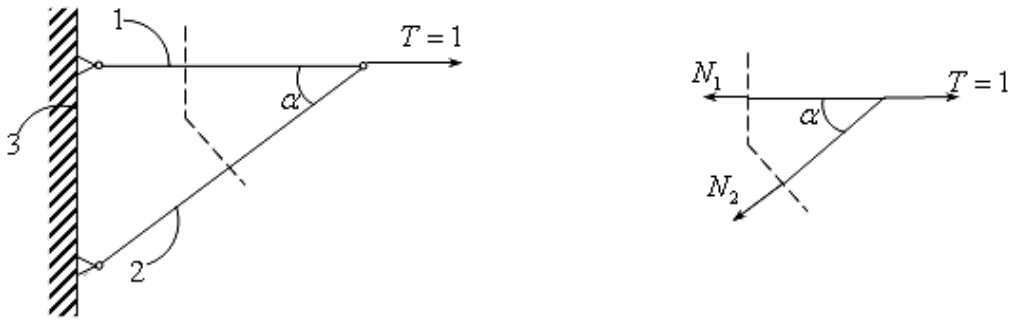


Рис.10.6

Из уравнений равновесия правой части стержневой системы находим $N_1^{(T)}, N_2^{(T)}$ - усилия растяжения стержней, которые возникают от действия единичной силы.

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0 \\ \sum F_{ky} = 0 \end{cases}$$

$$-N_1^{(T)} + T = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1^{(T)} = 1$$

$$-N_2^{(T)} \cdot Sin\,\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2^{(T)} = 0$$

Найдем удлинения

$$\Delta l_1^{(P)} = \frac{N_1^{(P)} \cdot l_1}{EA} = \frac{P \cdot ctg\ \alpha \cdot l_1}{EA}$$

$$\Delta l_2^{(P)} = \frac{N_2^{(P)} \cdot l_2}{EA} = -\frac{P\ \cdot l_2}{Sin\alpha \cdot EA}$$

Подставим в формулу Мора:

$$u^{(P)} = N_1^{(T)}\Delta l_1^{(P)} + N_2^{(T)}\Delta l_2^{(P)} = \frac{P \cdot ctg\ \alpha \cdot l_1}{EA} + 0\,.$$

Направление перемещения мы угадали, так как $u^{(p)}$ имеет знак “+”.

Найдем $v^{(p)}$. Для этого рассмотрим 3-ю задачу о действии единичной силы *T=1* (см. рис.10.7).

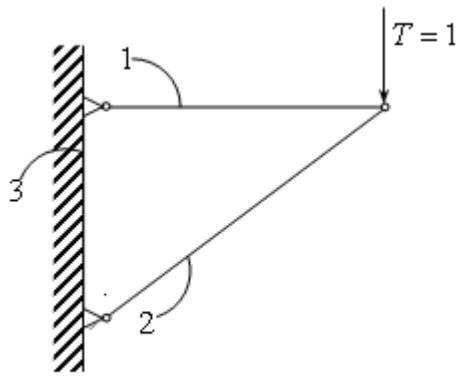


Рис. 10.7

Получим:

$$N_1^{(T)} = 1 \cdot ctg\,\alpha$$
$$N_2^{(T)} = -\frac{1}{Sin\,\alpha}$$

Как и в задаче о вычислении $u^{(P)}$ имеем:

$$\Delta l_1^{(P)} = \frac{P \cdot ctg\ \alpha \cdot l_1}{EA}$$
$$\Delta l_2^{(P)} = -\frac{P \cdot l_2}{EA \cdot Sin\ \alpha}$$

Таким образом:

$$v^{(P)} = ctg\ \boldsymbol{\alpha} \frac{P \cdot ctg\ \boldsymbol{\alpha} \cdot l_1}{EA} + \frac{1}{Sin\ \boldsymbol{\alpha}} \cdot \frac{P \cdot l_2}{EA \cdot Sin\ \boldsymbol{\alpha}} =$$
$$= \frac{P}{EA}(ctg^2\boldsymbol{\alpha} \cdot l_1 + \frac{l_2}{(Sin\ \boldsymbol{\alpha})^2}).$$

Из решения видно, что и горизонтальное, и вертикальное перемещения сильно возрастают при уменьшении угла $\boldsymbol{\alpha}$ **.**

11. ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАЗРУШЕНИЯ МАТЕРИАЛА

11.1. Закономерности сложного напряженного состояния

а) *Напряжения на косых площадках при продольном нагружении*.
Рассмотрим простое растяжение стержня (рис.11.1)..

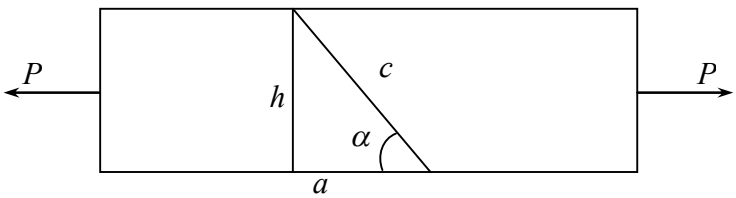


Рис.11.1

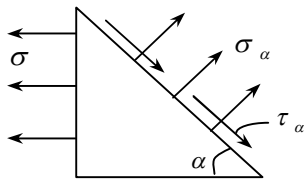


Рис.11.2

Вырежем элемент под углом α (рис.11.2). Выразим σ_n, τ_n через σ (известный закон параллелограмма, справедливый для сил, для напряжений не применим).

Рассмотрим рис.11.3. Так как призма находится в покое, то $\overline{N'} = \overline{N}$.

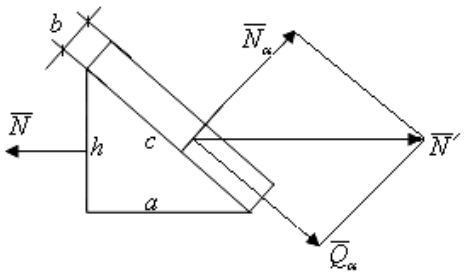


Рис.11.3

Имеем:

$$N = \sigma \cdot A = \sigma \cdot b \cdot h$$
$$N_\alpha = \sigma_\alpha \cdot A_\alpha = \sigma_\alpha \cdot b \cdot c \qquad (11.1)$$
$$Q_\alpha = \tau_\alpha \cdot A_\alpha = \tau_\alpha \cdot b \cdot c$$

По закону параллелограмма:

$$\begin{cases} N_\alpha = N' \cdot Sin\ \alpha = N \sin\alpha \\ Q_\alpha = N' \cdot Cos\ \alpha = N \cos\alpha \end{cases} \qquad (11.2)$$

Подставляя сюда (11.1) получим:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma_\alpha} \cdot c \cdot b = \boldsymbol{\sigma} \cdot b \cdot h \cdot Sin\ \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\tau_\alpha} \cdot c \cdot b = \boldsymbol{\sigma} \cdot b \cdot h \cdot Cos\ \boldsymbol{\alpha} \end{cases}$$

Деля на $c \cdot b$ находим:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma_\alpha} = \dfrac{h}{c} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot Sin\ \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\tau_\alpha} = \dfrac{h}{c} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot Cos\ \boldsymbol{\alpha} \end{cases}$$

Из рис.11.1 следует, что $\dfrac{h}{c} = Sin\,\alpha$

Таким образом, получаем:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma \cdot (\sin\alpha)^2 \\ \tau_\alpha &= \sigma(\sin\alpha\cos\alpha) \end{aligned}} \qquad (11.3)$$

С учетом того, что σ направлена по *Oz,* формулы запишем в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_z \cdot Sin^2\alpha \\ \tau_\alpha &= \sigma_z \cdot Sin\,\alpha \cdot Cos\,\alpha \end{aligned}.$$

б) <u>*Ортогональное нагружение*</u>.

Рассмотрим растяжение стержня поперек ее оси. Снова вырезаем призму, изображенную на рис.11.4:

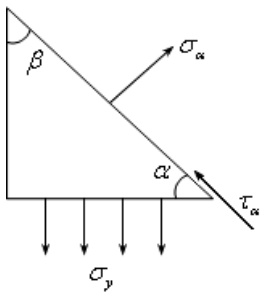


Рис.11.4.

Если рассматриваемый угол $\boldsymbol{\alpha}$ заменить углом $\boldsymbol{\beta} = 90^0 - \boldsymbol{\alpha}$, то выкладки будут совершенно аналогичными. Тогда получим:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma_\alpha} &= \boldsymbol{\sigma}_y \cdot Sin^2(90 - \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\sigma}_y \cdot Cos^2\boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\tau_\alpha} &= -\boldsymbol{\sigma}_y \cdot Sin\ \boldsymbol{\beta} \cdot Cos\ \boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{\sigma}_y \cdot Sin\ \boldsymbol{\alpha} \cdot Cos\ \boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \qquad (11.4)$$

Согласно рисунку 11.4, напряжение τ_α должно быть направлено вверх, а не вниз как на рис.11.2. Поэтому в (11.4) в выражении для $\boldsymbol{\tau_\alpha}$ поставлен знак “-“.

11.2. Зависимость σ_α и τ_α от касательных напряжений

Вырежем из тела призму (рис.11.5). Пусть на его грани действуют напряжения $\tau_{zy}, \tau_{yz}, \sigma_\alpha, \tau_\alpha$. В силу закона парности: $\tau_{zy} = \tau_{yz}$

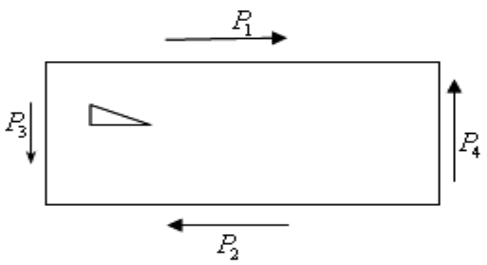


Рис.11.5.

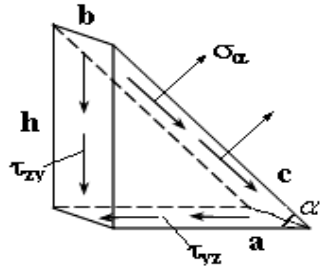


Рис.11.6.

Выразим σ_α, τ_α через τ_{zy}

Составим уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0: \quad -\tau_{yz} \cdot b \cdot a + \sigma_\alpha \cdot b \cdot c \cdot Sin\ \alpha + \tau_\alpha \cdot b \cdot c \cdot Cos\ \alpha = 0 \\ \sum F_{ky} = 0: \quad -\tau_{zy} \cdot h \cdot b + \sigma_\alpha \cdot b \cdot c \cdot Cos\ \alpha - \tau_\alpha \cdot b \cdot c \cdot Sin\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Поделим эти два уравнения на $(b \cdot c)$. Учитывая закон парности получим:

$$\begin{cases} -\tau_{yz} \cdot Cos\,\alpha + \sigma_\alpha \cdot Sin\,\alpha + \tau_\alpha \cdot Cos\,\alpha = 0 \,|\cdot \sin\alpha \\ -\tau_{yz} \cdot Sin\,\alpha + \sigma_\alpha \cdot Cos\,\alpha - \tau_\alpha Sin\,\alpha = 0 \,|\cdot \cos\alpha \end{cases}$$

Складывая, получим:

$$-\tau_{yz}(\sin\ \alpha \cdot \cos\ \alpha \cdot 2) + \sigma_\alpha (Sin^2\alpha + Cos^2\alpha) = 0$$

$$\boxed{\sigma_\alpha = \tau_{yz} \cdot Sin\ 2\alpha} \qquad (11.5)$$

Аналогично найдем:

$$-\tau_{yz} Cos^2\alpha + \tau_{yz} \cdot Sin^2\alpha + \tau_\alpha (Sin^2\alpha + Cos^2\alpha) = 0$$

$$\boxed{\tau_\alpha = \tau_{yz} \cdot Cos\ 2\alpha} \qquad (11.6)$$

11.3. Главные напряжения

Рассмотрим общий случай воздействия на элемент тела напряжений $\sigma_z, \sigma_y, \tau_{yz}$. Для этого сложим правые части формул для σ_α и получим :

$$\sigma_\alpha = \sigma_z \cdot Sin^2\alpha + \sigma_y \cdot Cos^2\alpha + \tau_{yz} \cdot Sin\ 2\alpha \qquad (11.7)$$

Аналогично найдем

$$\tau_\alpha = \sigma_z \cdot \frac{Sin\ 2\alpha}{2} - \sigma_y \cdot \frac{Sin\ 2\alpha}{2} + \tau_{yz} \cdot Cos\ 2\alpha \qquad (11.8)$$

Эти формулы подобны формулам для осевых и центробежных моментов инерции для повернутых осей. Поэтому точно так же вводятся и понятия **<u>главных напряжений и главных площадок,</u>** т.е. следующим образом. Вычислив σ_α для разных углов, можно найти максимальное и минимальное их значения. Эти напряжения называются **<u>главными</u>**. Обычно обозначают:

$\sigma_1 = \max \sigma_\alpha$ - первое главное напряжение

$\sigma_2 = \min \sigma_\alpha$ - второе главное напряжение

<u>Главные площадки</u> – это сечения, на которых σ_α экстремальны.

Угол α_0, который определяет положение главных площадок, получаем по теореме Ферма: при $\alpha = \alpha_0$ должно быть $\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \alpha} = 0$

$$\sigma_z \cdot 2 \cdot Sin\,\alpha_0 \cdot Cos\,\alpha_0 - 2 \cdot \sigma_y \cdot Cos\,\alpha_0 \cdot Sin\,\alpha_0 + \tau_{yz} \cdot 2 \cdot Cos\,2\alpha_0 = 0$$

$$(\sigma_z - \sigma_y)\frac{Sin\,2\alpha_0}{Cos\,2\alpha_0} + \tau_{yz} \cdot 2 = 0$$

$$tg\ 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{yz}}{\sigma_y - \sigma_z}$$

Отсюда находим α_0.

Аналогично теории геометрических характеристик можно видеть, что на этих главных площадках касательных напряжений не будет, т.е.

$$\tau_{\alpha_0} = 0.$$

<u>Следствие:</u>

Всегда можно найти в теле такое положение малого элемента, в котором он только растягивается или сжимается в двух перпендикулярных направлениях, причем эти напряжения будут экстремальными.

<u>Примечание:</u> согласно свойствам $tg2\alpha_0$, если взять угол $(\alpha_0 + 90)$, то условие $\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \alpha} = 0$ снова удовлетворится. Таким образом, существуют 2 главные площадки под углами α_0 и $(\alpha_0 + 90)$.

<u>Вычисление</u> $\tau_{\max}$

В некотором теле найдем главные площадки для малого элемента.

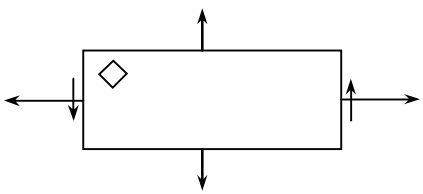


Рис.11.7

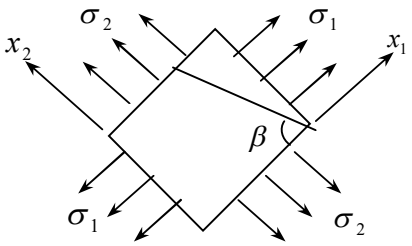


Рис.11.8

Оси, ортогональные главным площадкам, обозначим x_1, x_2. На главных площадках $\tau_{\alpha_0} = 0$, как было сказано выше.

Рассмотрим площадку под углом β. Используя формулу (11.8) для τ_α при $\alpha = \beta$ получим: $\tau_\beta = \sigma_1 \dfrac{Sin\,2\beta}{2} - \sigma_2 \dfrac{Sin\,2\beta}{2}$

$$\boxed{\tau_\beta = (\sigma_1 - \sigma_2)\frac{Sin\,2\beta}{2}}$$

Поскольку $\max(Sin\,2\beta) = 1$, то

$$(\tau_\beta)_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_2)\frac{1}{2}, \qquad \beta = 45^\circ$$

Таким образом, $\tau_{\max}$ возникает на площадках, расположенных под углом 45° к главной площадке

Можно показать, что в случае, когда действуют лишь напряжения σ_z, τ_{zy} значения главных напряжений можно вычислять даже не зная положения главных площадок по формулам:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_z^2}{4} + \tau_{zy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\frac{\sigma_z^2}{4} + \tau_{zy}^2}$$

Тогда: $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 = 0.5\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2}$.

11.4. Виды разрушений материалов

Разрушение подразделяют на хрупкое и вязкое.

Хрупкое разрушение – это разрушение, при котором материал разрушается (делится на части) от развития трещин (см. рис.11.9).

.

Рис.11.9

Вязкое разрушение – это разрушение путем сдвига частиц друг относительно друга (например, одна часть бруса скользит относительно другой, как это показано на рис.11.10).

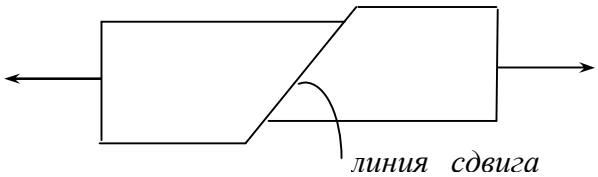


Рис.11.10

11.5.Теории кратковременной прочности

Исторически наиболее популярными были пять теорий прочности. Однако некоторые из них плохо подтверждаются экспериментом, поэтому на сегодня не применяются или применяются лишь в частных случаях.

Если в теле ненулевыми являются, например, только $\sigma_z, \sigma_y, \tau_{zy}$, а остальные напряжения равны нулю, то говорят, что тело находится в плоском напряженном состоянии. В общем случае напряженное состояние называют трехосным. Поскольку в строительных сооружениях плоское напряженное состояние имеет место в подавляющем большинстве случаев, то ниже для простоты будем рассматривать лишь это состояние (там, где это возможно). Кроме того, при изложении IV и V теорий ниже приводятся более простые способы вывода критериев разрушения по сравнению с традиционными.

Вырежем из тела малый элемент с гранями, параллельными главным площадкам. Так как σ_1, σ_2 - главные, то касательных напряжений нет.

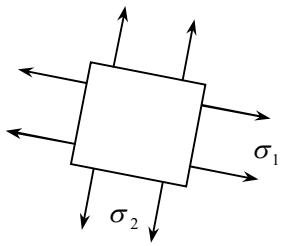


Рис.11.11

Основная проблема, которая обсуждается в теориях прочности, заключается в следующем.

Пусть известен предел прочности σ_1* при одноосном нагружении элемента только напряжением σ_1 (см. рис.11.11). Вопрос – увеличится, уменьшится или не изменится прочность элемента, если предварительно нагрузить его в поперечном направлении напряжением σ_2? Другими словами, какое значение напряжения σ_1 потребуется для того, чтобы разрушить образец - меньшее, чем σ_1*, большее, чем σ_1*, или же равное σ_1*? Оказалось, что однозначного ответа на этот вопрос нет, так как для различных классов материалов степень влияния σ_2 разная, причем σ_2 может как повышать прочность, так и понижать ее, а иногда на прочность в направлении действия σ_1 оно никак не влияет.

Введем понятие **предельной кривой**, с помощью которой ответ на этот вопрос можно получить графически.

Проведем ряд экспериментов при разных комбинациях σ_1, σ_2 и доведем образец до разрушения. Сведем результаты в таблицу, например, в виде:

σ_1* МПа	400	300	-210	…
σ_2* МПа	150	250	-170	…

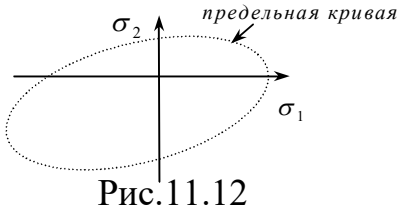


Рис.11.12

Отложим эти значения в системе координат σ_1, σ_2 (рис.11.12). Получим ряд точек. Соединяя их, получим некоторую кривую замкнутой формы, которая называется ***предельной кривой***.

Если имеется напряжение и в третьем направлении, то получим уже *предельную поверхность.*

Смысл предельной кривой в том, что если комбинация σ_1, σ_2 образует точку внутри кривой, то разрушения не происходит, а если проектные σ_1, σ_2 окажутся на кривой или вне нее, то материал не выдержит эту комбинацию напряжений. Ниже рассмотрим различные случаи предельных кривых.

Примечание. Так как осуществить многоосное нагружение достаточно трудно, то для построения предельной поверхности часто применяли различные обобщения условий прочности для плоского напряженного состояния.

11.5.1.Первая теория прочности

Рассмотрим малый элемент тела с гранями, совпадающими с главными площадками (см.рис.11.11). Пусть $\sigma_2 < \sigma_1 > 0$. Тогда утверждается, что какими бы не были σ_1, σ_2 элемент разрушается тогда, когда σ_1 достигает предела прочности на растяжение $\boldsymbol{\sigma}_{проч}^{раст}$.

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_{проч}^{раст} \tag{11.9}$$

Если же $\sigma_2 > \sigma_1$, то разрушение происходит при $\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_{проч}^{раст}$.

Иногда делается обобщение этого условия, согласно которому, если имеет место сжатие (то есть $\sigma_1 < 0$), то условия разрушения принимается в виде: $|\boldsymbol{\sigma}_1| = \boldsymbol{\sigma}_{прочн}^{сж}$. Тогда предельная кривая для первой теории имеет вид, изображенный на рис.11.13.

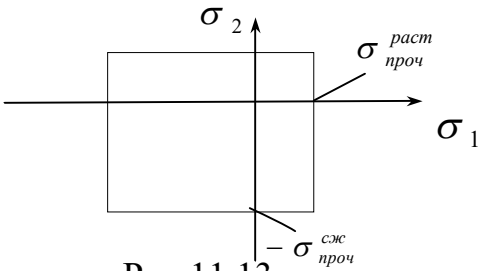


Рис.11.13

Недостатки теории:

1) Теория утверждает, что якобы наличие поперечного напряжения σ_2 совсем не влияет на прочность материала в продольном направлении, что не подтверждается экспериментами для большинства материалов.
2) Она удовлетворительно подтверждается только для некоторых

хрупких материалов, причем, для растягивающих напряжений. Например, экспериментальные данные хорошо подтверждают эту теорию в первом квадранте для чугуна.

11.5.2.Вторая теория прочности

Утверждается, что разрушение элемента наступает тогда, когда максимальная деформация удлинения $\varepsilon_{пред}^{удл}$ достигает предельного значения $\varepsilon_{пред}$, то есть или тогда, когда

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{пред}^{удл}$$

или же когда

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{пред}^{удл}.$$

В компонентах σ_1, σ_2 это условие записывается с помощью закона Гука:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu\frac{\sigma_1}{E} \tag{11.10}$$

Тогда получим: $\sigma_1 - \nu\sigma_2 = \underbrace{\varepsilon^{удл} \cdot E}_{C}$.

Выразим C через $\sigma_{проч}^{раст}$. Для этого учтем, что это условие должно быть справедливо и при разрушении простым растяжением. Тогда:

$$\sigma_1 = \sigma_{проч}^{раст}, \quad \sigma_2 = 0 \;\rightarrow\; C = \sigma_{проч}^{раст}$$

Таким образом, вторая теория примет вид:

$$\sigma_1 - \nu\sigma_2 = \sigma_{проч}^{раст} \qquad \text{или} \qquad \sigma_2 - \nu\sigma_1 = \sigma_{проч}^{раст} \tag{11.11}$$

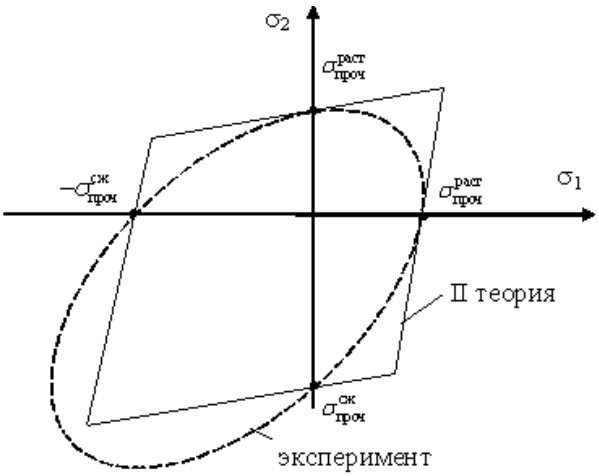


Рис.11.14

Аналогичные соотношения получим при деформации укорочения:

$$\sigma_1 - \nu\sigma_2 = \sigma_{проч}^{сж} \qquad \text{или} \qquad \sigma_2 - \nu\sigma_1 = -\sigma_{проч}^{сж}$$

Предельная поверхность в виде многоугольника изображена на рис.11.14. Вторая теория согласуется с экспериментом хуже, чем первая.

11.5.3.Третья теория прочности (теория максимальных касательных напряжений)

Эта теория удовлетворительно согласуется с экспериментами над материалами, у которых пределы прочности на растяжение и сжатие одинаковы (например, для стали). Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\sigma_{проч}^{раст} = \sigma_{проч}^{сж}$. Для таких материалов обозначение для предела прочности применяют без индексов «^{раст}», «^{сж}»:

$$\sigma_{проч} = \sigma_{проч}^{раст} = \sigma_{проч}^{сж}$$

Кроме того, будем считать, что напряженное состояние – трехосное.

Согласно III теории, утверждается, что разрушение наступит тогда, когда в каком-то элементе $\tau_{\max}$ достигнет предельного значения, то есть когда:

$$\tau_{\max} = \tau_{проч}.$$

Как было получено ранее, максимальные касательные напряжения $\tau_{\max}$ возникают на площадках, наклоненных под углом 45° к направлению действия σ_1, σ_2, и определяются по формуле:

$$\tau'_{\max} = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right|.$$

Выразим $\tau_{проч}$ через $\sigma_{проч}$. Условие прочности должно быть справедливо и при разрушении простым растяжением, т.е. тогда, когда:

$$\sigma_1 = \sigma_{проч}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0$$

Тогда $\tau_{\max} = \left| \frac{\sigma_1}{2} \right|$. Из условия прочности $\tau_{\max} = \tau_{проч}$ вытекает, что:

$$\frac{\sigma_{проч}}{2} = \tau_{проч} \qquad (11.12)$$

Аналогичные максимальные касательные напряжения $\tau_{\max}$ возникают на площадках, наклоненных под углом 45° к направлению действия σ_1, σ_3, и σ_3, σ_2. Они определяются по формулам

$$\tau''_{\max} = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right|, \qquad \tau'''_{\max} = \left| \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2} \right|.$$

Таким образом, окончательно условие потери прочности примет вид:

$$\text{или} \quad \left| \sigma_1 - \sigma_2 \right| = \sigma_{проч}$$

$$\text{или} \quad \left| \sigma_3 - \sigma_2 \right| = \sigma_{проч}$$

$$\text{или} \quad \left| \sigma_1 - \sigma_3 \right| = \sigma_{проч}$$

В строительстве при расчете балок, плит перекрытия, балок стенок считается, что $\sigma_3 \approx 0$, т.е. напряжения возникают только в плоскости σ_1, σ_2, Тогда из $\tau'_{\max}, \tau''_{\max}, \tau'''_{\max}$ напряжение $\tau'_{\max}$ будет наибольшим только тогда, когда σ_1, σ_2 имеют различные знаки, т.е. во 2-ой и 4-ой квадрантах. Если же

σ_1, σ_2 имеют одинаковые знаки (в первой и третьей квадрантах), то получим, что $\tau_{\max} = \left|\frac{\sigma_1}{2}\right|$ или $\tau_{\max} = \left|\frac{\sigma_2}{2}\right|$. Подставляя в условие прочности $\tau_{\max} = \tau_{проч}$, получим

$$\sigma_1 = \sigma_{проч} \quad \text{или} \quad \sigma_2 = \sigma_{проч}$$

Таким образом, в первой и третьей квадрантах третья теория прочности совпадает с первой.

Предельная кривая в частном случае, когда σ_3=0, примет вид шестиугольника, приведенного на рис.11.15.

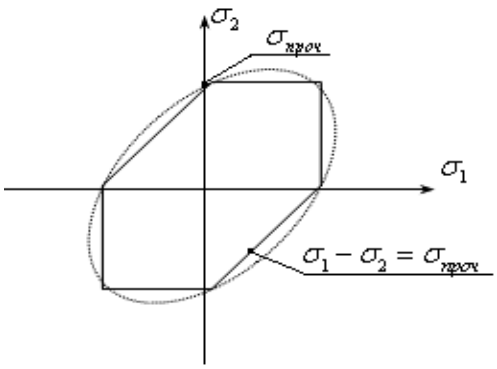


Рис.11.15

11.5.4.Четвертая теория (энергетическая)

Она наилучшим образом согласуется с экспериментальными данными для пластичных материалов типа сталь. Утверждается, что элемент тела единичного объема разрушится тогда, когда работа максимальных касательных напряжений достигнет предельного значения.

Для трехосного напряженного состояния, как было отмечено в ранее в разделе 11.5.3, в разных плоскостях имеем 3 разных $\tau_{\max}$:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \qquad \tau_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \qquad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Рассмотрим работу касательного напряжения τ_1 на перемещении BB'.

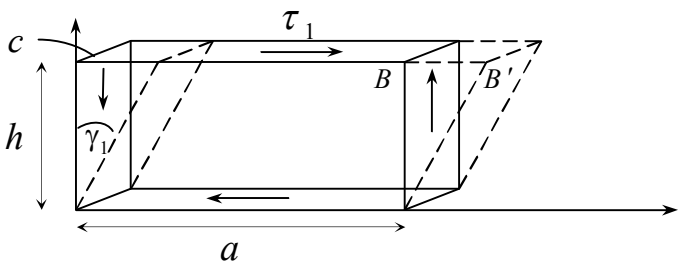


Рис.11.16

Имеем:

$$Q_1 = \tau_1 \cdot ac$$
$$BB' = b \cdot tg\gamma_1$$

Работа силы Q_1 на перемещении BB' будет (здесь и в дальнейшем учтено, что напряжения не сразу достигают своих окончательных значений, а возрастают, начиная с нуля, вследствие чего появляется множитель 0.5):

$$W_1 = 0,5 \cdot Q_1 \cdot BB' = 0,5 \cdot \tau_1 \cdot tg\gamma_1 \cdot ahc\,.$$

В виду малости угла сдвига имеем:

$$tg\gamma_1 = \gamma_1 .$$

Примем, что объем элемента равен единице : $V = ahc = 1см^2$

Таким образом, получаем:

$$W_1 = 0,5 \cdot \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\gamma}_1 .$$

По закону Гука (G - модуль сдвига):

$$\gamma_1 = \frac{\tau_1}{G} .$$

Окончательно получим:

$$W_1 = 0,5 \cdot \frac{\tau_1^2}{G} .$$

Аналогично, максимальные касательные напряжения в других плоскостях дают работы:

$$W_2 = 0,5 \cdot \frac{\tau_2^2}{G}, \qquad W_3 = 0,5 \cdot \frac{\tau_3^2}{G} .$$

Суммируя их, получим:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 0,5 \cdot \frac{1}{G}(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2) = \frac{1}{8G}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2) .$$

Обозначим работу внутренних сил, приводящих к разрушению элемента тела, через $W_{проч}$.

Тогда критерий разрушения можно записать в виде:

$$((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2) = 8 \cdot W_{проч} G .$$

Выразим правую часть через $\boldsymbol{\sigma}_{проч}^{раст}$. Рассмотрим частный случай - одноосное растяжение. Тогда в момент разрушения:

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_{проч}^{раст} \qquad \boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_3 = 0 .$$

Подставляя в критерий разрушения, получим:

$$\left(\boldsymbol{\sigma}_{проч}^{раст}\right)^2 + \left(\boldsymbol{\sigma}_{проч}^{раст}\right)^2 = 8 \cdot W_{проч} G \qquad \Rightarrow \qquad 8 \cdot W_{проч} G = 2\left(\boldsymbol{\sigma}_{проч}^{раст}\right)^2$$

Эта теория также справедлива только для материалов, у которых **пределы прочности на растяжение и сжатие одинаковы**. Для них обозначение для предела прочности, как и в III теории, применяют без индексов «^{раст}», «^{сж}»:

$$\boldsymbol{\sigma}_{проч} = \boldsymbol{\sigma}_{проч}^{раст} = \boldsymbol{\sigma}_{проч}^{сж}$$

Окончательно четвертая теория теперь примет вид:

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2=2\left(\sigma_{проч}\right)^2. \qquad (11.13)$$

Рассмотрим теперь частный случай, когда $\sigma_3 = 0$, который имеет место в балках и плитах строительных сооружений. Тогда получим критерий в виде:

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1)^2+(\sigma_2)^2=2\left(\sigma_{проч}\right)^2.$$

или

$$\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2}=\sigma_{проч} \qquad (11.14)$$

Предельная кривая в системе координат σ_1, σ_2 примет вид эллипса, приведенного на рис.11.15.

Четвертая теория хорошо подтверждается для материалов типа сталь, алюминий и т.п. Недостатком ее является то, что она справедлива только при предположении, что **пределы прочности материала на растяжение и сжатие одинаковы.** Ее называют иногда **критерием Мизеса.**

11.5.5. Пятая теория (критерий Мора)

Формулируется для элемента тела, который растягивается в продольном направлении и сжимается в поперечном направлении (см. рис.11.17).

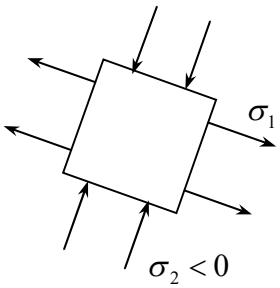


Рис.11.17

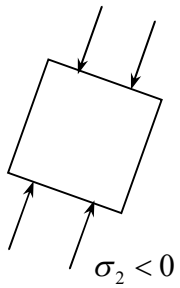


Рис.11.18

Для большинства материалов (в том числе, для бетона) было обнаружено, что образцы, предварительно **сжатые в поперечном направлении** напряжением σ_2 (см. рис.11.18), разрушаются при напряжении σ_1, которое **меньше** $\sigma_{проч}^{раст}$ (предела прочности при простом растяжении в продольном направлении).

Запишем это утверждение аналитически. Учтем, что при растяжении $\sigma_1 > 0$, при поперечном сжатии $\sigma_2 < 0$. Тогда разрушение произойдет, если

$$\sigma_1 = \sigma_{проч}^{раст} + n \cdot \sigma_2,$$

где $n > 0$ – некоторый коэффициент. Выразим n через пределы прочности материала. Для этого сначала рассмотрим разрушение при простом сжатии, полагая, что образец доведен до разрушения. Тогда:

$$\sigma_2 = -\sigma_{проч}^{сж}, \quad \sigma_1 = 0$$

Подставляя в условие разрушения, получим

$$0 = \sigma_{проч}^{раст} - n \cdot \sigma_{проч}^{сж}$$

Отсюда:

$$n = \frac{\sigma_{проч}^{раст}}{\sigma_{проч}^{сж}}.$$

Таким образом, для элемента тела, который растягивается в продольном направлении и сжимается в поперечном направлении, получим критерий Мора в виде:

$$\sigma_1 = \sigma_{проч}^{раст} + \frac{\sigma_{проч}^{раст}}{\sigma_{проч}^{сж}} \sigma_2 .$$

В 1-ой и 3-ей четвертях (т.е. при растяжении или сжатии в обоих направлениях) применяют первую теорию. Предельная кривая примет вид многоугольника, приведенный на рис.11.19.

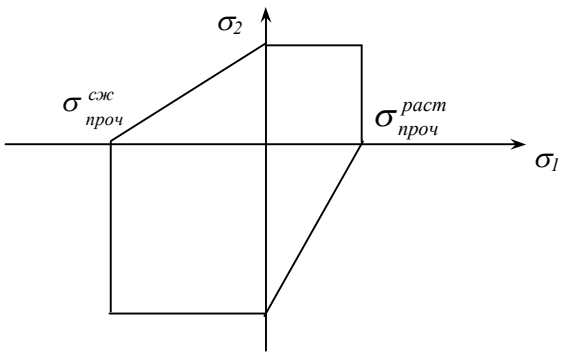


Рис.11.19

Примечание1.

Если на элемент тела кроме σ_1, σ_2 действует еще и σ_3, при этом $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$, а также $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$, то критерий Мора записывают том же виде

$$\sigma_1 = \sigma_{проч}^{раст} + \frac{\sigma_{проч}^{раст}}{\sigma_{проч}^{сж}} \sigma_2 .$$

Это означает, что влиянием σ_3 на прочность элемента пренебрегают.

Примечание2.

Из сравнительного анализа третьей теории прочности и критерия Мора видно, что третья теория является его частным случаем, когда пределы прочности на растяжение и сжатие одинаковы, т.е. при $\sigma_{проч}^{раст} = \sigma_{проч}^{сж}$.

12. О ВЫБОРЕ ТЕОРИЙ ПРОЧНОСТИ ПРИ АНАЛИЗЕ БРУСЬЕВ

12.1. Критерий Мора

В сопротивлении материалов рассматриваются элементы конструкций в виде брусьев, испытывающих изгиб, кручение, растяжение или сжатие. В этом случае в них возникают лишь два существенных напряжения σ_z , τ_{zy} . Как отмечено выше в разделе 11.3, тогда можно сразу записать выражения для главных напряжений, изображенных на рис.11.11. При этом видно, что одно из них положительно, а другое – отрицательно:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_z^2}{4} + \tau_{zy}^2} \quad > 0, \qquad \sigma_2 = \frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\frac{\sigma_z^2}{4} + \tau_{zy}^2} \quad < 0 . \tag{12.1}$$

Следовательно**, в задачах сопротивления материалов** для малого элемента стержня в главных осях имеет место растяжение при поперечном сжатии. Как было уже сказано, для подавляющего большинства строительных материалов первая теория не применима в случае напряженных состояний «растяжение при поперечном сжатии». Аналогично, вторая теория также плохо коррелирует с экспериментом, особенно для материалов с разными пределами прочности на растяжение и сжатие. Третья теория является частным случаем теории Мора. К тому же она справедлива **только** для материалов с равными пределами прочности на растяжение и сжатие, а для таких материалов эксперименты лучше подтверждают четвертую теорию. Пятая теория (критерий Мора), отметим еще раз, достаточно хорошо коррелирует с экспериментальными данными для большинства строительных материалов, имеющих разные пределы прочности на растяжение и сжатие

Таким образом, **в задачах сопротивления материалов (в задачах о расчете брусьев на прочность) наиболее удачной является теория разрушения Мора в виде**

$$\sigma_1 = \sigma_{проч}^{раст} + \frac{\sigma_{проч}^{раст}}{\sigma_{проч}^{сж}} \sigma_2 .$$

После подстановки сюда соотношений (12.1) получим критерий Мора в компонентах напряжений σ_z , τ_{zy} в виде:

$$\sigma_z(\sigma_{проч}^{сж} - \sigma_{проч}^{раст}) + (\sigma_{проч}^{сж} + \sigma_{проч}^{раст})\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2} = 2\sigma_{проч}^{сж}\sigma_{проч}^{раст} \tag{12.2}$$

В системе координат σ_z, τ_{zy} предельная кривая представляет собой эллипс со сдвинутым центром (см. рис 12.1).

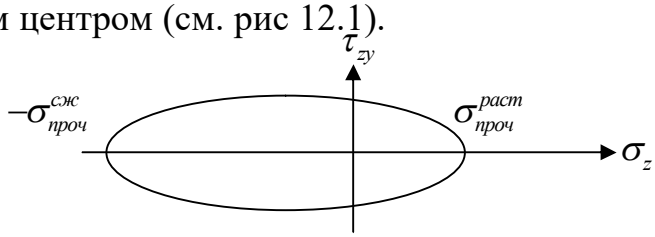


Рис 12.1

Из критерия Мора (12.2) легко получить значение для предела прочности на сдвиг $\tau_{прочн}$. Для этого положим, что на элемент тела действуют только касательные напряжения. Подставляя $\sigma_z = 0$, $\tau_{zy} = \tau_{прочн}$ в (12.2) получим:

$$\tau_{проч} = \sigma_{проч}^{сж} \cdot \sigma_{проч}^{раст} / (\sigma_{проч}^{сж} + \sigma_{проч}^{раст}) \qquad (12.3)$$

Тогда критерий Мора (12.2) можно переписать в виде:

$$\tau^2 = \tau_{проч}^2 \left[1 - n^2 \cdot \sigma_z^2 - m \cdot \sigma_z \right] , \qquad (12.4)$$

где

$$n^2 = \frac{1}{\sigma_{проч}^{сж} \cdot \sigma_{проч}^{раст}}, \qquad m = \frac{1}{\sigma_{проч}^{раст}} - \frac{1}{\sigma_{проч}^{сж}} \qquad (12.5)$$

Механический смысл соотношения (12.4) заключается в следующем. Пусть на малый элемент действует растягивающее напряжение $\sigma_z > 0$. Если приложить напряжение τ_{zy} и начать его увеличивать, то разрушение элемента начнется при значении касательного напряжения τ_{zy}, которое меньше $\tau_{прочн}$ (так же как в грунтах), а именно, при $\tau_{прочн}\sqrt{1 - n^2 \cdot \sigma_z^2 - m \cdot \sigma_z}$. Малые сжимающие напряжения $\sigma_z < 0$, напротив, немного увеличивает сопротивляемость сдвигу (опять таки, как в грунтах). Но большие сжимающие напряжения все же уменьшают сопротивляемость сдвигу.

Примечание. Соотношение (12.4) можно принять за гипотезу критерия Мора. Тогда для определения констант n, m нужно рассмотреть два случая разрушения: при простом растяжении (т.е. при $\sigma_z = \boldsymbol{\sigma}_{прочн}^{раст}$, $\tau_{zy} = 0$) и при простом сжатии (т.е. при $\sigma_z = \boldsymbol{\sigma}_{прочн}^{сж}$, $\tau_{zy} = 0$). После подстановки этих напряжений в критерий Мора (12.4) получим относительно n, m два уравнения, из которых получатся те же соотношения (12.5).

12.2. Энергетическая теория

Применительно к задачам сопротивления материалов можно использовать более простой способ вывода соотношения **четвертой теории** прочности, вновь используя то, что в сопротивлении материалов рассматриваются напряженные состояния брусьев, которые испытывают воздействие лишь двух напряжений: σ_z , τ_{zy}.. Приведем ее формулировку без привлечения гипотезы о предельном значении энергии сдвига (которая была использована в разделе 11.5.4). С учетом того, что IV теория справедлива лишь для материалов с равными пределами прочности на растяжение и сжатие, как было оговорено выше, используем обозначение $\boldsymbol{\sigma}_{проч}^{раст} = \boldsymbol{\sigma}_{проч}^{сж} = \boldsymbol{\sigma}_{проч}$.

Сформулируем **<u>четвертую теорию</u>** следующим образом: **при наличии касательных напряжений τ_{zy} для разрушения малого элемента тела нормальным напряжением σ_z требуется меньшее значение σ_z , чем предел прочности** $\sigma_{проч}$.

Это утверждение в четвертой теории в отличие от теории Мора записывается так, чтобы на эту запись не влиял знак σ_z, а именно, в виде:

$$\sigma_z^2 = (\sigma_{проч})^2 - k \cdot \tau_{zy}^2 . \qquad (12.6)$$

Как показали эксперименты, коэффициент $k = 3$.

Обычно в курсах сопротивления материалов четвертую теорию представляют следующим образом:

$$\sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{zy}^2} = \sigma_{проч} . \qquad (12.7)$$

Предельная кривая, построенная по соотношению (12.6), примет вид изображенного на рис.12.1 эллипса, центр которого находится в начале координат.

<u>Примечания.</u>

1. Для материалов с равными пределами прочности на растяжение и сжатие имеет место небольшое отличие **четвертой теории** от теории Мора (которая вырождается в третью теорию). Расчеты с использованием критерия (12.2) дают «запас прочности» порядка 15% .

2. Анализ четвертой теории показывает, что из (12.7) вытекает следующее значение для $\tau_{прочн}$ (при $\sigma_z = 0$, $\tau_z = \tau_{прочн}$) :

$$\tau_{прочн} = \frac{\sigma_{проч}}{\sqrt{3}}$$

Из теории Мора (третьей теории) на основании формулы (11.12) вытекает

$$\tau_{прочн} = \frac{\sigma_{проч}}{2}$$

Разница между значениями для $\tau_{прочн}$ по разным теориям также около 15%.

13. РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

Рассмотрим применение теорий прочности при расчете цилиндрической оболочки.

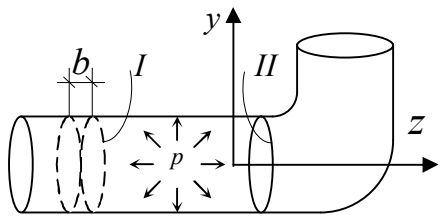


Рис 13.1

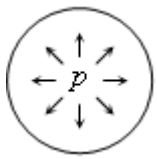


Рис 13.2

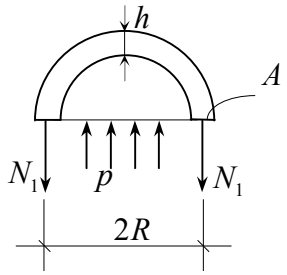


Рис 13.3

Пусть известны средний радиус оболочки R (в силу тонкостенности оболочки обычно работают со средним радиусом R), толщина стенки h, давление p внутри трубы.

В отличие от простого растяжения элементы стенки испытывают и продольное, и окружное растяжение.

Вырежем диск ширины b (рис.13.1). На него действует давление p. Рассечем диск на 2 части. Нижняя часть воздействует на верхнюю давлением p и растягивает стенки трубы усилием N (рис. 13.3).

Из уравнений равновесия вытекает:

$$\sum F_y = 0 \quad -2N_1 + p \cdot 2R \cdot b = 0$$

$$N_1 = \frac{p \cdot 2R \cdot b}{2} = pRb$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{N_1}{hb} = \frac{Rb}{hb} p = \frac{R}{h} p$$

Рассмотрим теперь часть оболочки, которая находится справа от второго сечения (рис 12.4).

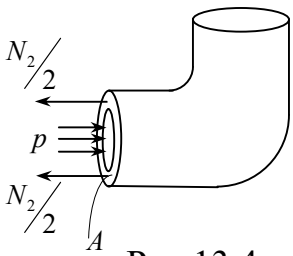


Рис 13.4

На него слева в горизонтальном направлении действует давление p и сила N_2. Уравнение равновесия примет вид:

$$\sum F_z = 0 \quad -N_2 + p \cdot \pi R^2 = 0$$

Отсюда

$$N_2 = R^2 \pi p$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{\pi R^2 p}{2\pi R h} = \frac{R}{2h} p$$

Видно, что окружные напряжения в два раза больше, чем продольные. Пусть материал равнопрочный, т.е

$$\sigma_{проч}^{сж} = \sigma_{проч}^{раст} = \sigma^*$$

Согласно I, III и V теориям прочности при наличии растягивающих напряжений условия того, что разрушения не произойдет, имеют вид:

$$\boldsymbol{\sigma}_1 < \boldsymbol{\sigma}^*$$

Или

$$\frac{R}{h} p < \boldsymbol{\sigma}^*$$

Отсюда находим давление, которое может выдержать цилиндрическая оболочка:

$$p < \boldsymbol{\sigma}^* \frac{h}{R}.$$

Рассмотрим теперь IV теорию. Получим давление, которое может выдержать материал оболочки согласно этой теории:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} < \sigma^*$$

$$\sqrt{p^2 \frac{R^2}{h^2} (1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2})} < \sigma^*$$

$$p \frac{R}{h} \sqrt{\frac{3}{4}} < \sigma^*$$

$$p < \sigma^* \frac{h}{R} \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Видно, что IV теория даёт предельное давление, которое может выдержать оболочка, в $2/\sqrt{3} =$ 1.155 раза большее, чем давление, которое дают I,III и V теории. Таким образом, IV теория позволяет «экономить» материал приблизительно на 15%.

14. УСТАЛОСТНОЕ РАЗРУШЕНИЕ (ЦИКЛИЧЕСКАЯ ПРОЧНОСТЬ)

Всем известно, что проволоку можно разрушить путем многократного изгиба. Это явление называется усталостным разрушением.

Изобразим действие нагрузки во времени графически (рис 14.5).

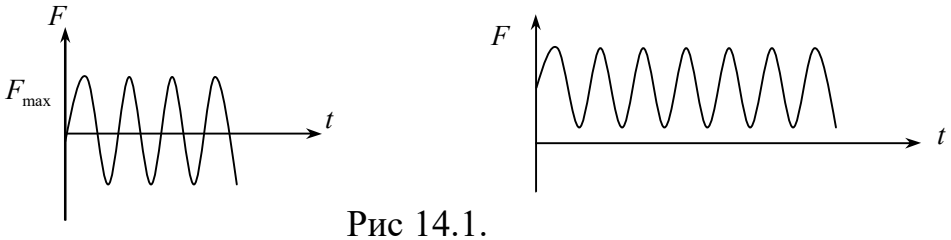


Рис 14.1.

Различают симметричный цикл (изгиб осей автомобиля, вагона и т. п.), изображенный на рис.14.1 слева, и несимметричный цикл, изображенный справа. Симметричный цикл наиболее опасный, поэтому несимметричный цикл иногда рассматривают как симметричный (такой подход называется расчетом в запас прочности).

14.1. Расчет сооружений при циклическом нагружении с помощью диграммы Вёлера

Рассмотрим традиционный способ расчета на усталость при симметричном цикле. Сначала из эксперимента определяют число циклов *N*, которое приводит к разрушению образцов из данного материала при ряде значений напряжений. После этого строят диаграмму Вёлера (A.Wöhler), изображенную на (рис 14.2).

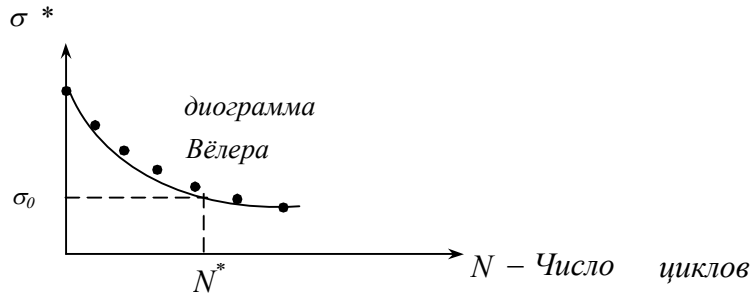


Рис 14.2

При известной диаграмме Вёлера можно приступать к расчету сооружения или конструкции на усталость. Для этого находят напряжение в наиболее загруженной области конструкции, то есть находят $\sigma = \sigma^{\max}$. Затем по диаграмме Вёлера отыскивают предельный цикл *N**. Уменьшая его на коэффициент запаса k, получаем допустимое значение циклов $[N] = \frac{N^*}{k}$, которое иногда называют также **ресурсом** изделия.

Поскольку время t_0 одного цикла (т.е., период) обычно известно, то время, которое обеспечивает прочность конструкции, находится по формуле:

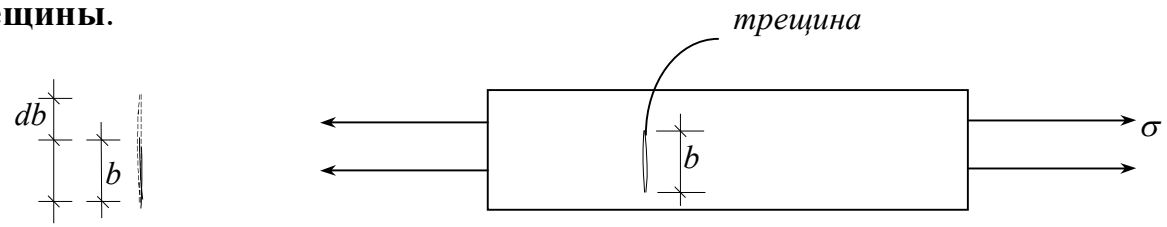
$$[t] = [N]\, t_0 . \qquad (14.1)$$

Примечание. Для некоторых материалов (например, для стали) на диаграмме существует механическая характеристика σ_0^*, которая называется пределом выносливости. Если рабочее напряжение σ не превышает значения σ_0^*, то разрушения не происходит ни при каких N. Поэтому, если нет требований экономичности изделия, то условие прочности при циклической нагрузке записывают просто в виде (k – коэффициент запаса):

$$\sigma^{\max} < \frac{\sigma_0^*}{k} .$$

14.2. Расчет сооружений при циклическом нагружении по теории развивающихся трещин

Циклическая нагрузка приводит к развитию трещин во времени. Из экспериментов выявлено, что **скорость подрастания трещины тем больше, чем больше размах напряжения растяжения и чем больше длина трещины**.



Обозначим через $\dot{b}$ - скорость подрастания трещины, то есть:

$$\dot{b} = \frac{db}{dt} . \qquad (14.2)$$

Итак, $\dot{b}$ тем больше, чем больше размах напряжения растяжения $\Delta\sigma$ и чем больше длина трещины b. Это утверждение можно записать в виде:

$$\dot{b} = B(\Delta\sigma)^m b^n . \qquad (14.3)$$

Здесь B, m, n – механические характеристики материала.

Эксперименты показывают, что для всех материалов степень n в два раза меньше чем m, т.е. $n = 0.5m$. Тогда:

$$\dot{b} = B(\Delta\sigma \cdot \sqrt{b})^m \qquad (14.4)$$

Это соотношение называется **законом роста трещины.**

Если напряжение изменяется во времени, т.е. $\Delta\sigma = f(t)$, то закон запишется в виде:

$$\dot{b} = B[f(t)\sqrt{b}]^m \qquad (14.5)$$

Это дифференциальное уравнение относительно длины трещины b. Оно решается методом разделения переменных:

$$\frac{db}{(\sqrt{b})^m} = B \cdot [f(t)]^m \, dt \,. \tag{14.6}$$

Отсюда получим:

$$\frac{b^{-m/2+1}}{-m/2+1} = B\int_0^t [f(t)]^m \, dt + C \,. \tag{14.7}$$

Константу C определяют из начальных условий, т.е. из условия, что в начальный момент времени длина трещины известна. Пусть при t = 0 начальная длина трещины равна b_0. Тогда

$$C = \frac{b_o^{-m/2+1}}{-m/2+1} \,. \tag{14.8}$$

Рассмотрим случай, когда можно считать, что размах напряжения постоянен, то есть

$$f(t) = \text{const} = \Delta\sigma_o.$$

Из (14.7) вытекает выражение

$$b = [\,(B(\Delta\sigma_0)^m t + C)\;\;(-m/2+1)\,]^{2/(2-m)} \,. \tag{14.9}$$

Таким образом, в любой момент времени можно вычислить длину трещины.

Согласно формуле Гриффитса, зная длину трещины можно найти предел прочности $\sigma*$, при котором произойдет разрушение:

$$\sigma* = \sqrt{Ea/b} \,.$$

Здесь E модуль Юнга, a - механическая характеристика материала.

Подставляя найденную длину трещины b в условие разрушения $\sigma_{\max} = \sigma*$, получаем уравнение для отыскания времени разрушения t^*:

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{Ea}{[\,(B(\Delta\sigma_0)^m t^* + C)\;\;(-m/2+1)\,]^{2/(2-m)}}} \,. \tag{14.10}$$

Отсюда находим t^*:

$$t^* = \left[\frac{\left(\dfrac{Ec}{\sigma_{\max}{}^2}\right)^{-m/2+1}}{(-m/2+1)} - C \right] \frac{1}{B\sigma_{\max}{}^m}$$

Перечислим использованные обозначения: константы E, m, a, B являются механическими характеристиками материала, $\Delta\sigma_0$ - размах напряжения растяжения элемента, константа C определяется по формуле (14.8), в которой b_o - первоначальная длина трещины.

Уменьшая $t*$ на коэффициент запаса k , получаем $[t]$ - допустимое значение времени эксплуатации сооружения.

15. ИЗГИБ БАЛОК

15.1. Нормальные напряжения. Формула Навье

Рассмотрим элемент изогнутой балки (рис. 15.1-15.2)

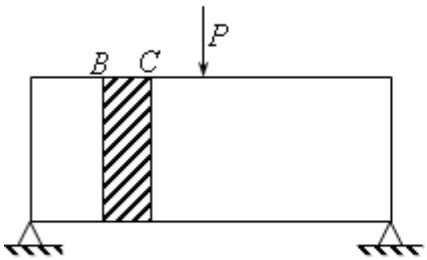


Рис.15.1

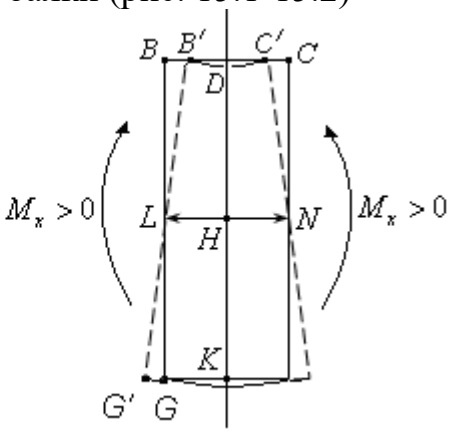


Рис. 15.2

Здесь M_x - момент внешних сил, которые воздействуют на наше сечение слева или справа (по определению он называется изгибающим моментом).

Из рис. 15.2, что верхние волокна укорачиваются (например, *BC*), а нижние - удлиняются. Между ними есть волокно *LN*, которое не деформируется (рис.15.2). Очевидно, что чем дальше волокна от *LN*, тем больше удлинение волокон, значит по закону Гука и сила их растяжения больше. Таким образом, максимальное напряжение будет там, где волокна наиболее удалены от LN.

Для вывода формулы вычисления напряжений используем метод сечений. Рассмотрим поперечное сечение *DK* (рис.15.2, 15.3)). Проведем ось *x* через точку *H* (рис 15.3). На этой линии, напряжений не будет.

<u>*Определение*</u>: Линия *HR*, на которой нет напряжений, называется ***нейтральной.***

Таким образом, ось x будет лежать на нейтральной линии, так как на ней $\sigma = 0$ (для удобства записи индексы для напряжений σ_z , τ_{zy} в дальнейшем будем опускать).

На верхнюю часть нашего элемента правая часть балки действует сжимающим напряжением $\boldsymbol{\sigma}$, а на нижнюю - растягивающим (см. рис.15.3). Разобьем сечение на малые микроплощадки *dA.* Рассмотрим одну из них. На неё с правой стороны действует следующая сжимающая сила:

$$dN = \boldsymbol{\sigma} \cdot dA \tag{15.1}$$

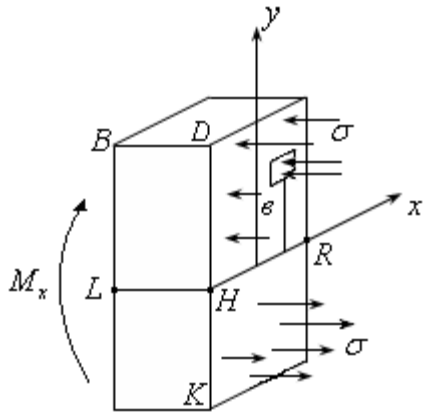


Рис. 15.3

Относительно оси x сила dN имеет плечо $в$, следовательно, dN создаёт момент:

$$dM = в\, dN. \qquad (15.2)$$

Из рисунка видно, что плечо $в$ - это координата центра микроплощадки dA. Значит $в = y$. Тогда:

$$dM = в \cdot dN = y \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dA. \qquad (15.3)$$

Суммируя, получаем результирующий момент $M_{\boldsymbol{\sigma}}$, который создают напряжения $\boldsymbol{\sigma}$:

$$M_{\boldsymbol{\sigma}} = \sum dM = \int_A dM = \int_A y \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dA \qquad (15.4)$$

Поскольку вся балка находится в покое, то и любой его элемент тоже статичен. Следовательно, можно записать уравнение статики и для элемента, изображенного на рис.15.3. Запишем его в виде:

$$M_x + M_{\boldsymbol{\sigma}} = 0.$$

Отсюда:

$$M_x = -\int_A y \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dA. \qquad (15.5)$$

Для отыскания σ из (15.5) учтем, что чем дальше микроплощадка от LN, тем больше σ. То есть, чем больше $в$, тем больше σ. Учитывая, что $в = y$, эту фразу можно записать в виде:

$$\boldsymbol{\sigma} = -y \cdot k. \qquad (15.6)$$

Здесь k - коэффициент пропорциональности, а знак «-» поставлен потому, что при $y > 0$ (т.е. в верхней части) действуют сжимающие напряжения.

Примечание. Соотношение (15.6) можно считать первым членом разложения функции σ в ряд Маклорена по аргументу y.

Найдем k (тогда мы будем знать формулу для σ).

Подставим $\boldsymbol{\sigma} = -y \cdot k$ в (15.5), тогда:

$$M_x = \int_A y \cdot y \cdot k \cdot dA = k \underbrace{\int_A y^2 dA}_{J_x}. \qquad (15.7)$$

Согласно определению $\int_A y^2 dA = J_x$ - это момент инерции сечения. Таким образом,

$$M_x = k \cdot J_x \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{M_x}{J_x}.$$

Окончательно формула для σ принимает вид:

$$\boxed{\sigma = -\frac{M_x}{J_x} \cdot y}. \tag{15.8}$$

Здесь y - это координата точки (микроплощадки dA), в которой вычисляется напряжение, J_x-осевой момент инерции сечения. Формулу (15.8) нередко называют формулой Навье.

Примечание. Согласно закону Гука по формуле (15.6) получим, что $\varepsilon = -y \cdot k / E$. Это означает, что линия GG' - прямая. Эксперимент подтверждает этот вывод для длинных балок. Тогда в рассуждениях можно пойти дальше и считать, что сечение со следом BG остается плоским. Это предположение называют гипотезой Бернулли. Его обычно принимают за исходное положение. Тогда формула (15.6) будет следствием гипотезы Бернулли.

15.2. Определение положения нейтральной линии (оси x) в сечении

Используем тот факт, что при изгибе нет сил растяжения балки, т. е. $N = 0$. Отсюда получим с учетом (15.1):

$$N = \sum dN = \int_A dN = \int_A \sigma \cdot dA = \int_A k \cdot y \cdot dA = k \int_A y \cdot dA = 0. \tag{15.9}$$

Согласно определения: $\int_A y dA = S_x$ - это статический момент сечения.

Поскольку $k \neq 0$, то из (15.9), вытекает, что $S_x = 0$. Но $S_x = 0$ тогда, когда ось x проходит через центр тяжести.

Таким образом, нейтральная линия HR (ось x) проходит через центр тяжести сечения.

15.3 Момент сопротивления

Как видно из формулы (15.8), наибольшее по модулю значение σ достигается при $|y| = |y|_{\max}$. Тогда

$$|\sigma|_{\max} = \left|\frac{M_x}{J_x}\right| \cdot |y|_{\max}. \tag{15.10}$$

В таблице сортамента J_x и $y_{\max}$ известны для каждого номера профиля. Для облегчения расчетов там же даётся вычисленное соотношение $\frac{J_x}{y_{\max}}$. Оно называется **«моментом сопротивления»** и обозначается буквой W_x**:**

$$\boxed{W_x = \frac{J_x}{|y|_{\max}}} \qquad (15.11)$$

Поэтому:

$$\boxed{|\sigma|_{\max} = \frac{|M_x|_{\max}}{W_x}} \qquad (15.12)$$

Примечание: для стальных конструкций, а также изделий из некоторых других пластичных материалов, допускаемые напряжения на растяжение и сжатие обычно одинаковы и обозначаются:

$$[\sigma]^{раст} = [\sigma]^{сж} = [\sigma].$$

Для стали: $[\sigma] = 1,6\frac{T}{см^2} = 16\frac{кН}{см^2}$.

Поэтому условие прочности для стальных балок можно записать в виде:

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M_x|_{\max}}{W_x} \le [\sigma].$$

Однако для материалов типа дерево, бетон, камень, чугун и т.п. нужно отдельно вычислять максимальное растягивающее и максимальное сжимающее напряжения. Поэтому пользоваться моментом сопротивления во всех случаях уже нельзя. Например, при расчете на прочность чугунного бруса с сечением в виде швеллера (рис.15.4, 15.5.) большое значение имеет то, как расположены полки.

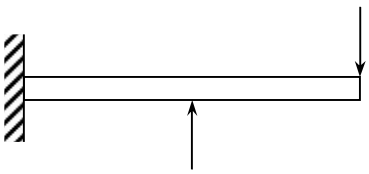


Рис.15.4

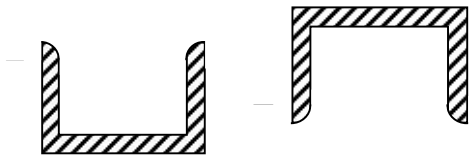


Рис. 15.5

15.4 Ошибка Галилея

Поскольку часто и при растяжении, и при изгибе разрушение происходит одинаково (разделением на 2 части по вертикальной трещине), то он считал, что напряжения распределены по сечению равномерно (рис. 15.6)

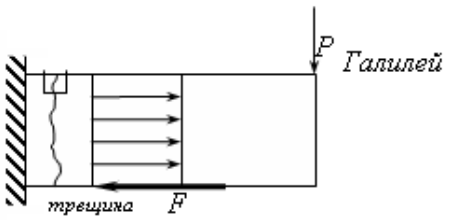


Рис. 15.6

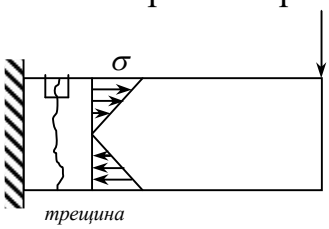


Рис. 15.7

Однако согласно формуле (15.8) они распределены по линейному закону, т.е. неравномерно (рис. 15.7),.

15.5 Касательные напряжения в балке

Впервые формулу для τ_{zy} вывел Журавский Д. И. в 1855 году.

Рассмотрим поперечный изгиб (рис. 15.8, как и ранее для удобства записи индексы для напряжений σ_z , τ_{zy} в дальнейшем будем опускать).

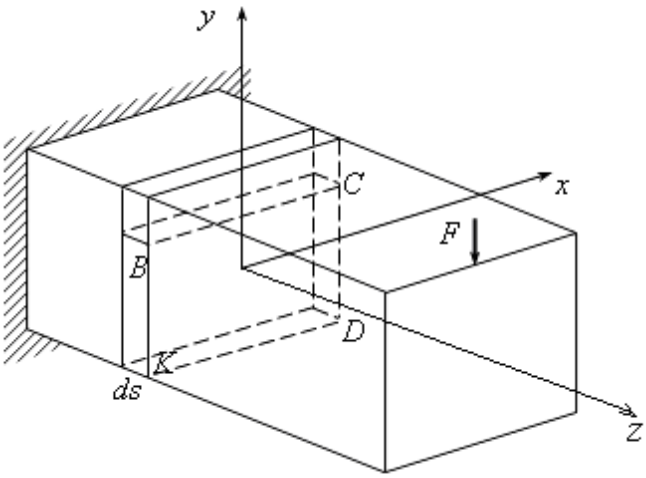


Рис. 15.8

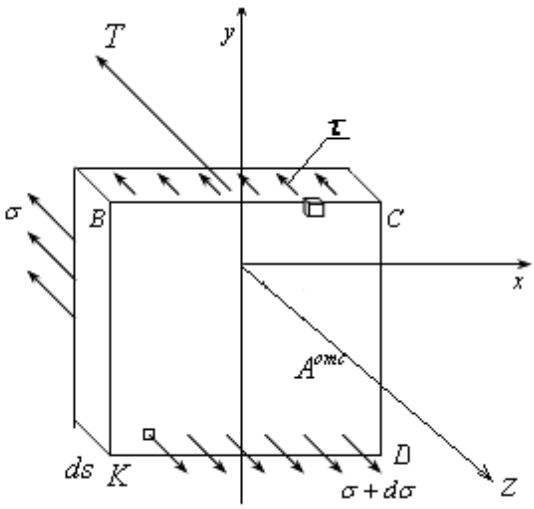


Рис. 15.9

Вырежем тонкий диск шириной *ds*. Из него еще раз вырежем часть диска с площадью сечения $A^{отс} = BCDK$ (рис. 15.8, 15.9).

Верхняя часть диска воздействует на нижнюю часть касательными напряжениями τ (рис. 15.9).

Найдем это $\boldsymbol{\tau}$ из уравнения равновесия диска *BCDK*. Запишем соотношение статики:

$$\sum F_z = 0. \qquad (15.13)$$

Поскольку *ds* бесконечно мал, то можно считать, что на верхней площадке диска $\tau = const$. Тогда равнодействующая напряжений τ на этой верхней площадке будет:

$$T = \tau \cdot (BC \cdot ds). \qquad (15.14)$$

Теперь подсчитаем силы, которые действуют в направлении оси *z* на переднюю и заднюю площадки нашего усеченного диска. На них действуют нормальные напряжения: на заднюю действуют $\boldsymbol{\sigma}$ (рис.15.10). На переднюю действуют нормальные напряжения, которые мало отличаются от $\boldsymbol{\sigma}$. Как обычно эту фразу записываем так: на переднюю площадку действуют $\boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}$.

Как обычно площадь *BCDK* разбиваем на малые площади dA и находим силы, которые на них действуют. Это будут $dN = (\boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma})dA$. Суммируя эти силы получим, что на площадь *BCDK* спереди действует сила

$$N_2 = \int_{A^{отс}} (\sigma + d\sigma)dA. \qquad (15.15)$$

На такую же площадь нашего диска, но сзади действует сила:

$$N_1 = \int_{A^{отс}} \sigma \cdot dA \qquad (15.16)$$

Уравнение (15.13) примет вид:

$$-T - N_1 + N_2 = 0.$$

Подставляя сюда соотношения (15.14)-(15.16) получим:

$$-\boldsymbol{\tau} \cdot BC \cdot ds - \int_{A^{отс}} \boldsymbol{\sigma} \cdot dA + (\int_{A^{отс}} \boldsymbol{\sigma} \cdot dA + \int_{A^{отс}} d\boldsymbol{\sigma} \cdot dA) = 0.$$

Отсюда:

$$-\boldsymbol{\tau} \cdot BC \cdot ds + \int_{A^{отс}} d\boldsymbol{\sigma} \cdot dA = 0.$$

Деля на *BC·ds* получим:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{BC} \int_{A^{отс}} \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds} dA. \qquad (15.17)$$

По формуле Навье (15.8) имеем $\boldsymbol{\sigma} = -\frac{M_x}{J_x} \cdot y$.

Отсюда:

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds} = -\frac{y}{J_x} \cdot \frac{dM_x}{ds}. \qquad (15.18)$$

Согласно уравнению равновесия (3.2) элемента балки имеем:

$$\frac{dM_x}{ds} = Q_y. \qquad (15.19)$$

Таким образом:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{BC} \int_{A^{отс}} (-\frac{Q_y}{J_x}) y \cdot dA = -\frac{Q_y}{BC} \cdot \frac{1}{J_x} \int_{A^{отс}} y \cdot dA = -\frac{Q_y}{BC \cdot J_x} \cdot S_x^{отс}$$

Обозначая ВС через $\boldsymbol{b}$ полученную **<u>формулу Журавского</u>** запишем в виде:

$$\boxed{\tau = -\frac{Q_y \cdot S_x^{отс}}{b \cdot J_x}}, \qquad S^{отс} = A^{отс}(y_{ц.т.})^{отс}. \qquad (15.20)$$

Перечислим использованные обозначения.

Q_y - поперечная сила;

J_x - момент инерции всего сечения;

b - ширина сечения на уровне того микроэлемента, в котором вычисляется τ (если фигура не прямоугольник, то ширина b будет разная на разных уровнях рассматриваемого микроэлемента);

$S_x^{отс}$ - статический момент отсеченной площади $A^{отс}$ - части площади сечения, которая лежит ниже рассматриваемого малого элемента (т.е. фигуры BCDK), , в котором вычисляется τ ,

$(y_{ц.т.})^{отс}$ - координата центра тяжести отсеченной площади BCDK.

15.6. Касательные напряжения в полке двутавра

Как и ранее, вырежем из балки диск шириной ds (рис. 15.10), а из него затем с помощью вертикального сечения I-I вырежем часть полки (рис. 15.11). Обозначим через BC расстояние от левого конца полки до сечения I-I На эту часть полки спереди и сзади действуют растягивающие напряжения, мало отличающиеся друг от друга, а именно, отличающиеся на величину $d\sigma$.

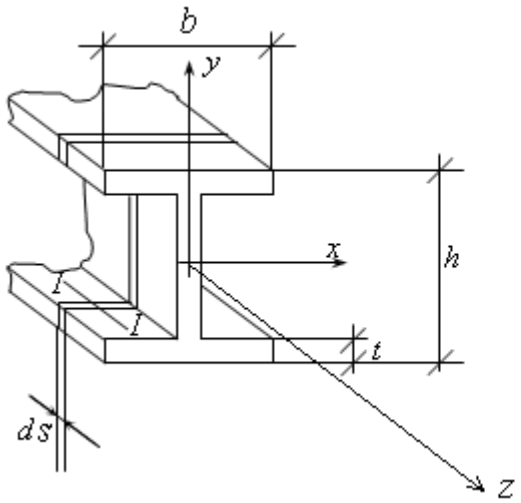


Рис. 15.10

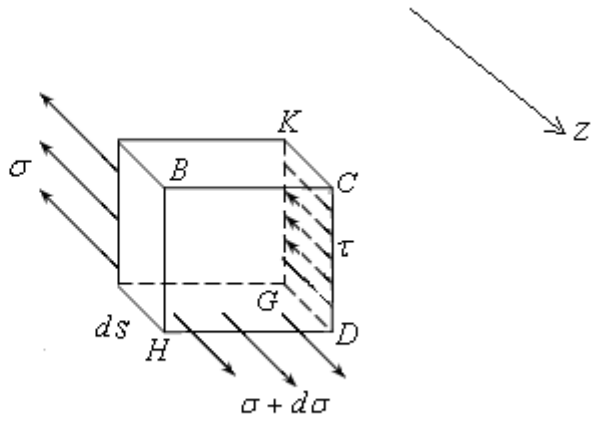


Рис. 15.11

Некомпенсированное воздействие $d\sigma$ должно чем-то уравновешиваться. Этими силами могут быть только касательные напряжения, которые воздействуют на правое сечение $KCDG$ этого элемента

Запишем уравнение равновесия:

$$\sum F_z = 0: \quad -\boldsymbol{\tau} \cdot A_{KCDG} - (\boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}) \cdot A_{BCDH} + \boldsymbol{\sigma} \cdot A_{BCDH} = 0 \qquad (15.21)$$

В отличие от предыдущего раздела здесь не интегрируем по площади $BCDH$, так как толщина полок t мала, поэтому можно считать, что $d\boldsymbol{\sigma} \approx const$ по высоте полки. Кроме того, ввиду малости t можно считать что $y \approx \frac{h}{2}$. Тогда получим из (15.21):

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{A_{KCDG}} \cdot A_{BCDH} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds \cdot t} \cdot BC \cdot t = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds} BC =$$

$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{-M_x}{J_x} \cdot y\right) \cdot BC = \frac{-y}{J_x}\frac{dM_x}{ds} \cdot BC = \frac{-y \cdot Q_y}{J_x} \cdot BC \approx \frac{-Q_y \cdot h/2}{J_x} \cdot BC \qquad (15.22)$$

Таким образом: $\boldsymbol{\tau}_{полки} = \frac{-Q_y \cdot h}{J_x \cdot 2} \cdot BC$.

Видно, что τ прямо пропорционально *BC,* то есть зависит от *BC* линейно (*BC* – расстояние от левого конца полки до сечения I-I). Следовательно:

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}_{полки}^{\max} = \frac{Q_y \cdot h}{J_x \cdot 2} \cdot \frac{b}{2}}. \qquad (15.23)$$

Для правой полки распределение напряжений аналогично рис.15.11 и имеет вид, приведенный на рис. 15.12. Поэтому формула для $\boldsymbol{\tau}$ получится такая же как (15.23). Однако здесь направление нормали $\bar{n}$ к сечению противоположно оси *x*, поэтому τ будет иметь противоположный знак.

Эпюра τ примет вид, приведенный на рис. 15.13.

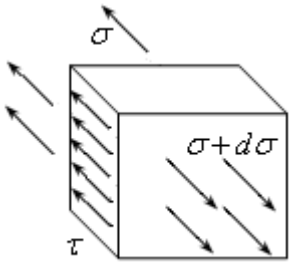


Рис.15.12.

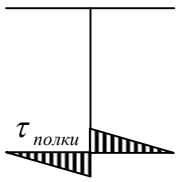


Рис.15.13

Следствия. Как видно из формул (15.20), (15.23), касательные напряжения возникают только там, где поперечная сила Q_y отлична от нуля.

15.7. Анализ формул для напряжений

Рассмотрим сначала формулу Навье:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{-M_x}{J_x} \cdot y.$$

Геометрически J_x отражает разбросанность сечения относительно оси *x*. Отсюда видно, что форма сечения имеет большое значение при изгибе балки.

Расчеты показывают, например, что из 3-х балок одинакового веса, сечения которых приведены на рис.15.14, наиболее прочным является двутавр, а наименее прочным - балка круглого сечения.

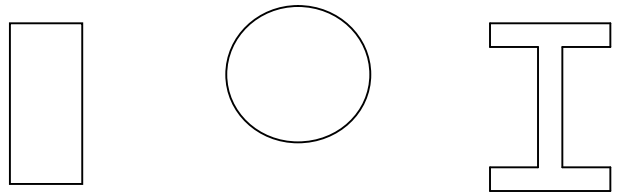


Рис.15.14

15.8. О максимальных касательных напряжениях $(\tau_{zy})_{max}$

В большинстве случаев $(\tau_{zy})_{max}$ достигает наибольшего значения на уровне центра тяжести сечения. Это относится к сечениям прямоугольной, круглой, двутавровой формы и им подобным. Однако в нестандартных случаях необходимо строить эпюру касательных напряжений, т.к. максимальные касательные напряжения действуют на сечение не всегда на уровне центра тяжести. Например, нетрадиционное распределение τ по высоте сечения получается для балки с сечением вида креста. В области центра тяжести ширина сечения много больше, чем у вертикальных стенок. Значит, в формуле Журавского в знаменателе величина b будет большая, следовательно, и напряжения в полке (горизонтальной части сечения) будут малы. Тогда эпюра τ будет иметь вид, приведенный на рис. 15.19.

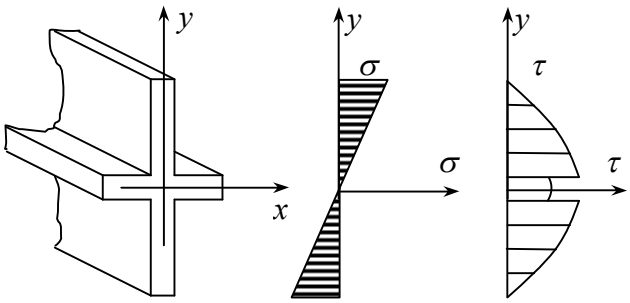


Рис. 15.19

Таким образом, $(\tau_{zy})_{max}$ возникает не всегда на уровне центра тяжести сечений.

15.9. Эффект Эмерсона

Рассмотрим балку круглого сечения

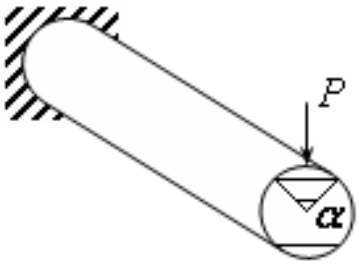


Рис.15.15

Уберем часть материала сверху и снизу (см. рис.15.15). Оказывается, если срез не очень большой, то $\sigma_{\max}$ уменьшается, т.е. прочность балки возрастает. Это происходит потому, что при малых α в формуле Навье координата y уменьшается быстрее, чем уменьшается J_x.

Расчеты показали, что при $\alpha = 24^\circ$, имеет место наибольшее упрочнение балки (но совсем мало - на 0.7%).

Еще большим эффектом обладают балки, сечение которых представляет собой ромб (для них упрочнение достигает нескольких процентов)

Таким образом, для некоторых балок уменьшение высоты его сечения (в некоторых пределах) не приводит к уменьшению её прочности, а даже напротив, уменьшение высоты сечения положительно сказывается на прочности балки. Этот эффект называется ***эффектом Эмерсона****.*

15.10. Парадоксы формулы Журавского

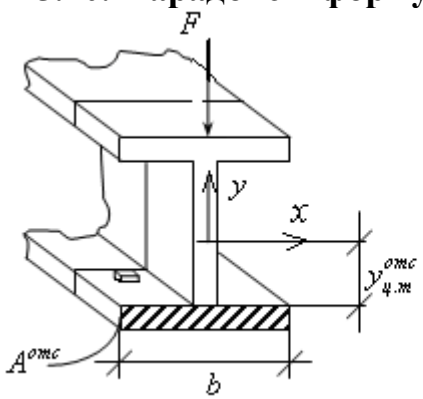


Рис.15.16.

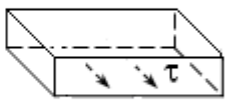


Рис.15.17.

Рассмотрим малый элемент, высота которого много меньше толщины полки (см. рис. 15.16.). По формуле Журавского.

$$\tau = \frac{-Q_y \cdot A^{отс} \cdot y_{ц.т.}^{отс}}{J_x \cdot b} \neq 0 . \qquad (15.24)$$

С другой стороны, согласно рис.15.17 на верхней грани никаких воздействий нет, поскольку это свободная поверхность полки. Из условия равновесия по оси z (рис. 15.17) получим, что $\tau = 0$.

Это противоречие вызвано тем, что в сопромате много пренебрежений малыми величинами. Если построить эпюру τ по высоте двутавра по формуле Журавского, то получим картину, изображенную на рис.15.18. В данной задаче в полке значения напряжения τ (вычисленные по формуле (15.24)) хоть и отличны от 0, но очень малы (обычно они составляют менее 5% от $\tau_{\max}$). Ясно, что в расчетах на прочность малые напряжения τ не используются, а их уточнение бессмысленно.

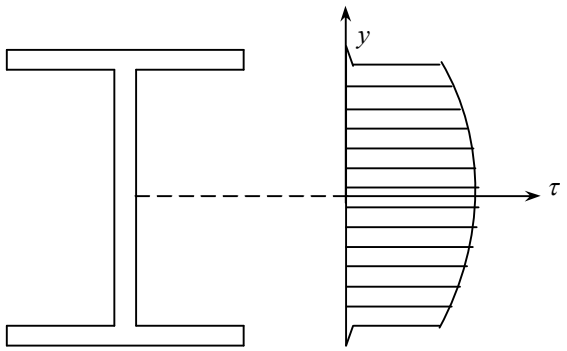


Рис.15.18

(Отмеченное выше противоречие аналогично противоречию вида 2.48 ≈ 2.5, из которого тоже вытекает, что якобы 0.02=0).

15.11. Расчеты балки на прочность

При расчетах балок на прочность нужно учитывать возможность различных видов разрушения. Рассмотрим их. Как и ранее для удобства записи индексы для напряжений σ_z , τ_{zy} будем опускать.

1. Разрушение изломом

Рассмотрим малый элемент на поверхности балки (рис.15.6, 15.20).

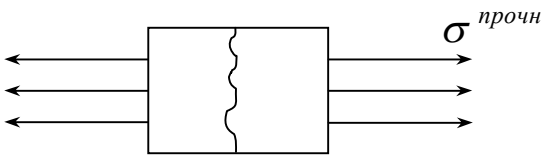


Рис.15.20

Этот элемент разрушится в результате появления вертикальной трещины. Поэтому произойдет излом балки под действием силы F (рис. 15.21).

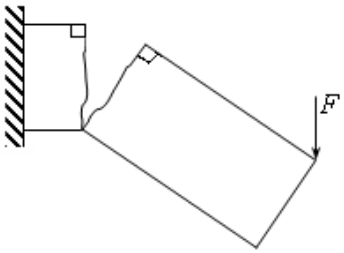


Рис. 15.21

Такое разрушение не произойдет, если нормальное напряжение σ будет меньше предела прочности. Уменьшая предел прочности на коэффициент запаса, получим условие прочности в виде

$$\boxed{|\sigma| < [\sigma]}$$

Это условие называется условием прочности балки по нормальным напряжениям.

2.Разрушение срезом (расслоение).

Иногда балки разрушаются расслоением (рис.15.22). Это происходит потому, что некоторый малый элемент получает трещину, параллельную оси балки. Рассмотрим изгиб балки под действием поперечной силы и исследуем малый элемент в области центра тяжести (рис.15.22).

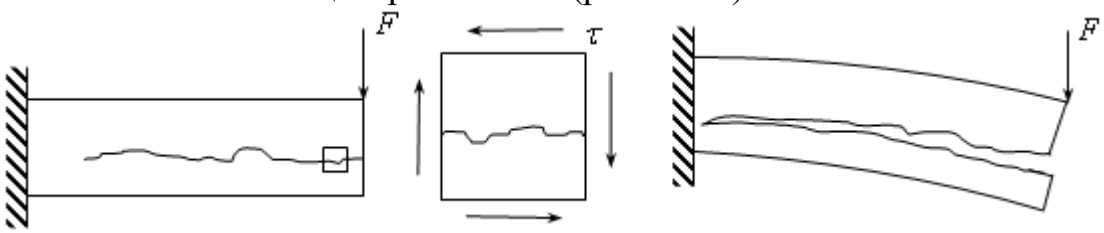


Рис.15.22

Он разрушится в результате появления горизонтальной трещины. Такое разрушение не произойдет, если касательное напряжение будет меньше предела прочности. Уменьшая предел прочности на коэффициент запаса, получим условие прочности в виде:

$$\boxed{|\tau| < [\tau]}.$$

Это условие называется условием прочности по касательным напряжениям.

3. Расчет балки по главным напряжениям.

Эксперименты показывают, что высокие балки из хрупких материалов иногда разрушаются из-за появления наклонных трещин. Это означает, что некоторые малые элементы разрушаются под действием напряжений $\sigma_{\max}$,

растягивающих эти элементы не вдоль оси балки, а под углом к ней (см.рис.15.23). Согласно определению σ_{max} называется главным напряжением. **Такое воздействие на элементы возникает там, где и σ, и τ отличны от нуля.**

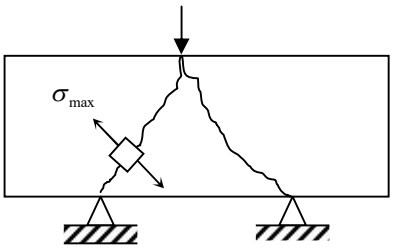


Рис.15.23

Вычисляется σ_{max} по следующей формуле

$$\sigma_{max} = \sigma / 2 + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} / 2. \qquad (15.25)$$

Для определения максимальных растягивающих напряжений σ_{max} приходится строить ее эпюру по высоте сечения балки по известным напряжениям τ и σ (причем, строить эпюру σ_{max} приходится в различных сечениях). Например, для двутаврового сечения эпюры $\sigma, \tau, \sigma_{max}$ может иметь вид, приведенный на рис.15.24.

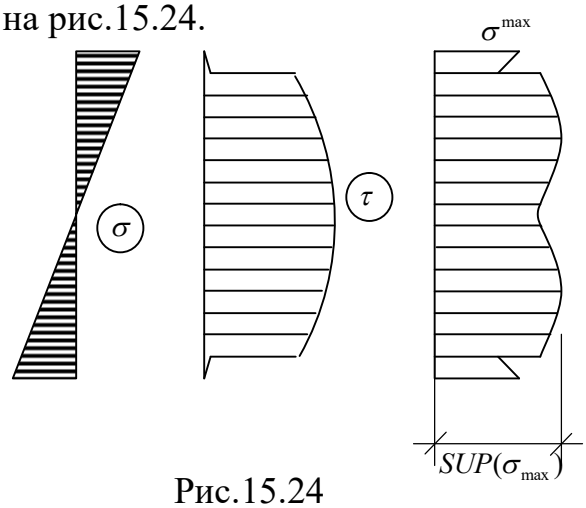


Рис.15.24

Такого разрушения не произойдет, если главное напряжение будет меньше предела прочности. Уменьшая его на коэффициент запаса, получим условие прочности в виде

$$\sigma / 2 + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} / 2 < [\sigma]. \qquad (15.26)$$

Это условие называется условием прочности по главным напряжениям.

Поскольку бетон плохо работает на растяжение, то в железобетонных конструкциях целесообразно арматуру укладывать вдоль направления главных растягивающих напряжений σ_{max}, чтобы основная часть растягивающих сил воспринималась арматурой. Вычислив σ_{max} в ряде точек

можно (хотя бы приближенно) провести линии, вдоль которых действуют эти напряжения. Эти линии называют траекториями главных напряжений. Впервые исследования в этом направлении проведены в 1870-1876г.г. Н.А.Белелюбским. На рис.15.25 приведена схема железобетонной балки, трактории главного напряжения σ_{max} и вариант армирования.

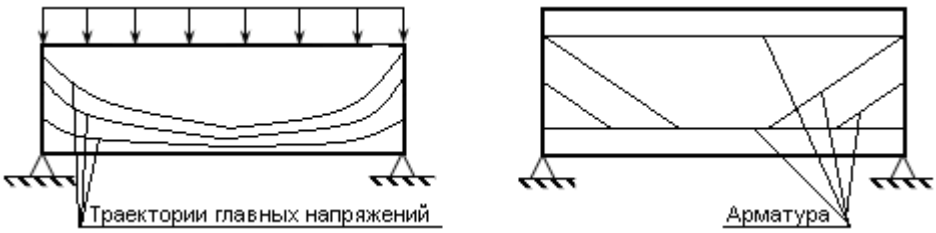


Рис.15.25

4. Расчет по III и IV теориям прочности.

Балки из пластических материалов, имеющих одинаковые пределы текучести при растяжении и сжатии, проверяют обычно по III или IV теориям прочности.

Согласно третьей теории условие прочности имеет вид:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} < 0.5[\sigma]. \qquad (15.27)$$

Это условие называется условием прочности балки по третьей теории прочности

Аналогично можно записать условие прочности по четвертой теории:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} < [\sigma]. \qquad (15.28)$$

Примечания:

1. Обычно левую часть неравенства (15.28) обозначают через σ_{eff}:

$$\sigma_{eff} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

2. При проверке по **III** или **IV** теориям также, как и при проверке по **I** теории, необходимо строить эпюры σ_{eff} и τ_{max} по высоте балки аналогично тому, как это представлено на рис.15.24 для σ_{max}.

3. Для стандартных двутавров в большинстве случаев τ_{max} и σ_{eff} достигают наибольшего значения в точке стыка стенок.

4. Видно, что при расчете балок **III** теория дает больший запас прочности по сравнению с четвертой (до 15%). Однако, как было отмечено ранее, для стали с экспериментом лучше коррелирует **IV** теория.

16. РАСЧЕТ БАЛКИ НА ЖЕСТКОСТЬ

Балка называется жесткой, если для заданных (рабочих, проектных) нагрузок она прогибается в пределах нормы (норму устанавливает заказчик). Введем следующую терминологию:

CD – пролет, *BC* – консоль (левая), *DH* – консоль (правая)

Часто в строительстве принимаются следующие условия:

В пролете прогиб должен быть $\leq \dfrac{l^{пролета}}{300}$ (16.1)

На консоли прогиб должен быть $\leq \dfrac{l^{консоли}}{150}$

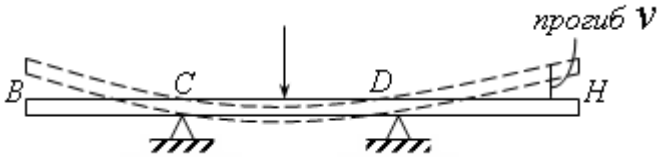


Рис. 16.1

<u>Обозначение</u>: Прогиб принято обозначать буквой v

Основная трудность проверки жесткости - это вычисление прогибов. Методов их вычисления достаточно много, ниже рассмотрим два из них.

16.1. Формула Мора для вычисления прогиба

Пусть необходимо найти прогиб точки *B,* т.е. перемещение v_B.(рис.16.2)

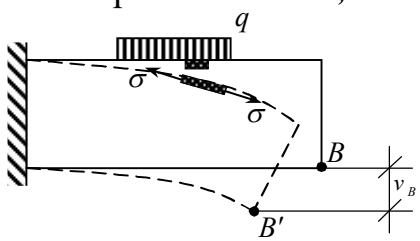


Рис. 16.2

Для решения задачи применим закон сохранения энергии в варианте **принципа возможных перемещений**. В качестве возможных выберем прогиб $v^{(q)}$ (здесь и далее величины, характеризующие основную задачу, т.е задачу об изгибе балки под действием рабочих нагрузок, будут снабжаться индексом *q*).

Рассмотрим далее фиктивную задачу (рис.16.3)

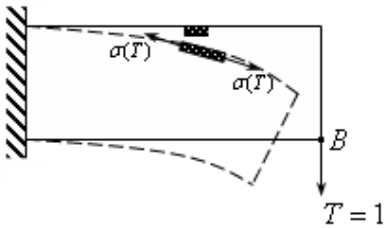


Рис. 16.3

Вычислим работу силы T на перемещении v_B:

$$U = T \cdot v_B .$$

Согласно закону сохранения энергии эта работа должна равняться работе внутренних сил, вызванных силой *T,* на перемещениях, вызванных рабочими нагрузками. Подсчитаем её, обозначив через *W*.

Рассмотрим рис.16.2 и рис.16.3. Выделим малый элемент балки (он зачернен на рис 16.2 и рис.16.3). Он удлиняется на величину $\Delta^{(q)}$.

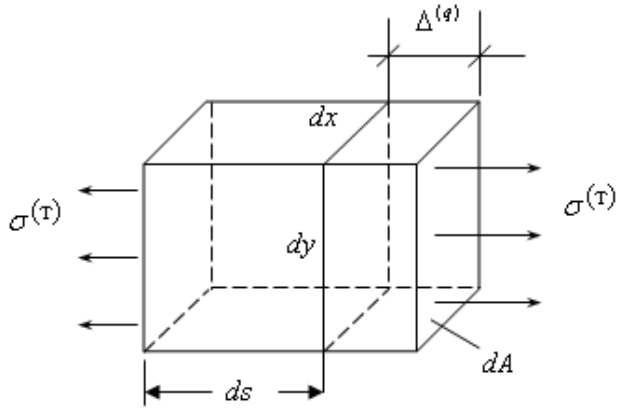


Рис. 16.4

Рассмотрим этот же малый элемент под действием напряжений растяжения $\sigma^{(T)}$ (здесь и далее величины, характеризующие фиктивную задачу, будут снабжаться индексом *T*), которые возникают, под действием силы *T*. Вычислим dW - работу этих напряжений на перемещении $\Delta^{(q)}$:

$$dW = dN^{(T)} \cdot \Delta^{(q)} .$$

Согласно определению:

$$\varepsilon^{(q)} = \frac{\Delta^{(q)}}{ds} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta^{(q)} = \varepsilon^{(q)} ds$$

$$dN^{(T)} = \sigma^{(T)} \cdot dA .$$

Таким образом,

$$dW = \sigma^{(T)} \varepsilon^{(q)} dA \cdot ds .$$

Работа по удлинению всех элементов балки будет:

$$W = \sum dW = \int_0^l ds \int_A \sigma^{(T)} \varepsilon^{(q)} dA .$$

По формуле Навье имеем:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(T)} = -\frac{M_x^{(T)}}{J_x} \cdot y .$$

По закону Гука:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(q)} = \frac{\boldsymbol{\sigma}^{(q)}}{E} = -\frac{M_x^{(q)}}{E \cdot J_x} \cdot y .$$

Отсюда:

$$W=\int_0^l ds\int_A \frac{M_x^{(T)}M_x^{(q)}}{EJ_x^2}y^2dA=\frac{1}{EJ_x^2}\int_0^l dsM_x^{(T)}M_x^{(q)}\underbrace{\int_A y^2dA}_{J_x}=\frac{J_x}{EJ_x^2}\int_0^l M_x^{(T)}M_x^{(q)}ds\,.$$

Запишем закон сохранения энергии:

$$U=W\,.$$

Отсюда вытекает формула Мора:

$$\boxed{Tv_B=\frac{1}{EJ_x}\int_0^l M_x^{(T)}M_x^{(q)}ds\,.} \qquad (16.2)$$

Перечислим использованные обозначения.

v_B - искомый прогиб в точке B (от рабочих нагрузок);

T =1 – единичная сила, приложенная в интересующем нас направлении искомого прогиба v_B в интересующей нас точке B.

$M_x^{(T)}$ - изгибающий момент в фиктивной задаче о приложении к балке силы T в точке B.

$M_x^{(q)}$ - изгибающий момент от рабочих нагрузок.

Еще раз напомним, что физический смысл формулы Мора заключается в том, что работа силы T на искомом перемещении v_B равна работе внутренних сил, вызванных этой силой, на деформациях от внешних сил.

Примечания.

1. Для удобства вычислении обычно принимают, что $T=1$.
2. Работой касательных напряжений обычно пренебрегают ввиду ее малости по сравнению с W.
3. При необходимости вычисления угла наклона балки α вместо единичной фиктивной силы T необходимо прикладывать единичный момент $m=1$ в интересующей нас точке. Формула Мора примет вид

$$\boxed{m\alpha_B=\frac{1}{EJ_x}\int_0^l M_x^{(m)}M_x^{(q)}ds\,.}$$

16.1.1 Методы вычисления интегралов. Формулы трапеций и Симпсона

Для приближенного вычисления интегралов существует много разных методов. Пусть надо найти:

$$I=\int_n^m y(x)\cdot dx=?$$

Для вычисления интеграла Мора часто используют метод Верещагина. Однако более удобными являются приближенные методы.

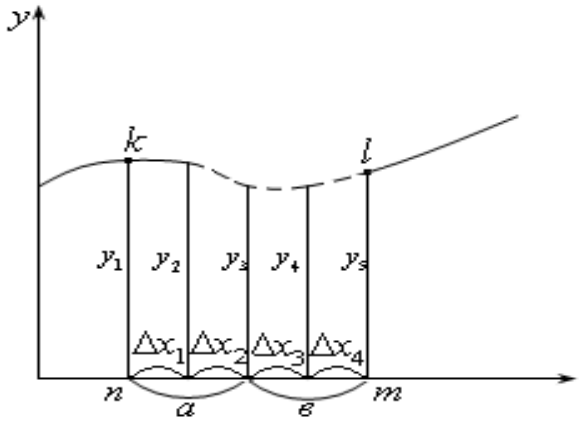


Рис. 16.5

<u>Формула трапеций</u>

Разобьем интервал $[n,m]$ на малые интервалы (например, на рис.16.5. их четыре). Поскольку по геометрическому смыслу интеграл представляет собой площадь фигуры *mnkl,* то *C* можно вычислить приближенно, представив ее в виде суммы площадей четырех трапеций:

$$I \approx \frac{y_1+y_2}{2}\cdot\Delta x_1+\frac{y_2+y_3}{2}\cdot\Delta x_2+\frac{y_3+y_4}{2}\cdot\Delta x_3+\frac{y_4+y_5}{2}\cdot\Delta x_4 . \qquad (16.3)$$

<u>Формула Симпсона</u>

Формула Симпсона намного точнее формулы трапеций (хотя может показаться менее удобной). Она имеет вид:

$$I \approx \frac{a}{6}\left[y_1+4\cdot y_2+y_3\right]+\frac{в}{6}\left[y_3+4\cdot y_4+y_5\right]. \qquad (16.4)$$

При этом в отличие от метода трапеций, отрезок *a* должен разбиваться на равные интервалы $\Delta x_1=\Delta x_2$. Аналогично, должно быть $\Delta x_3=\Delta x_4$

<u>*Примечание.*</u> Для прикидочных грубых оценок можно использовать формулу:

$$I \approx \frac{a+в}{6}\left[y_1+4\cdot y_3+y_5\right].$$

16.2. Вычисление прогибов на основе решения дифференциального уравнения изогнутой оси балки

Прогибы можно находить и другими способами, например, на основе решения дифференциального уравнения изогнутой оси балки. Для вывода этого уравнения, рассмотрим элемент балки (рис.16.6).

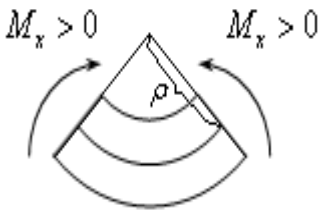


Рис. 16.6

Ясно, что чем больше M_x, тем больше кривизна $\frac{1}{\rho}$ изогнутой оси балки.

Эту фразу можно записать в виде:

$$\frac{1}{\rho} = k \cdot M_x . \qquad (16.5)$$

Выразим кривизну через прогиб. Согласно формулам математического анализа:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{v''}{\left[1 + (v')^2\right]^{3/2}} .$$

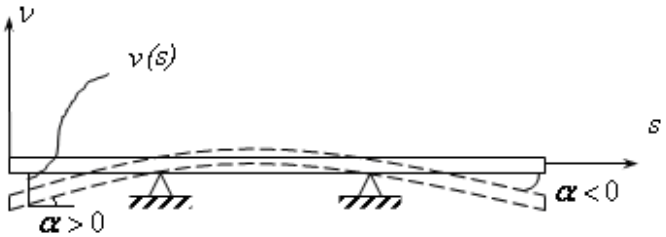


Рис.16.7

По геометрическому смыслу производная - это тангенс угла наклона кривой (рис16.7):

$$v' = tg\alpha .$$

Ввиду малости угла α можно записать:

$$tg\alpha \approx \alpha \approx v' << 1 .$$

Тогда:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{v''}{\left[1 + (v')^2\right]^{3/2}} \approx v'' = k \cdot M_x . \qquad (16.6)$$

Очевидно, что k зависит от геометрии сечения и материала балки. Найдем эту зависимость.

Рассмотрим малый элемент балки длины ds (рис. 16.8). После изгиба он превратится в изогнутый элемент. Длина волокна *BC*, которое проходит через центр тяжести сечения, не изменяется и будет равна ds. Нижнее волокно *DH* удлиняется на величину, которое обозначим через Δ.

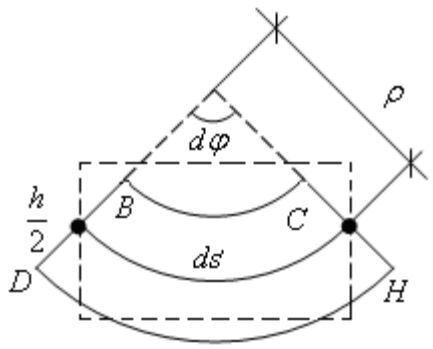


Рис.16.8

Вычисляем Δ, учитывая, что $y_D = -\frac{h}{2}$. Согласно определению

$$\Delta = \varepsilon_{DH} \cdot ds .$$

Используя закон Гука и формулу Навье получаем

$$\Delta = \varepsilon_{DH} ds = \left(\frac{\sigma_{DH}}{E}\right) ds = -\frac{M_x}{EJ_x} y_D ds = \frac{M_x}{EJ_x} \frac{h}{2} ds . \qquad (16.7)$$

Вычислим Δ теперь по другому - через угол $d\varphi$ (рис.16.8). Из геометрии известна формула для вычисления длины дуги:

$$ds = \rho \cdot d\varphi .$$

Тогда

$$\Delta = DH - BC = (\rho + h/2) d\varphi - \rho d\varphi = \frac{h}{2} \frac{ds}{\rho} . \qquad (16.8)$$

Приравниваем (16.7) и (16.8):

$$\frac{h}{2} \frac{ds}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x} \frac{h}{2} ds .$$

Отсюда получаем:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot J_x} .$$

Учитываем, что согласно (16.6):

$$\frac{1}{\rho} \approx v''$$

Окончательно получаем:

$$\boxed{v'' = \frac{M_x}{E \cdot J_x}} \qquad (16.9)$$

Это и есть **уравнение изогнутой оси балки**.

16.2.1. Решение дифференциального уравнения изогнутой оси балки

Если балка имеет постоянную толщину, то есть $J_x = const$, то решение легко записывается в общем виде:

$$v' = \frac{1}{EJ_x}\int M_x ds + C, \qquad (16.10)$$

$$v = \frac{1}{EJ_x}\int ds \int M_x ds + Cs + D. \qquad (16.11)$$

Хотя решение получено в общем виде, однако основная трудность заключается в определении M_x и констант C и D, поскольку на разных участках балки M_x разные, а значит C и D также разные (в частности, если балка имеет три участка, то нужно определить 6 констант).

Однако существует способ интегрирования, который сводит все неизвестные только к двум константам (разработан Клебшом)

16.2.2. Правила Клебша

Правила Клебша (Alfred Clebsch) сводятся к следующему.

1) M_x выражаем через внешние силы, которые лежат только слева (или только справа) от сечения.

2) Если погонная сила q не доходит до правого конца, то ее доводим до этого правого конца и уравновешиваем ее снизу (рис.16.9).

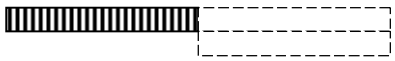


Рис.16.9

3) Если имеется сосредоточенный момент m_o, то его вклад в изгибающий момент записываем в виде $m_0(s-a)^0$, где a - расстояние до момента m_o.

4) Интегрируем, не раскрывая скобок.

При выполнении этих условий все константы *C* на разных участках будут одинаковы. **Аналогично будут одинаковы все константы *D***.

Справедливость этого утверждения доказывается непосредственной проверкой, то есть подстановкой решения в условия стыковки решения на границе участков. Рассмотрим, например, случай, приведенный на рис.16.10.

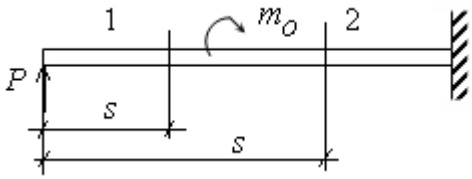


рис16.10

По правилам Клебша момент M_x на участках (I), (II) запишем в виде:

(I): $M_x = P \cdot s$

(II): $M_x = P \cdot s + m_0(s-a)^0$

Дифференциальные уравнения на участках:

(I) $v'' = \dfrac{P \cdot s}{EJ_x}$

(II) $v'' = \dfrac{P \cdot s}{EJ_x} + \dfrac{m(s-a)^0}{EJ_x}$

Решение этих уравнений на участках (1), (2) имеет вид:

Участок (I): $v' = \dfrac{P \cdot s^2}{2EJ_x} + C, \quad v = \dfrac{P \cdot s^3}{6EJ_x} + Cs + D.$

Участок (II): $v' = \dfrac{P \cdot s^2}{2EJ_x} + \dfrac{m(s-a)}{EJ_x} + C, \qquad v = \dfrac{P \cdot s^3}{6EJ_x} + \dfrac{m(s-a)^2}{2EJ_x} + Cs + D.$

Отсюда видно, что при $s = a$ получим равенство углов наклона и прогибов, вычисленных по разным формулам при любых C и D, т.е. условия гладкости изогнутой оси выполняются. Аналогично проверяются условия гладкости на границе участка, на которой заканчивается погонная сила q.

16.2.3 Условия для определения *C* и *D*

1) **<u>Первый случай .</u>** Рассмотрим балку, лежащую на двух опорах (см. рис.16.11).

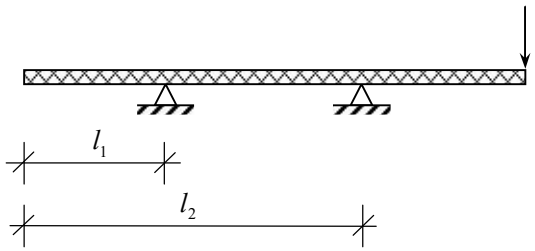


Рис. 16.11

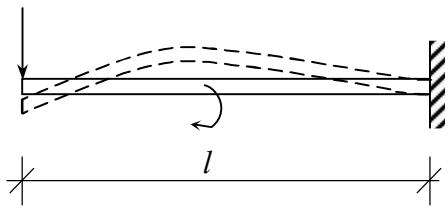


Рис. 16.12

Из схемы видно, что

$$\begin{cases} v(l_1) = 0 \\ v(l_2) = 0 \end{cases} \tag{16.13}$$

Таким образом из (16.13), получаем систему уравнений для C и D.

2) <u>Второй случай</u>. Пусть балка заделана на расстоянии l (консольная балка, см. рис.16.12).

В заделке не может появиться наклона оси, поэтому там не только нет прогиба, но и $v' = 0$.

Таким образом, из схемы следует, что:

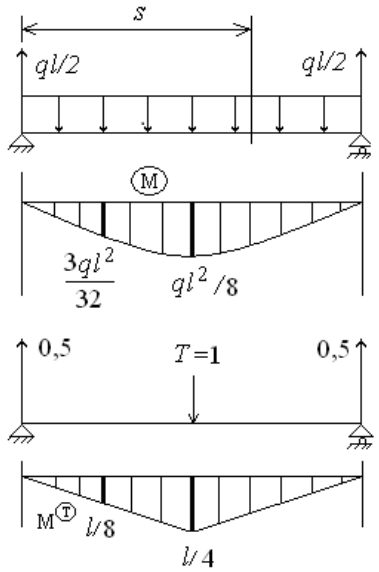
$$\begin{cases} v(l) = 0 \\ v'(l) = 0 \end{cases} \tag{16.14}$$

Опять получили два уравнения для C и D.

Пример вычисления прогиба

Пусть необходимо вычислить прогиб в центре балки длины l, загруженной погонной силой q. Решим эту задачу двумя способами.

Ввиду симметричности схемы можно сразу найти реактивные силы – они будут равны $ql/2$. Тогда изгибающий момент в сечении на расстоянии s от левой опоры будет равен $M_x = q\left(\frac{l}{2}\right)s - q\frac{s^2}{2}$



Первый способ. Использование дифференциального уравнения изогнутой оси балки.

$$EJ_x v'' = q\left(\frac{l}{2}\right)s - q\frac{s^2}{2}$$

Интегрируем 2 раза:

$$EJ_x v' = q\frac{l}{2}\cdot\frac{s^2}{2} - q\frac{s^3}{6} + C$$

$$EJ_x v = q\frac{l}{2}\cdot\frac{s^3}{6} - q\frac{s^4}{24} + Cs + D$$

Константы интегрирования находим из условий закрепления:

$$v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad q\frac{0^4}{12} - \frac{q\cdot 0^4}{24} + C\cdot 0 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0.$$

$$v(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad q\frac{l^4}{12} - \frac{ql^4}{24} + Cl = 0 \qquad \Rightarrow \quad C = -\frac{ql^4}{24}$$

Находим прогиб в центре балки (при $s = l/2$):

$$EJ_x v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{4/ql^4}{12\cdot 8} - \frac{ql^4}{24\cdot 16} - \frac{8/ql^4}{24}\cdot\frac{1}{2} = ql^4\frac{5}{384} = \boxed{0{,}01302ql^4}$$

Второй способ. Использование интеграла Мора

Прогиб в центре балки находим по формуле $EJ_x v = \int_0^l M_x M_x^{(T)} ds$.

Нарисуем эпюру изгибающих моментов $M_x^{(T)}$ от единичной силы T=1 (см. рис. 16.13).

Рассмотрим различные приближенные методы интегрирования.

1. Метод трапеций по 2-м участкам.

$$EJ_x v = (0 + \frac{ql^2/8\cdot l/4}{2})\cdot\frac{l}{2} + (\frac{ql^2/8\cdot l/4}{2} + 0)\cdot\frac{l}{2} = \frac{ql^4}{64} = \boxed{0{,}0156ql^4}.$$

Метод дал ошибку в 17%

2. Метод трапеций по 4-м участкам.

$$EJ_x v = \left[\frac{1}{2}\cdot\left(0 + \frac{3}{32}ql^2\cdot\frac{l}{8}\right)\frac{l}{4} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{32}ql^2\cdot\frac{l}{8} + \frac{ql^2}{8}\frac{l}{4}\right)\cdot\frac{l}{4}\right]2 = \frac{3+3+8}{128\cdot 8}ql^4 = 0{,}01367ql^4.$$

Метод дал ошибку в 5%.

3. Метод Симпсона по 2-м участкам.

$$EJ_x v = 2\left(0 + 4\cdot\frac{3}{32}ql^2\cdot\frac{l}{8} + \frac{ql^2}{8}\cdot\frac{l}{4}\right)\frac{l}{6} = \boxed{\frac{5ql^4}{384}}.$$

Таким образом, метод Симпсона в этом примере дает точное решение.

16.2.4. Балки на упругом основании. Закон Винклера

Рассмотрим основание (грунт) Приложим к мерному стержню силу *P* (рис.16.14), тогда осадка стержня v, будет тем больше, чем больше сила *P*.

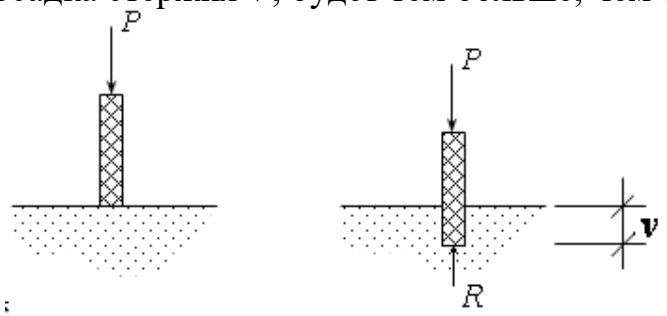


Рис.16.14

Запишем это утверждение аналитически:

$$P = k\cdot v.$$

Здесь k - называется коэффициентом постели. Эта зависимость называется ***законом Винклера***.

Согласно III-му закону Ньютона реакция грунта *R*=*P*. Приведем закон к виду, когда задаётся погонная сила *q* (см. рис.16.15).

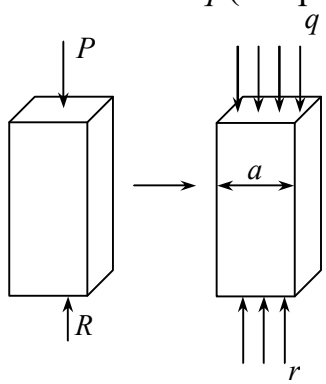


Рис.16.15

Ее равнодействующая должна быть равна *P,* т.е.

$$q\cdot a = P;$$

Отсюда

$$q\cdot a = k\cdot v; \qquad \Rightarrow \quad q = \frac{k}{a}\cdot v.$$

Обозначая $k' = \dfrac{k}{a}$ получим

$$\boxed{q = k' \cdot v}. \qquad (16.15)$$

Погонную реакцию грунта будем обозначать через r (см. рис 16.14). Тогда:

$$r = \frac{R}{a} = k' \cdot v. \qquad (16.16)$$

16.4. Уравнение изогнутой оси балки на упругом основании

Рассмотрим балку, которая лежит на грунте.

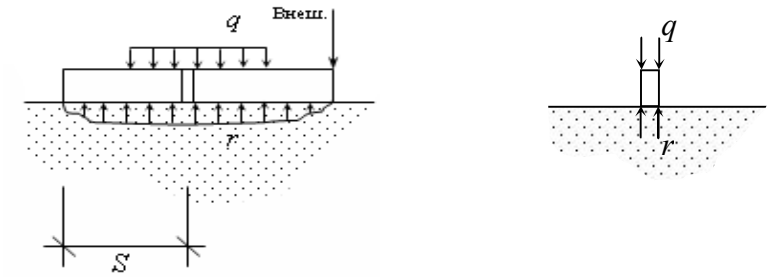


Рис.16.16

Такой моделью описывается поведение ленточных фундаментов, дорожных полотен, обшивок трехслойных панелей типа сэндвич.

Грунт противодействует внешним силам некоторой погонной силой r. Выразим ее через прогиб $v(s)$. Для этого вырежем малый элемент (см. рис.16.16). Сравнивая рис.16.14 и рис.16.16 видим, что элемент балки, фактически представляет собой мерный стержень, для которого реакция определяется по формуле (16.16), т.е. реакция балки с прогибом связана соотношением:

$$r = k' \cdot v.$$

Далее запишем уравнения равновесия элемента балки и уравнение ее изогнутой оси

$$\frac{\partial Q_y}{\partial s} = -q. \qquad (16.17)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial s} = Q_y. \qquad (16.18)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} = \frac{1}{EJ_x} M_x. \qquad (16.19)$$

Из рис.16.16 видно, что на балку действует две погонные силы: $q^{внешн}$ и r. Тогда получим:

$$\frac{\partial Q_y}{\partial s} = -q^{внеш} + r = -q^{внеш} - k'v. \qquad (16.20)$$

Здесь знак «-» перед $k' \cdot v$ поставлен потому, что осадка v элемента имеет отрицательный знак, а реакция должна быть противоположна погонной силе $q^{внешн}$.

Подставим (16.18) в (16.20):

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial s^2} = -q^{внешн} - k' \cdot v .$$

Подставляя сюда (16.19) получаем искомое уравнение:

$$\frac{\partial^4 v}{\partial s^4} = \frac{1}{EJ_x}(-q^{внеш} - k'v) . \qquad (16.21)$$

Решение запишем в виде суммы:

$$v = v_{одн} + v_{част} .$$

Простой подстановкой в (16.21) можно проверить, что решение имеет вид:

$$v = \frac{1}{EJ_x}\left[C_1 e^{\lambda s}\sin\lambda s + C_2 e^{\lambda s}\cos\lambda s + C_3 e^{-\lambda s}\sin\lambda s + C_4 e^{-\lambda s}\cos\lambda s\right] + B . \qquad (16.22)$$

Здесь $$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k'}{4EJ_x}} .$$

Частное решение находим, подставляя $v_{част} = B$ в уравнение (16.21):

$$\frac{\partial^4 B}{\partial s^4} = \frac{1}{EJ_x}(-q^{внеш} - k'B) \quad \Rightarrow \quad B = \frac{-q^{внеш}}{k'} .$$

Остальные константы получают из геометрических соображений (условий закрепления) и условий статики на концах балки.

16.5. Бесконечная балка на упругом основании

Этой моделью можно описать, например, поведение дорожного полотна с автомобилем веса P. Погонная сила $q^{внеш} = q_{веса}$ представляет собой погонный вес полотна. Мы можем общее решение представить как сумму решения 2-х задач: задачи о действии только силы веса $q_{веса}$ и задачи о действии только силы P. Здесь $v_{част} = B$ соответствует случаю когда, действует лишь $q_{веса}$.

Прогиб $v_{одн}$, который содержит, C_1, C_2, C_3, C_4, соответствует случаю $q^{внеш} = 0$, $P \neq 0$. Рассмотрим этот случай. Пусть s – расстояние от силы P до сечения. Слева и справа прогиб симметричный, поэтому исследуем прогиб v только справа, то есть, найдем функцию $v(s)$.

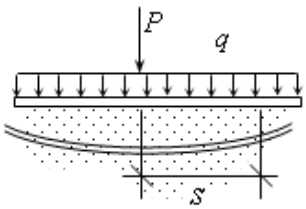


Рис.16.17

Для отыскания C_i учтем, что прогиб должен быть ограничен при любых s. Однако первые 2 слагаемых не ограничены, т.к.

$$e^{\lambda s} \to \infty \quad \text{при} \quad s \to \infty .$$

Отсюда вытекает, что должно быть $C_1 = C_2 = 0$.

Хотя для анализа решения можно и не искать C_3, C_4, найдем их для иллюстрации того, как находится выражение для прогиба.

В силу симметричности задачи под силой должно быть $|v_{\max}| = v(0)$. По теореме Ферма имеем соотношение:

$$v'(0) = 0 .$$

Подставляя сюда (16.22) получаем:

$$v' = \lambda e^{-\lambda s}\left[C_3 \sin\lambda s + C_4 \cos\lambda s\right]\Big|_{s=0} + \lambda e^{-\lambda s}\left[C_3 \cos\lambda s - C_4 \sin\lambda s\right]\Big|_{s=0} = 0 . \quad (16.23)$$

Отсюда:

$$-C_4 + C_3 = 0 \;\to\; C_4 = C_3 \;\to\; v = \frac{1}{EJ_x} C_3 e^{-\lambda s}\left[\sin\lambda s + \cos\lambda s\right]. \quad (16.24)$$

Следующее уравнение относительно C_3 получим из статических соображений. Виду симметричности задачи реакция основания справа (см. рис 16.18) известна: $R = P/2$.

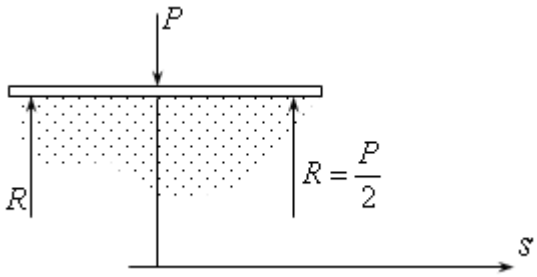


Рис.16.18

Как видно из рис.16.18, в сечении под силой (при $s = 0$) согласно определению поперечной силы:

$$Q_y = -R = -\frac{P}{2}. \quad (16.24)$$

Из уравнения (16.18) получим:

$$Q_y = \frac{\partial M_x}{\partial s} = EJ_x \frac{\partial^3 v}{\partial s^3} = 4\lambda^3 C_3 e^{-\lambda s} \cos(\lambda s). \quad (16.25)$$

Подставляя $s = 0$ находим из (16.24):

$$4 \cdot \lambda^3 \cdot C_3 = -P/2 .$$

Отсюда: $$C_3 = C_4 = -P/8\lambda^3 .$$

Итак:

$$v_{част} = -\frac{q}{k'}, \quad v_{одн} = -\frac{P}{8\lambda^3 EJ_x}\left[e^{-\lambda s}\sin\lambda s + e^{-\lambda s}\cos\lambda s\right].$$

<u>Анализ решения.</u>

Изобразим графически полученные решения. Если нет силы *P*, то согласно решению балка оседает как жесткое тело на величину $v_{част}$ (см.рис. 16.19).

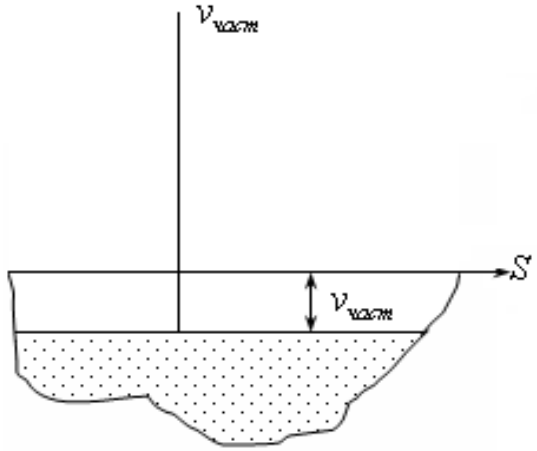


Рис.16.19

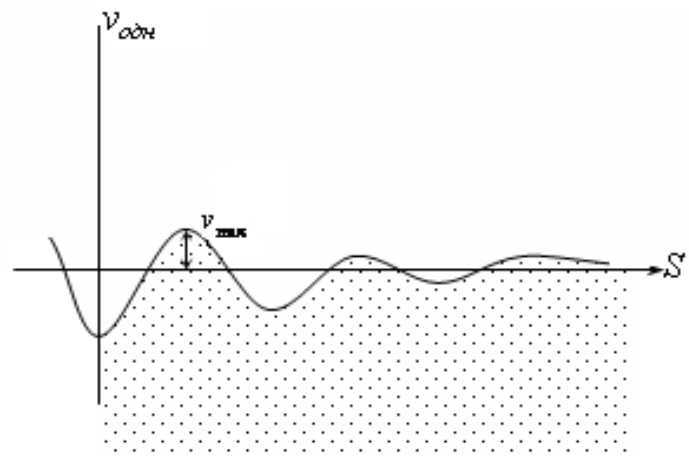


Рис.16.20

Если есть только сила P, то осадка имеет волнообразный, но затухающий характер, как это изображено на рис. 16.20. Видно, что при отсутствии силы веса под действием только силы *P* некоторые области балки приподнимаются над нулевым уровнем грунта.

Балка не будет приподниматься над первоначальным уровнем (т.е. $v_{\max}$ будет отрицательным) только тогда, когда:

$$|v_{част}| > v_{\max}.$$

Суммарная осадка балки для этого случая изображена на рис.16.21.

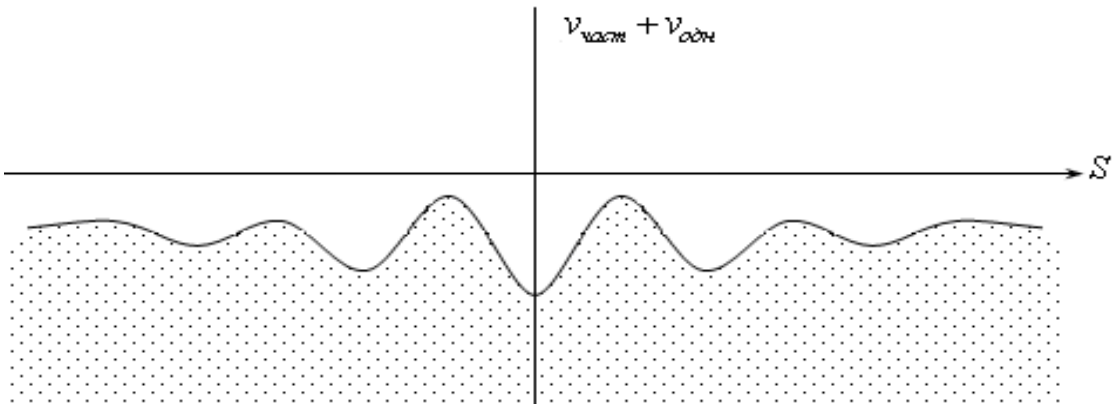


Рис.16.21

<u>Практические выводы из решения.</u> Для того чтобы фундамент или дорожное полотно, не отрывались от грунта под действием сосредоточенной силы необходимо, чтобы погонный вес фундамента или полотна был достаточно большой. Это означает, что толщина фундамента или дорожного полотна должна быть достаточно велика.

17. ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим сжатый стержень.

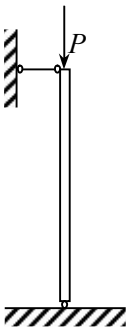


Рис.17.1

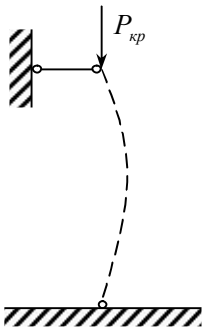


Рис.17.2

Пусть сила P приложена в центре тяжести сечения стержня. На первый взгляд у силы P нет плеча, значит $M_x = 0$, значит, для изгиба нет причин.

Это справедливо при малых P. Однако при некотором значении P происходит резкая смена прямолинейной формы в криволинейную при малейшем поперечном воздействии (см.рис.17.2).

Это явление называется <u>потерей устойчивости</u>.

Сила P, при которой это происходит, называется <u>*критической*</u>, а соответствующее ей напряжение называют <u>*критическим напряжением:*</u>

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{A}.$$

Опыт показывает, что для потери устойчивости стержня требуется меньшая сила, чем для разрушения сжатием, например, кубика из того же материала. Таким образом:

$$\frac{P_{кр}}{P^*} < 1, \quad \frac{P_{кр}/A}{P^*/A} = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma^*} < 1.$$

здесь P^* - разрушающая сила, σ^* - предел прочности на сжатие.

Уменьшая критическое напряжение $\sigma_{кр}$ на коэффициент запаса $k_{уст}$ получают допустимое напряжение $[\sigma]_{уст}$, больше которого не должно быть рабочее напряжение:

$$|\sigma| \le [\sigma]_{уст}.$$

Для удобства расчетов часто пользуются таблицами, в которых приводится коэффициент φ, показывающий, насколько $[\sigma]_{уст}$ меньше основного допустимого напряжения $[\sigma]$:

$$\varphi = [\sigma]_{уст} / [\sigma].$$

Если на растяжение и сжатие разрушающие напряжения различны, то под φ понимают величину:

$$\varphi = [\sigma]_{уст} / [\sigma]_{сж}.$$

17.1 Формула Эйлера

Впервые формулу для вычисления $P_{кр}$ вывел Л. Эйлер.

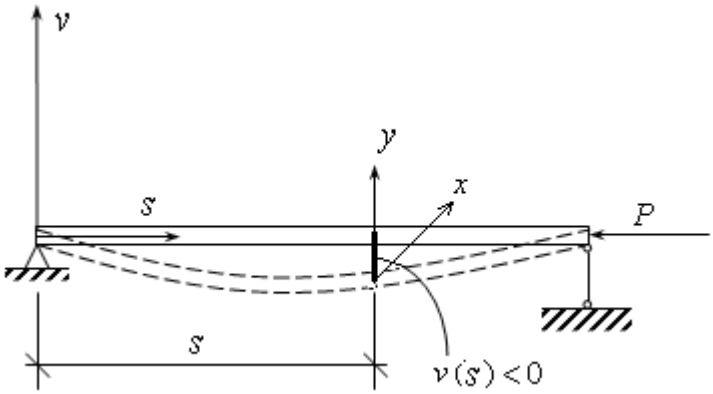


Рис.17.3

Рассмотрим балку, потерявшую устойчивость, т.е. $P = P_{кр}$ (см. рис.17.3).

Изгиб здесь имеет место под действием момента $M_X = -P_{кр} \cdot v$, где v – прогиб. Для отыскания $P_{кр}$ используем уравнение изогнутой оси балки:

$$EJ_x v'' = M_X = -P_{кр} \cdot v \qquad (17.1)$$

Деля на EJ_x находим

$$v'' = -\frac{P_{кр}}{EJ_x} v .$$

Получили дифференциальное уравнение для v. Обозначим

$$a^2 = \frac{P_{кр}}{EJ_x} .$$

Тогда

$$v'' = -a^2 \cdot v \qquad (17.2)$$

Решение этого уравнения можно записать в виде:

$$v = B \cdot Sin\, as + C \cdot Cos\, as \qquad (17.3)$$

Действительно, легко проверить, что после подстановки (17.3) в (17.2) слева получиться то же самое, что и справа.

Константы *B* и *C* отыскиваем из условий закрепления:

(1): $s = 0, v = 0$ на левом краю

(2): $s = l, v = 0$ на правом краю

Это дает:

(1): $0 = B \cdot Sin\ 0 + C\ Cos\ 0$ на левом краю

(2): $0 = B \cdot Sin\ al + C\ Cos\ al$ на правом краю

Отсюда

(1): $\Rightarrow C = 0$

(2): *или* $B = 0,$ *или* $Sin\, al = 0$

При $B = 0$: $v = 0$, значит прогиба нет, т.е. нет потери устойчивости. Поскольку это противоречит исходному предположению, то рассмотрим уравнение

$$Sin\, al = 0\,.$$

Оно имеет следующие решения:

$$1)\, al = 0, \quad 2)\, al = \pi, \quad 3)\, al = 2\pi \;\ldots\ldots, \tag{17.4}$$

где $$a = \sqrt{\frac{P_{кр}}{EJ_x}}\,.$$

Рассмотрим решения (17.4).

1) $\sqrt{\frac{P_{кр}}{EJ_x}} \cdot l = 0\,;\; l \neq 0 \;\Rightarrow\; P_{кр} = 0$ - это решение не подходит, т.к. стержень не изогнется без нагрузки.

2) $\sqrt{\frac{P_{кр}}{EJ_x}} \cdot l = \pi\,; \;\Rightarrow\; P_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot EJ_x}{l^2}\,.$

3) $\sqrt{\frac{P_{кр}}{EJ_x}} \cdot l = 2\pi\,; \;\Rightarrow\; P_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot 4 \cdot EJ_x}{l^2}\,.$

Второе решение дает: $v = B \cdot Sin \frac{\pi}{l} s$ (см. рис. 17.4)

Третье решение дает: $v = B \cdot Sin \frac{2\pi}{l} s$ (см. рис. 17.5)

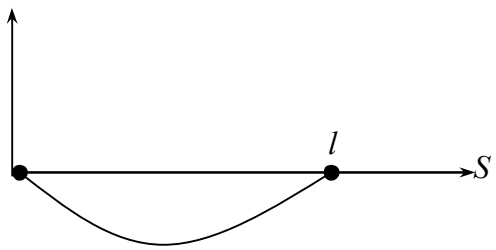


Рис. 17.4

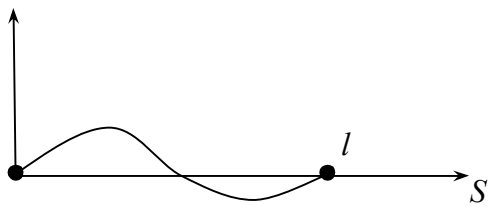


Рис. 17.5

Ясно, что при $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_x}{l}$ уже произойдет изгиб, и дальнейшее повышение нагрузки невозможно, т.е. до величины $P_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot 4 \cdot EJ_x}{l^2}$ нагрузка P увеличиться не может. Аналогично и для других решений (17.4). Таким образом, получим что:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_x}{l^2}\,. \tag{17.5}$$

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 E J_x}{A l^2}. \qquad (17.6)$$

Мы рассмотрели изгиб в плоскости листа, аналогично можно рассмотреть изгиб из листа, тогда получим:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E J_y}{A l^2}. \qquad (17.7)$$

Очевидно, что изгиб произойдет в той плоскости, которая требует меньшее значение $\sigma_{кр}$. Видно, что $\sigma_{кр}$ в (17.6) и (17.7) отличаются только моментом инерции. Таким образом, нужно взять тот случай, в котором момент инерции меньше:

$$\boxed{\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{A l^2}}. \qquad (17.8)$$

Известно, что момент инерции достигает наименьшего значения относительно одной из главных центральных осей. Следовательно, для вычисления $\sigma_{кр}$ необходимо найти главные центральные оси и главные моменты, а затем выбрать из них наименьшее.

Отметим **особенности** применения формулы (17.8)

1) Здесь предполагалось, что в обеих плоскостях опоры - шарнирные.

2) При выводе формулы предполагалось, что стержень упругий и соблюдается закон Гука, поскольку уравнение изогнутой оси балки получено при условии, что стержень линейно упругий. Следовательно, формула верна только тогда, когда справедлив закон Гука.

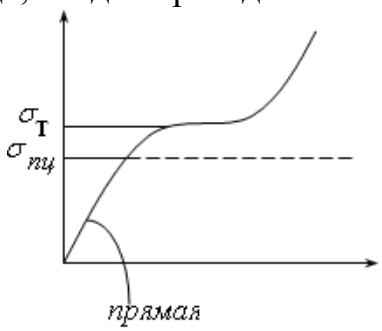


Рис. 17.6

Таким образом, формула Эйлера справедлива только тогда, когда:

$$\boxed{\sigma_{кр} \le \sigma_{пц}}. \qquad (17.9)$$

Примечание. Вывод формулы Эйлера можно провести и из других соображений, а именно из закона сохранения энергии, полагая что $W = Э$, где

$$Э = \frac{1}{2}\int_V \sigma \cdot \varepsilon \cdot dV = \frac{1}{2}\int \left(-\frac{M_x}{J_x} y\right) \cdot \frac{1}{E} \cdot \left(-\frac{M_x}{J_x} y\right) dV, \qquad W = P_{кр} \cdot \Delta,$$

где Δ - перемещение точки приложения силы вдоль оси стержня.

17.2 Другие условия закрепления

Рассмотрим случай консольной балки:

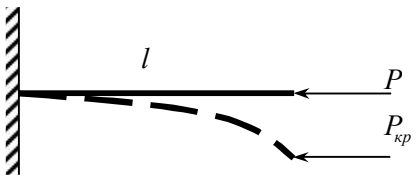


Рис. 17.7

Будем пользоваться геометрической аналогией. Эта задача аналогична приведенной ниже:

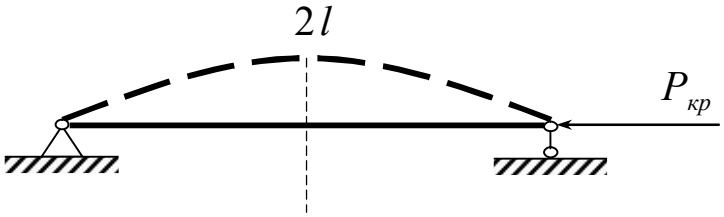


Рис. 17.8

Правая её половина точно такая же, как балка, рассматриваемая на рис.17.7, следовательно:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(2l)^2}.$$

Рассмотрим теперь случай защемления с двух концов:

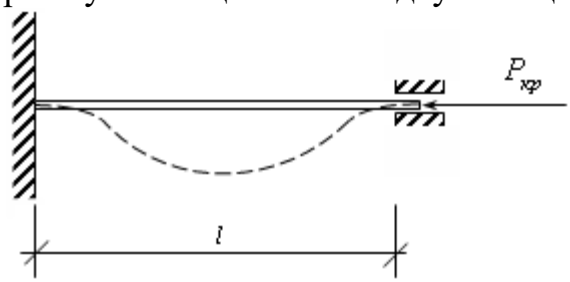


Рис. 17.9

Здесь только половина балки (её средняя часть) изгибается как шарнирная (см. рис.17.10):

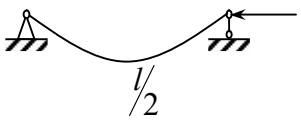


Рис. 17.10

Таким образом:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(l/2)^2}.$$

Введем параметр ***n*** – число полуволн, которые образуются при продольном изгибе балки, тогда получим:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(l/n)^2}.$$

Пользуясь этой аналогией, получим еще одну (приближенную) формулу для случая, изображенного на рис. 17.11:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(0.7l)^2}.$$

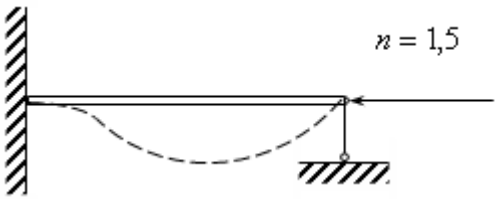


Рис. 17.11

В расчетной практике вместо ***n*** используют - <u>коэффициент приведенной длины</u> μ :

$$\mu = \frac{1}{n}.$$

Запишем формулу Эйлера с помощью нового обозначения:

$$\boxed{\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu l)^2 A}}. \qquad (17.10)$$

Кроме того, в теории устойчивости вводят параметр:

$$\boxed{\lambda^2 = \frac{(\mu l)^2 A}{J_{\min}}}. \qquad (17.11)$$

Здесь λ - безразмерная величина, являющаяся ***относительной длиной***, называется **<u>гибкостью</u>**.

Для корня $\sqrt{\frac{A}{J_x}}$ вводят специальное обозначение:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}}. \qquad (17.12)$$

Аналогично,

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}\,. \qquad (17.13)$$

Величины i_x, i_y - называются **радиусами инерции** сечения.

В новых обозначениях получим:

$$\boxed{\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}}. \qquad (17.14)$$

Это наиболее употребительный вид формулы Эйлера.

17.3 Предельная гибкость. Длинный стержень

Рассмотрим условие применимости формулы Эйлера (17.9):

$$\sigma_{кр} \le \sigma_{пц}\,.$$

Подставим сюда (17.14): $\dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_{пц}\,.$

Отсюда: $\dfrac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}} \le \lambda^2\,.$

Или: $\lambda \ge \pi\sqrt{\dfrac{E}{\sigma_{пц}}}\,.$

Обозначим правую часть через:

$$\lambda_* = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}\,.$$

Таким образом, формула Эйлера применима, если:

$$\boxed{\lambda \ge \lambda_*}$$

То есть, если условная длина достаточно большая, то формула Эйлера применима. Поэтому такие стержни называют <u>длинными</u>.

17.4 Формула Ясинского

Он изучил более 2000 экспериментов и показал, что если $\lambda < \lambda_*$, то $\sigma_{кр}$ можно вычислять по формуле:

$$\boxed{\sigma_{кр} = a - b\lambda}$$

Это и есть **формула Ясинского**.

Здесь *a* и *b* константы материала. Например, для стали:

$$a = 2,66\,T/см^2 = 26,6\,kH/см^2$$
$$b = 0,0066\,T/см^2 = 0,066\,kH/см^2$$

Кроме того, для стали предел текучести

$$\boldsymbol{\sigma}_T = 2,4\,T/см^2 = 24\,kH/см^2\ .$$

Из формулы Ясинского видно, что если λ очень мал, то

$$\boldsymbol{\sigma}_{кр} \approx 2,66\,T/см^2 > \boldsymbol{\sigma}_T\,.$$

Это означает, что для изгиба стержня-образца требуется больше усилий, чем для того, чтобы сплющить этот образец. Поэтому формула Ясинского справедлива только тогда, когда:

$$\boxed{a - b\lambda \le \sigma_T}$$

Это условие применимости формулы Ясинского.

Отсюда $-b\boldsymbol{\lambda} \le \boldsymbol{\sigma}_T - a$, или

$$\boldsymbol{\lambda} \ge \frac{a - \boldsymbol{\sigma}_T}{b}.$$

Если $\frac{a-\sigma_T}{b} \le \lambda \le \lambda_*$, то этот стержень называют стержнем ***средней длины***.

Если же: $\boldsymbol{\lambda} < \frac{a - \boldsymbol{\sigma}_T}{b}$, то стержень называют ***коротким***:

17.5 Продольно-поперечный изгиб

Снова рассмотрим изгиб балки под действием продольной центральной силы *P*, но предварительно изогнутой в поперечном направлении приложенными по концам сосредоточенными моментами *m* (см. рис. 17.12). Этот момент может быть вызван внецентренным нагружением продольной силой *P,* если он имеет эксцентриситет *e.* Тогда *m=Pe.*

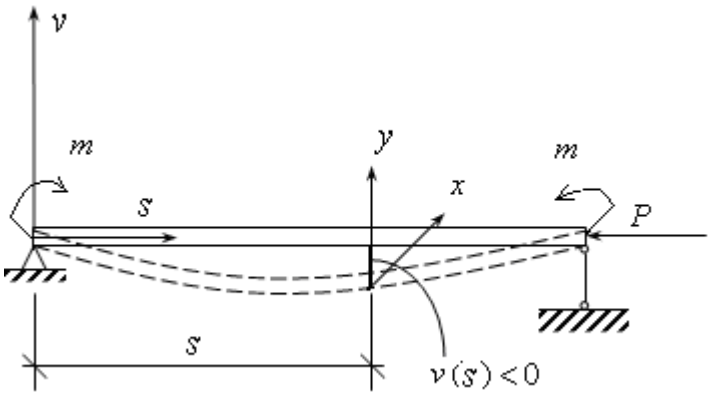


Рис. 17.12

Уравнение изогнутой оси (17.1) примет вид

$$EJ_x v'' = -P \cdot v + m .$$

Поделив на EJ_x и принимая уже использованное выше обозначение $a = \sqrt{\dfrac{P}{EJ_x}}$,

решение этого уравнения запишем в виде суммы однородного и частного решений

$$v = B \cdot Sin\, as + C \cdot Cos\, as + m / P .$$

Как и при выводе формулы Эйлера, константы *B* и *C* отыскиваем из условий закрепления:

(1): $s = 0, v = 0$ на левом краю

(2): $s = l, v = 0$ на правом краю

Это дает:

(1): $0 = B \cdot Sin\, 0 + C\, Cos\, 0 + m / P$ на левом краю

(2): $0 = B \cdot Sin\, al + C\, Cos\, al + m / P$ на правом краю

Отсюда

(1): $C = -m / P$

(2): $B = -(m / P) \cdot (1 - cos\, al) / sin\, al = -(m / P) \cdot 2 \sin^2 (al / 2) / sin\, al$

При $P = P_{кр} = \dfrac{\pi^2 EJ_x}{l^2}$, то есть при $a = \sqrt{\dfrac{P_{кр}}{EJ_x}} = \dfrac{\pi}{l}$, имеем $sin\, al = 0$.

Тогда из выражения для B вытекает, что

$$B \to -\infty .$$

Следовательно, при $P \to P_{кр}$ получаем неограниченно большие прогибы:

$$v = -\infty \cdot sin\, as - m / P \cdot Cos\, as + m / P .$$

Таким образом, при внецентренном сжатии или при наличии поперечных сил балка может получить очень большие прогибы даже при малых сжимающих силах, но близких к $P_{кр}$.

18. КРУЧЕНИЕ ВАЛОВ

18.1. Кручение круглых валов

Брусья круглого сечения, которые в конструкциях работают на кручение, часто называют валами. Примером закрученных брусьев являются, например, стойки рекламных щитов (рис.18.1).

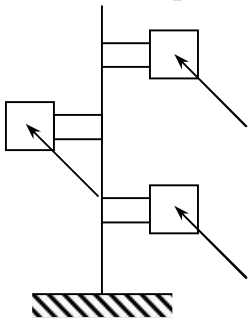


Рис.18.1.

Возникают 2 задачи:

1. Проверка прочности валов (т.е. не возникнет ли опасности разрушения вала при заданных нагрузках).
2. Проверка жесткости валов (т.е. не слишком ли он сильно деформируется при заданных нагрузках).

18.2. Напряжения в сечениях вала

Рассмотрим сечение I-I (см. рис.18.2). Считаем вал состоящим из двух частей - левой и правой. Левая часть действует на правую некоторым моментом (у нас это $M_z = m_1 - m_2$).

Определение. Суммарный момент, которым левая часть вала воздействует на првую (или наоборот), называется **крутящим моментом** (обозначается $M_{кр}$ или M_z). Это определение дает **правило вычисления** M_z**:** крутящий моментом равен сумме моментов, которые действует слева или справа от сечения.

Правило знаков для крутящих моментов. Хотя для прочностных расчетов знак крутящего момента не имеет значения, но для определенности его можно ввести таким же образом, как и в теоретической механике. А именно, вклад внешнего момента (например, m_3 на рис.18.2) в крутящий момент M_z положителен, если он действует справа и переводит ось «*x*» в ось «*y*» против часовой стрелки при условии, что мы смотрим с положительного конца оси *z*. Например, на первое сечение действует $M_z = -m_3$.

Рассечем теперь вал плоскостью *II-II* (рис.18.2). Тогда

$$M_z = m_2 - m_3 .$$

Можно подсчитать M_z по другому. Например, для второго сечения:

$$M_z = m_1$$

Здесь принят знак “– “ ввиду того, что на сечение мы смотрим не с конца стрелки z.

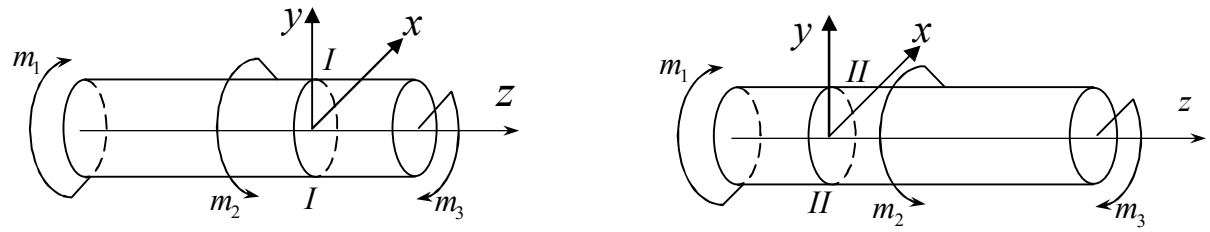


Рис.18.2

Это дает одно и то же, так как из условия равновесия вала следует, что:

$$m_1 = -m_3 + m_2 .$$

Закон распределения касательного напряжения

Поскольку правая часть воздействует на сечение *I-I* не в одной точке, а по всему сечению, то картина воздействия будет такая, как это изображено на рис.18.3.

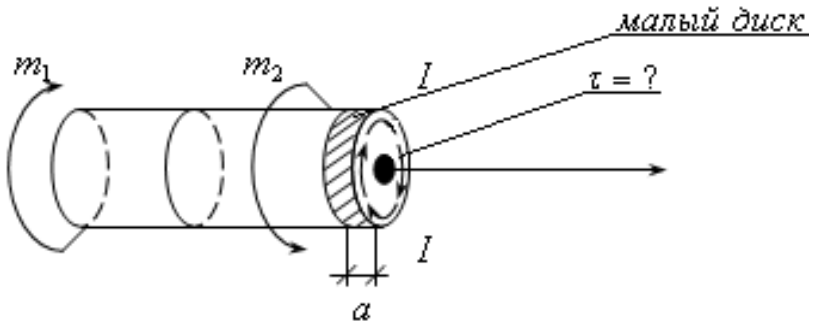


Рис.18.3

Распределенное воздействие правой частью бруса на плоскость сечения по определению будет **касательным** напряжением τ .

Выяснить **закон распределения** τ в сечении можно разными способами. Рассмотрим сначала **первый** (не традиционный) способ.

Из рассмотрения рис.18.3 можно заключить, что в силу симметричности сечения напряжение τ зависит только от расстояния ρ до центра. Тогда можно записать:

$$\tau = f(\rho).$$

Разложим функцию $f(\rho)$ в ряд Маклорена:

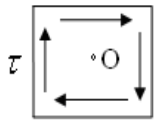
$$\tau = f(\rho) = k_0 + k_1\rho + k_2\rho^2 + ...$$

Поскольку мы рассматриваем тела типа брусьев, у которых размеры поперечного сечения много меньше длины, то ρ будет малой величиной по

сравнению с длиной вала. Поэтому можно отбросить малые слагаемые в разложении $f(\rho)$ и записать:

$$\tau \approx k_0 + k_1\rho .$$

Теперь рассмотрим малый элемент около центра сечения:



Из рисунка видно, что при стремлении размера элемента к нулю напряжение τ в одной и той же точке должно быть направлено и вверх, и вниз, и влево, и вправо. Это возможно, если только оно равно там нулю:

$$\tau(0) = 0 .$$

Отсюда следует, что коэффициент k_0 = 0. Таким образом, закон распределения τ в сечении имеет вид

$$\tau = k_1\rho . \qquad (18.3)$$

Теперь приведем **второй, традиционный** способ. Для этого проводят следующие рассуждения. Вырежем диск толщины a (рис 18.3). Из этого диска радиуса R, вырежем малый диск радиуса ρ.

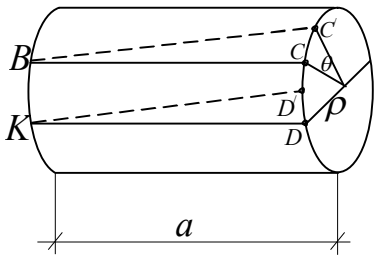


Рис.18.4

Рассмотрим прямоугольник $BCDK$. При кручении точка D перемещается в точку D', точка C перемещается в точку C'. Видим, что $BCDK$ получит сдвиг.

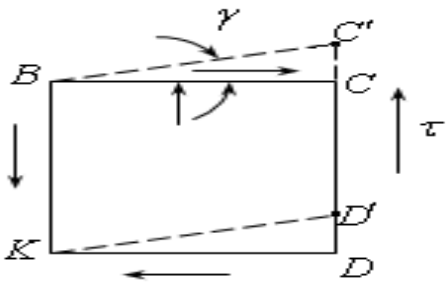


Рис.18.5

Из рисунка видно, что:

$$\frac{CC'}{BC} = tg\gamma \approx \gamma \qquad \Rightarrow \qquad CC' = BC \cdot \gamma = a \cdot \gamma \qquad (18.2)$$

Здесь $tg\gamma = \gamma$ в силу малости γ.

Выразим теперь CC' через радиус ρ (см. рис.18.4).. Введем центральный угол θ. Тогда

$$CC' = \theta \cdot \rho . \qquad (18.3)$$

Приравнивая (18.2) и (18.3) находим:

$$a\gamma = \theta \cdot \rho \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\theta}{a} \cdot \rho .$$

По закону Гука: $$\frac{\tau}{G} = \gamma = \frac{\theta}{a} \cdot \rho \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\theta \cdot G}{a} \cdot \rho .$$

Обозначая $k_1 = \frac{\theta \cdot G}{a}$ снова получаем

$$\tau = k_1 \rho .$$

Выводы:

1. Распределение τ по сечению не равномерное, а именно: в центре $\tau = 0$, так как $\rho = 0$.
2. Наибольшее напряжение возникает на малых площадках, примыкающих к поверхности (при $\rho = R$), т.е.

$$\tau_{\max} = k_1 \cdot R .$$

Формула вычисления касательного напряжения

Найдем k_1 из условия равновесия левой части вала. Сечение разобьем на малые площадки, $dA_1, dA_2, \ldots$. На них действуют напряжения $\tau_1, \tau_2, \ldots$ с суммарными силами $Q_1, Q_2, \ldots$

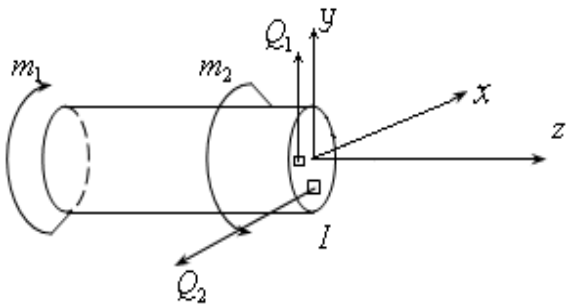


Рис.18.6

Относительно оси z они создают моменты:

$$M_1 = Q_1 \cdot \rho_1,$$
$$M_2 = Q_2 \cdot \rho_2, \ldots$$

Поскольку $Q_1 = \tau_1 dA_1, \quad Q_2 = \tau_2 dA_2, \quad \ldots \quad ,$

то получим: $M_1 = \tau_1 \cdot \rho_1 \cdot dA_1, \quad M_2 = \tau_2 \cdot \rho_2 \cdot dA_2, \quad \ldots$

Запишем уравнение равновесия:

$$-\left(dM_1 + dM_2 + \ldots\right) + m_2 - m_1 = 0 .$$

Согласно определению: $m_1 - m_2 = M_z$.

Тогда

$$M_z = dM_1 + dM_2 + ... = \int_A \tau \cdot dA \cdot \rho = \int_A k_1 \cdot \rho \cdot \rho \cdot dA = k_1 \int_A \rho^2 dA . \qquad (18.4)$$

Интеграл представляет собой геометрическую характеристику, которая называется **полярным моментом инерции** и обозначается:

$$J_p = \int_A \rho^2 \cdot dA .$$

Поскольку $\rho^2 = x^2 + y^2$ (см. рис 18.7), то

$$J_p = \int \left(x^2 + y^2 \right) dA = J_y + J_x .$$

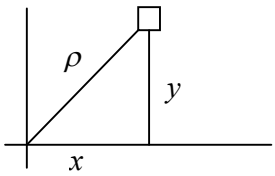


Рис.18.7

Таким образом, из (18.4) вытекает, что:

$$k_1 = \frac{M_z}{J_p} .$$

Подставляя в (18.3) получаем формулу для τ :

$$\boxed{\tau = \frac{M_z}{J_p} \cdot \rho} . \qquad (18.5)$$

Условие прочности примет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{J_p} R \le [\tau] . \qquad (18.6)$$

Отметим, что здесь имеется полная аналогия с задачей изгиба.
Нарисуем эпюру τ :

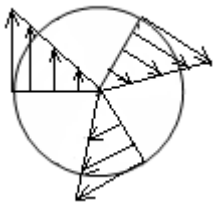


Рис.18.8

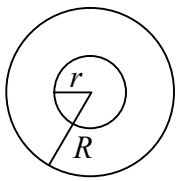


Рис.18.9

Видно, что центральная часть вала мало загружена, следовательно, можно центральную часть убрать без ущерба для прочности вала. Поэтому валы делают полыми. Тогда:

$$J_p = J_x + J_y = \left(\frac{\pi \cdot R^4}{4} - \frac{\pi \cdot r^4}{4} \right) \cdot 2 . \qquad (18.6)$$

18.3. Расчет вала на жесткость

Под действием внешних моментов сечения вала закручиваются на некоторый угол φ, который называется ***углом закрутки*** (рис.18.10). Кроме выполнения условий прочности заказчик конструкций обычно требует, чтобы был ограничен и этот угол закрутки. Такое требование называется ***условием жесткости***.

Таким образом, для валов условие жесткости имеет вид:

$$|\varphi| \le [\varphi]. \qquad (18.8)$$

Примечание: Иногда ставится другое или дополнительное ограничение в виде условия жесткости по **погонному углу закрутки**.

$$\theta = \frac{\varphi}{l} \le [\theta]. \qquad (18.9)$$

Для вывода формулы вычисления φ рассмотрим деформацию вала:

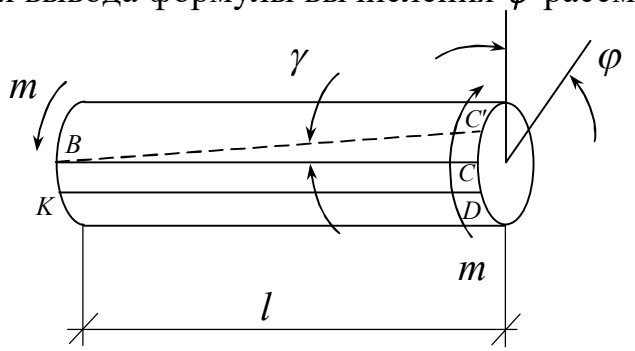


Рис.18.10

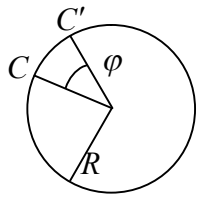


Рис.18.11

Сначала найдем CC' из $\Delta BCC'$

$$CC' = BC \cdot tg\gamma \approx l \cdot \gamma .$$

С другой стороны: $CC' = \varphi \cdot R$.

Приравнивая, получим: $\varphi \cdot R = l \cdot \gamma$; $\varphi = \dfrac{l \cdot \gamma}{R}$.

По закону Гука $\gamma = \dfrac{\tau}{G}$, а по формуле (18.5) $\tau = \dfrac{M_z}{J_p} R$.

Подставляя, получим:

$$\boxed{\varphi = \frac{M_z \cdot l}{J_p \cdot G}}. \qquad (18.10)$$

Отсюда можем найти погонный угол закрутки:

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_z}{J_p \cdot G}. \qquad (18.11)$$

Рассмотрим случай, когда вал состоит из ряда участков (рис.18.12). Найдем угол поворота φ правого торца относительно левого. Для этого по формуле (18.10) сначала найдем φ_1 - поворот среднего сечения относительно

левого торца. Аналогично вычисляется φ_2 - поворот правого торца относительно среднего сечения. Полный угол поворота φ будет

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{(M_z)_1 \cdot l_1}{(J_p)_1 \cdot G} + \frac{(M_z)_2 \cdot l_2}{(J_p)_2 \cdot G}. \qquad (18.12)$$

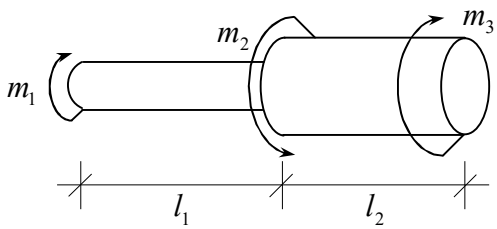


Рис.18.12

Примечание 1:

Легко обнаружить, что математически задача кручения круглых валов полностью аналогична задаче о растяжении (сжатии) составных брусьев.

Например, из рис.18.13 вытекает, что

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{A_1 \cdot E}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{A_2 \cdot E}, \quad \Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2. \qquad (18.13)$$

(сравни рис.18.13 с рис.18.13 , а также формулу (18.12) с (18.13)).

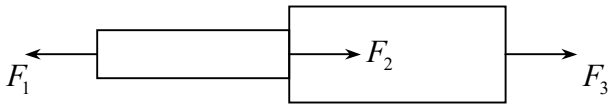


Рис.18.13

Примечание 2:

При изображении эпюр крутящих моментов имеет место следующее *правило контроля*: там где есть сосредоточенный момент, там есть скачок на величину этого момента. Это правило легко проследить на примере, приведенном на рис.18.14.

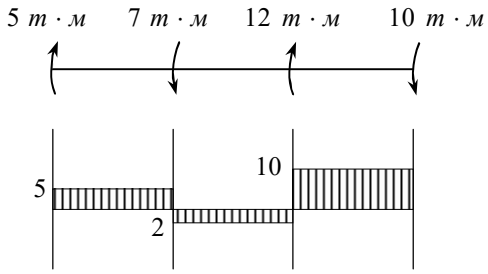


Рис.18.14

18.4. Свободное кручение тонкостенных стержней

Существует 2 вида тонкостенных стержней:

1) Стержень замкнутого профиля (с замкнутым контуром), изображенный на рис.18.15.

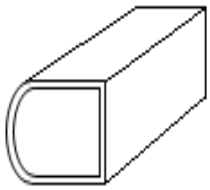


Рис.18.15

2) Стержень с открытым контуром профиля (рис.18.16)

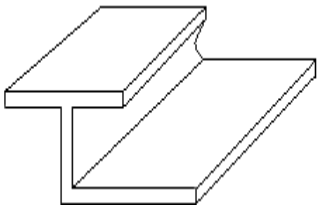


Рис.18.16

Кручение тонкостенных стержней может быть **свободным** или **стесненным**.

Если крепление концов стержня не вызывает реактивных распределенных по контуру сечения продольных сил, то такое кручение будет **свободным** (см. рис.18.17).

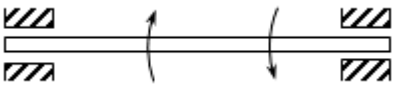


Рис.18.17

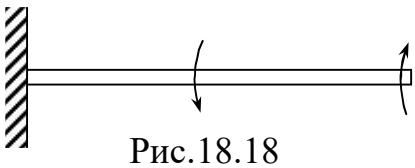


Рис.18.18

Стесненное кручение возникает тогда, когда хотя бы один конец стержня закреплен так, что это приводит к появлению реактивных распределенных по контуру сечения продольных сил (см. рис.18.18).

18.5. Напряжения при свободном кручении тонкостенных стержней замкнутого профиля

Рассмотрим тонкостенный стержень с замкнутым профилем (рис.18.19)

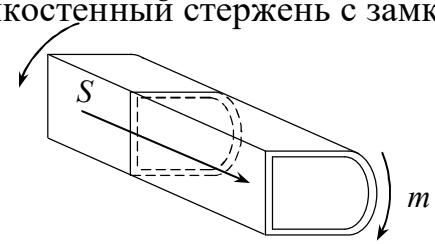


Рис.18.19

Введем систему координат $\xi\eta$, где ось ξ проходит по точкам, которые делят стенку пополам (рис.18.20). В общем случае толщина t стенки может быть переменной, т.е. $t = t(\xi)$

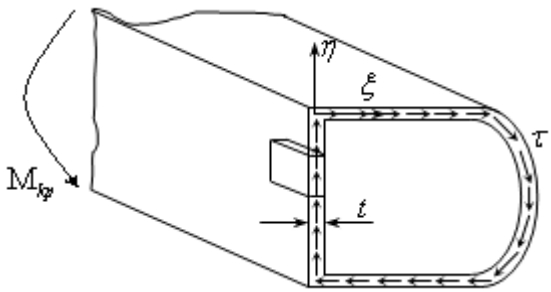


Рис.18.20

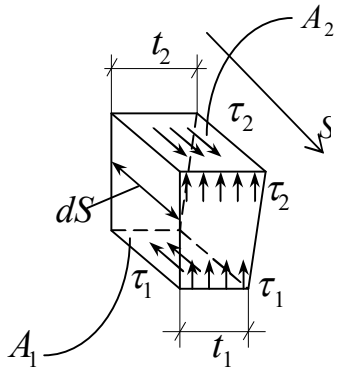


Рис.18.21

Рассмотрим задачу вычисления τ. Ввиду тонкостенности можно считать, что напряжения τ_1, τ_2 не изменяются по толщине, но могут быть разными при разных ξ. Вырежем элемент стержня (см. рис.18.20, рис.18.21). В силу закона парности на верхней грани действует τ_2, а на нижней - τ_1.

Запишем уравнение равновесия в виде равенства нулю суммы сил на продольную ось s.

$$\tau_2 \cdot A_2 - \tau_1 \cdot A_1 = 0 .$$

Поскольку: $A_1 = t_1 \cdot ds$, $A_2 = t_2 \cdot ds$, то:

$$\tau_2 \cdot t_2 \cdot ds - \tau_1 \cdot t_1 \cdot ds = 0 .$$

Таким образом,

$$\boxed{\tau_2 \cdot t_2 = \tau_1 \cdot t_1 = const}. \qquad (18.14)$$

Выразим теперь τ через внешние моменты. Рассмотрим сечение, приведенное на рис.18.22.

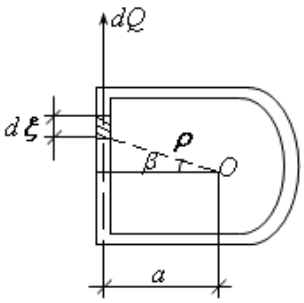


Рис.18.22

Сила dQ - это равнодействующая напряжений τ, действующих на заштрихованную площадку длиной $d\xi$:

$$dQ = \tau \cdot dA = \tau \cdot d\xi \cdot t(\xi) .$$

Эта сила создает момент около точки O:

$$dM = dQ \cdot a .$$

Найдем сумму всех dM:

$$\sum dM = \int_A dQ \cdot a = \int_A \tau \cdot d\xi \cdot t(\xi) \cdot a .$$

Из условия равновесия левой части стержня (см.рис.18.20) вытекает, что

$$\sum dM = M_z .$$

Учтем, что $\tau \cdot t = const$ согласно (18.14). Эту константу можно вынести:

$$\tau \cdot t(\xi) \cdot \oint a \cdot d\xi = M_z . \qquad (18.16)$$

Найдем геометрический смысл подынтегрального выражения. Рассмотрим нашу площадку (рис.18.23). Из рисунка видно, что площадь треугольника BDO равна $\frac{1}{2} a \cdot d\xi$, т.е.

$$a \cdot d\xi = 2 \cdot A_{\Delta BDO} . \qquad (18.17)$$

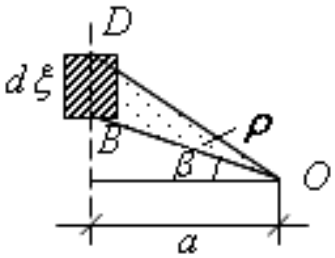


Рис.18.23

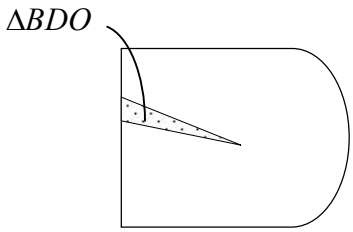


Рис.18.24

Интеграл – это сумма таких площадей. Таким образом, получим, что интеграл равен удвоенной площади фигуры, которая ограничена штриховой линией, изображенной на рис.18.25.

$$\oint a \cdot d\xi = \sum A_{\Delta BDO} \cdot 2 = 2A^* . \qquad (18.18)$$

<u>*Определение:*</u> Эту площадь A^* назовем площадью просвета трубы.

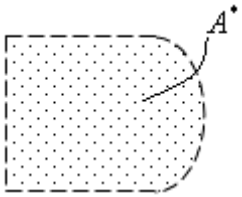


Рис.18.25

Подставляя (18.18) в (18.16) видим, что:

$$\tau \cdot t(\xi) \cdot 2 \cdot A^* = M_z .$$

Отсюда вытекает **формула Бредта**:

$$\boxed{\tau = \frac{M_{кр}}{2 \cdot A^* \cdot t}} . \qquad (18.19)$$

Из (18.19) следует, что при кручении труб разрушение начинается там, где **толщина стенки минимальна**.

18.6. Угол закрутки тонкостенных стержней замкнутого профиля

Рассмотрим поворот сечения на угол φ - угол поворота правого торца относительно левого (рис.18.26). При этом точка N перейдет в точку N''.

Из рисунка видно, что:

$$NN'' = ON \cdot \boldsymbol{\varphi}. \tag{18.20}$$

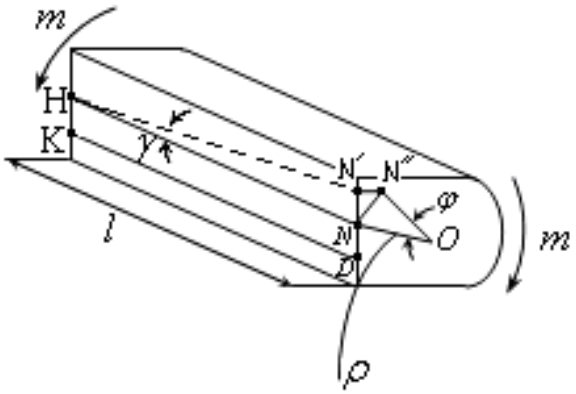


Рис.18.26

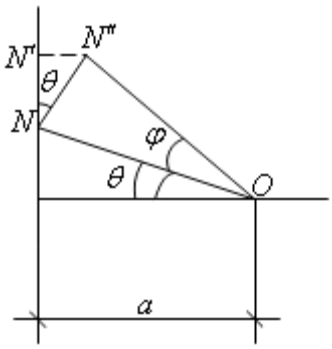


Рис.18.27

Как и в случае круглых стержней выразим теперь NN'' через угол γ - угол сдвига прямоугольника *HNLK.* Как видно из рисунка

$$\frac{NN'}{HN} = tg\ \gamma \approx \gamma.$$

Здесь $tg\gamma = \gamma$ в силу малости γ. Тогда

$$NN' = \boldsymbol{\gamma} \cdot HN = \boldsymbol{\gamma} \cdot l. \tag{18.21}$$

Выразим далее NN' через $N''N$. Используя равенство углов с перпендикулярными сторонами, получим, что $< N'NN'' = \boldsymbol{\theta}$. Тогда:

$$NN'' \cdot Cos\boldsymbol{\theta} = NN'.$$

Подстановка сюда соотношений (18.20), (18.21)дает:

$$ON \cdot \boldsymbol{\varphi} \cdot Cos\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\gamma} \cdot l. \tag{18.22}$$

По закону Гука

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{M_z}{2A^* \cdot t} \cdot \frac{1}{G}.$$

Из (18.22) с учетом формулы Бредта (18.19) получим:

$$a \cdot \boldsymbol{\varphi} = \frac{M_z \cdot l}{2A^* \cdot G \cdot t(\boldsymbol{\xi})}. \tag{18.23}$$

Отсюда вытекает, что φ зависит от ξ. Для осреднения угла поворота разных точек контура используют следующий подход. В (18.23) слева и справа у нас одинаковые функции. Значит и интегралы от них будут одинаковы:

$$\boldsymbol{\varphi} \cdot \oint a \cdot d\boldsymbol{\xi} = \frac{M_z \cdot l}{2A^* \cdot G} \cdot \oint \frac{1}{t(\boldsymbol{\xi})} d\boldsymbol{\xi}.$$

Ранее было получено, что слева интеграл равен $2A^*$ (см.формулу (18.18)). Тогда: $\varphi \cdot 2A^* = \dfrac{M_z \cdot l}{2A^* \cdot G} \cdot \oint \dfrac{1}{t(\xi)} d\xi$.

Таким образом, получаем следующую формулу Бредта для угла φ:

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{M_z \cdot l}{4(A^*)^2 \cdot G} \cdot \oint \frac{1}{t(\boldsymbol{\xi})} d\boldsymbol{\xi} \,. \qquad (18.24)$$

Здесь интеграл можно назвать **относительным периметром стенки трубы**:

$$\overline{p} = \oint \frac{d\xi}{t(\xi)} \,. \qquad (18.25)$$

В компактной форме формулу Бредта для угла φ запишем теперь в виде:

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{M_z \cdot l}{4(A^*)^2 \cdot G} \cdot \overline{p} \qquad (18.24)$$

<u>*Рассмотрим частные случаи.*</u>

1. Пусть $t = const$. Тогда:

$$\overline{p} = \frac{1}{t} \oint d\xi = \frac{p}{t} \,,$$

где p - периметр контура сечения трубы.

2. Пусть труба составлена из кусков с постоянными толщинами (см. рис.18.28) :

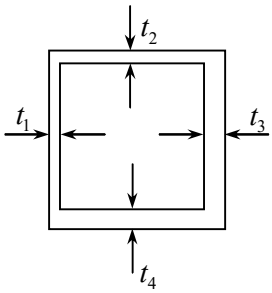


Рис.18.28

Тогда: $$\oint = \int_{b_1} + \int_{b_2} + \int_{b_3} + \int_{b_4} = b_1/t_1 + b_2/t_2 + b_3/t_3 + b_4/t_4 \qquad (18.26)$$

Таким образом:

$$\boxed{\overline{p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{t_i}} \qquad (18.27)$$

18.7. Кручение стержней открытого профиля

Рассмотрим кручение стержней с прямоугольным сечением.

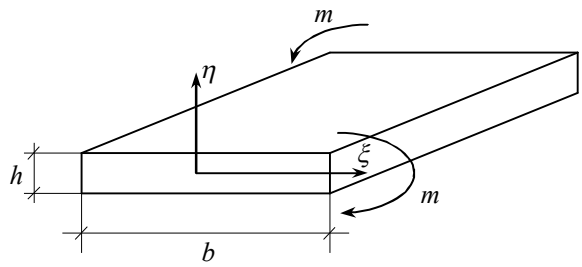


Рис.18.29

Точное решение получено Сен-Венаном. Но можно получить приближенное решение и инженерными методами, считая, что стержень – это совокупность круглых валов, как это показано на рис.18.30.

Рис.18.30

Введем систему координат $\xi\eta$ (см. рис.18.29). Если считать, что напряжения не меняются по ширине рассматриваемого прямоугольника, а только по высоте, то получим:

$$\tau = k \cdot \eta . \qquad (18.28)$$

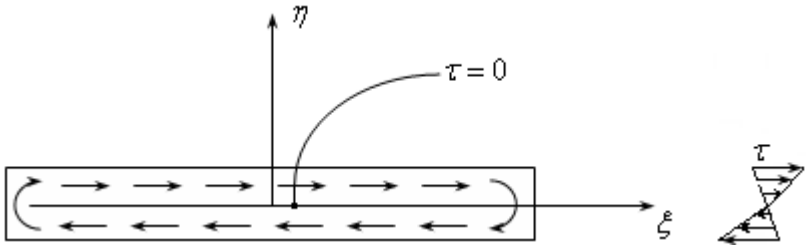


Рис.18.31

Разбив площадь на микроплощадки и вычисляя силу dQ, которая действует на нее, можно подсчитать момент, который создает сила dQ. Например, от горизонтальных напряжений момент будет

$$dM = \tau \cdot dA \cdot \eta . \qquad (18.29)$$

Приравнивая сумму всех моментов крутящему моменту можно найти выражение для k:

$$k = \frac{M_z}{2 \cdot J_\xi} . \qquad (18.30)$$

Здесь: $J_\xi = \dfrac{b \cdot h^3}{12}$.

Формулу для τ теперь можно записать в виде, аналогичном случаю круглых валов (см. формулу (18.5)):

$$\tau = \frac{M_z}{J_p} \cdot \eta , \qquad \text{где} \quad J_p = 2J_\xi . \qquad (18.31)$$

Для угла закрутки стержня прямоугольного сечения формула имеет вид:

$$\varphi = \frac{M_z \cdot l}{2J_p \cdot G}. \qquad (18.32)$$

Здесь в отличие от круглых валов (см.формулу (18.10)) в знаменателе есть коэффициент 2.

Если стержень состоит из нескольких прямоугольников (см. рис.18.16), то выкладки (18.28) – (18.31) будут такими же. Изменится только момент инерции J_p. Он будет состоять из суммы моментов каждого прямоугольника:

$$J_p = J_p^{\,1} + J_p^{\,2} + ... = 2\left(\frac{b_1 h_1^{\,3}}{12} + \frac{b_2 h_2^{\,3}}{12} + ...\right). \qquad (18.33)$$

Сравнивая (18.31) с (18.19) можно заметить, что в отличие от тонкостенных стержней замкнутого профиля в стержнях с открытым профилем ***максимальные напряжения возникают там, где*** $t = t_{\max}$, т.е. там, где стенка является наиболее толстой. Значит и разрушение начнется в самом толстом месте сечения.

Отметим, что стержни с замкнутым профилем намного прочнее и жестче, чем стержни с открытки профилем. Для примера можно рассмотреть трубу квадратного сечения ширины *a,* постоянной толщины *t* (см. рис.18.28). Тогда $A \approx a^2$, $\overline{p} = a \cdot 4/t$, $J_\xi \approx 4a \cdot t^3/12$.

Вычислим напряжение и угол закрутки для трубы с замкнутым контуром:

$$\tau_1 = \frac{M_{кр}}{2 \cdot A^* \cdot t} = \frac{M_{кр}}{2 \cdot a^2 \cdot t}, \qquad \varphi_1 = \frac{M_{кр} \cdot l}{4(A^*)^2 \cdot G} \cdot \overline{p} = \frac{M_{кр} \cdot l}{a^3 \cdot G \cdot t}.$$

Если же разрезать трубу вдоль оси (например, вдоль ребра), то получим стержень с открытым контуром. Вычислим максимальное напряжение (которое будет при $\eta = t/2$) и угол закрутки. Учитывая, что $J_\xi \approx 4a \cdot t^3/12$ получим:

$$\tau_2 = \frac{M_{кр}}{2J_\xi} \cdot \eta = \frac{3M_{кр}}{4 \cdot t^2 \cdot a}. \qquad \varphi_2 = \frac{M_{кр} \cdot l}{4(A^*)^2 \cdot G} \cdot \overline{p} = \frac{3M_{кр} \cdot l}{4a \cdot G \cdot t^3}.$$

Найдем отношения напряжений и углов закрутки τ_2/τ_1, φ_2/φ_1:

$$\tau_2/\tau_1 = 3a/2t, \qquad \varphi_2/\varphi_1 = 0.75a^2/t^2.$$

Видно, что при малых *t* напряжение τ_2 и угол φ_2 будут гораздо больше. Например, если положить *a* = 20 см., *t* = 1мм., то получим

$$\tau_2/\tau_1 = 300, \qquad \varphi_2/\varphi_1 = 30000.$$

Можно сказать, что после разреза трубы прочность понизилась в 300 раз, а жесткость в 30000 раз.

19. СЛОЖНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Сложная деформация – это совокупность двух или более простых типов деформации бруса.

Их виды:

1) Растяжение с изгибом.
2) Кручение с изгибом.
3) Кручение с изгибом и растяжением.
4) Растяжение с кручением.
5) Косой изгиб (изгиб в двух плоскостях).

19.1. Эпюры внутренних силовых факторов

Разделим брус сечением на две части. На одну часть со стороны другой в трехмерном пространстве действует 6 силовых факторов $N_z, Q_y, Q_x, M_x, M_y, M_z$. Правила знаков для сил и моментов, действующих в плоскости *xz,* принимаем такими же, как и для плоскости *yz* (они были введены в разделе 3.1). В отличие от случая простого изгиба их эпюры строятся в аксонометрии (или в изометрии), причем, обычно эпюры N_z, M_z изображаются на отдельных рисунках, эпюры Q_x, Q_y - на одном отдельном рисунке, M_x, M_y - также на одном отдельном рисунке.

Пример: Рассмотрим L-образную балку (рис.19.1). На каждом участке ось *z* направляется вдоль стержня, а оси *x,y*-перпендикулярно стержню. При этом систему *x, y, z* желательно передвигать как жесткое целое.

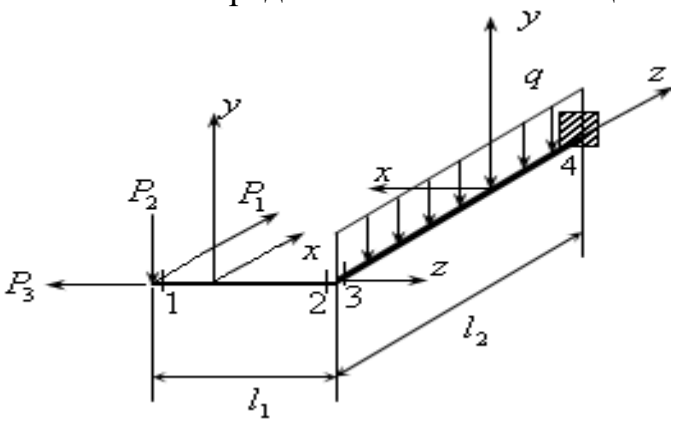


Рис.19.1

Вычислим силы и моменты в четырех сечениях (см. рис.19.1).

Рассмотрим **сечение 1** (в левом конце стержня длины l_1):

$N_z = P_3, \quad Q_x = P_1, \quad Q_y = -P_2, \quad M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0.$

Найдем силы и моменты в **сечении 2**:

$$N_z = P_3, \quad Q_x = P_1, \quad Q_y = -P_2, \quad M_x = -P_2 \cdot l_1, \quad M_y = -P_1 \cdot l_1, \quad M_z = 0.$$

Рассмотрим **сечение 3**:

$$N_z = -P_1, \quad Q_x = P_3, \quad Q_y = P_2, \quad M_x = 0, \quad M_y = P_1 l_1, \quad M_z = -P_2 l_1 .$$

Находим силы и моменты в **сечении 4**:

$$N_z = -P_1, \quad Q_x = P_3, \quad Q_4 = P_2 + q l_2, \quad M_x = P_2 l_2 + q l_2^2 / 2, \quad M_y = P_1 l_1 + P_3 l_2, \quad M_z = -P_2 l_1 .$$

Поскольку на втором участке сверху действует погонная сила *q,* то эпюра M_x будет криволинейной и вогнутой.

Строим эпюры сил и моментов по следующим правилам.

1. Знаком снабжается только эпюра N_z. Силу N_z откладываем перпендикулярно оси стержня в произвольном направлении, снабжая знаком «-», если участок сжимается.
2. Крутящий момент M_z откладываем также в произвольном направлении, но без знака.
3. Если рассматривается воздействие на сечение <u>левой</u> части бруса и если суммы внешних сил положительны, то Q_x, Q_y тоже положительны и откладываются в направлении осей *x,y* (и наоборот, если рассматривается действие на сечение <u>правой</u> части бруса, то положительные внешние силы дают отрицательные вклады в Q_x, Q_y).
4. Моменты M_x, M_y откладываются на растянутых волокнах и знаком тоже не снабжаются. ***Важное правило***: M_x, M_y откладываем в плоскости действия сил и моментов, которые их вызывают. Например, в нашем случае M_x-по вертикали, M_y - по горизонтали.

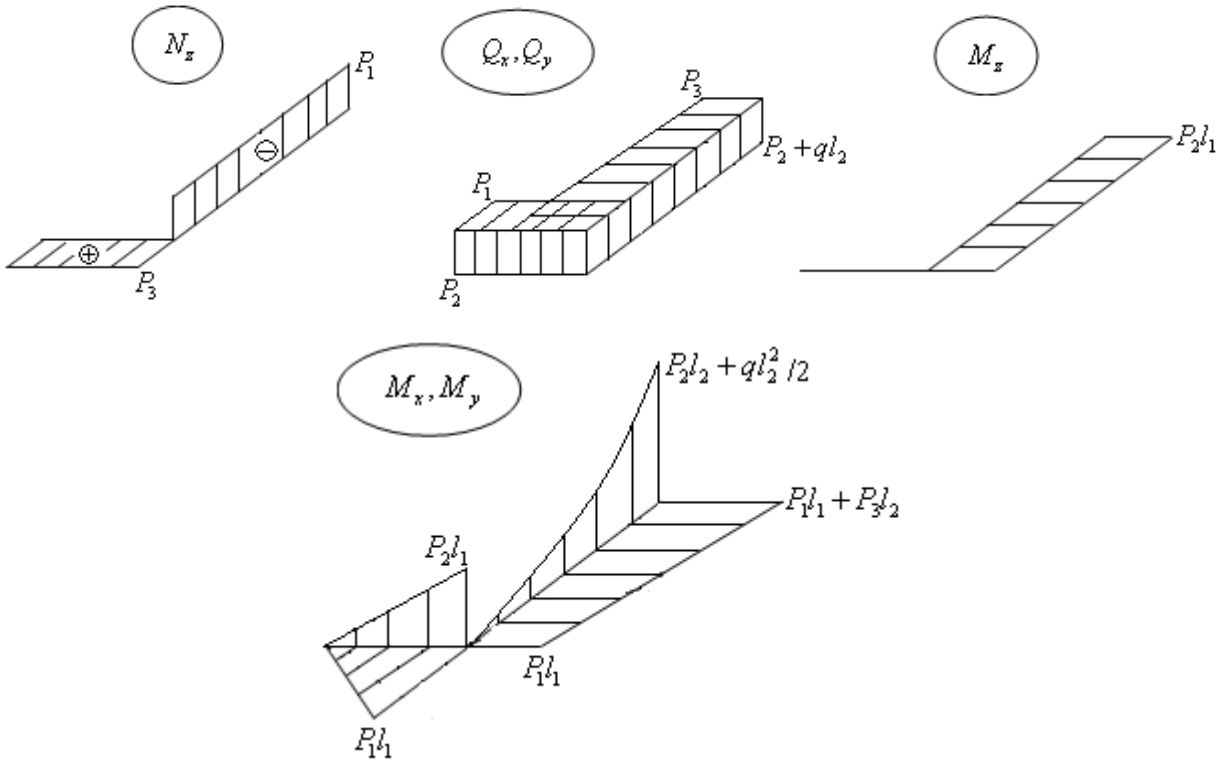


Рис.19.2

<u>Опасным называется сечение</u>, в котором или M_x, или M_y принимают экстремальные значения.

Из эпюры M_x, M_y видно, что в нашем случае на первом участке опасным является сечение, которое находится на стыке двух участков, на втором участке опасным является сечение, расположенное в заделке.

По эпюрам определяют вид деформации: 1-ый стержень испытывает растяжение с изгибом, 2-ой испытывает сжатие и кручение с изгибом.

19.2. Растяжение с изгибом

Рассмотрим растяжение с изгибом (см. рис.19.3).

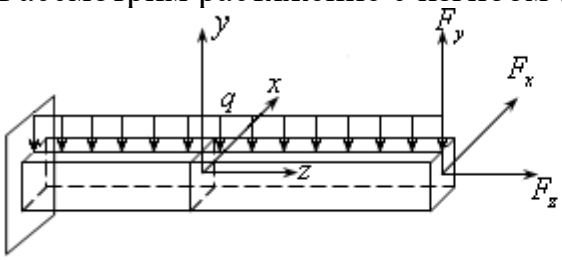


Рис.19.3

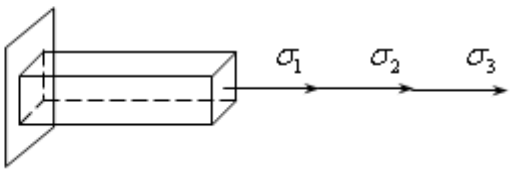


Рис.19.4

Проанализируем задачу отыскания нормального напряжения σ.

Ясно, что он складывается из напряжений, возникающих при растяжении (σ_1), при вертикальном изгибе (σ_2), горизонтальном изгибе (σ_3), т.е.:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 .$$

Здесь $\sigma^{раст} = \sigma_1 = \dfrac{N}{A}$, $\quad \sigma^{изг}_{верт} = \sigma_2 = -\dfrac{M_x}{J_x} y$, $\quad \sigma^{изг}_{гориз} = \sigma_3 = -\dfrac{M_y}{J_y} x$.

Суммируя, получаем:

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x}. \qquad (19.1)$$

Эту формулу иногда называют **основной формулой сопромата.**

Здесь x, y - это координаты точки (бесконечно малой площадки), в которой мы вычисляем σ.

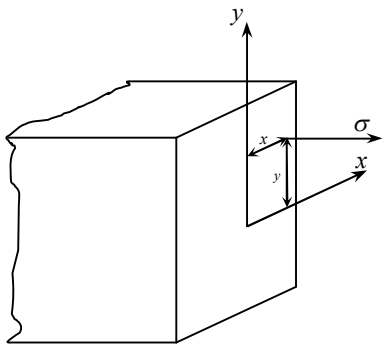


Рис.19.5

Ясно, что из (19.1) следует ряд формул для простых деформаций:

1) Если нет изгиба, то $M_x = M_y = 0$. Тогда получим $\boldsymbol{\sigma}$ для простого растяжения: $\sigma = \dfrac{N_z}{A}$.

2) Если нет растяжения, но $M_x \neq 0$, $M_y \neq 0$, то получим $\boldsymbol{\sigma}$ для косого изгиба:

$$\boldsymbol{\sigma} = -\frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x .$$

3) Если $N_z = 0, \vdots M_y = 0,$ то получим случай прямого поперечного изгиба:

$$\boldsymbol{\sigma} = -\frac{M_x}{J_x} y .$$

19.3. Максимальные напряжения при растяжении с изгибом

Из формулы видно, что в разных точках с разными x, y напряжение σ разное. При расчете на прочность необходимо знать $\sigma_{\max}^{сжат}$ (максимальное сжимающее напряжение) и $\sigma_{\max}^{раст}$ (максимальное растягивающее напряжение).

Рассуждаем от противного. Найдем сначала линию, на которой напряжение минимально, то есть $\sigma = 0$.

Подставим $\boldsymbol{\sigma}$=0 в (19.1):

$$0 = \frac{N_z}{A} - \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x . \qquad (19.2)$$

В данном сечении N_z, M_x, M_y - это постоянные, поэтому уравнение (19.2) – это уравнение прямой в плоскости *x,y* (см.рис.19.6).

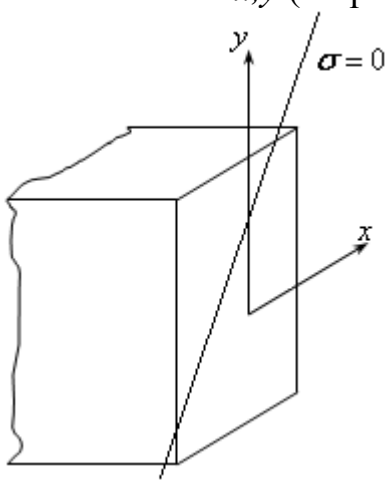


Рис.19.6

Напомним определение: прямая, на которой $\sigma = 0$, называется <u>нейтральной.</u>

Ясно, что вблизи нейтральной линии напряжение не нуль, но очень мало. И чем дальше от этой линии, тем напряжение больше. Следовательно, $\sigma_{\max}^{раст}$, $\sigma_{\max}^{сж}$ **возникают в точках, наиболее удаленных от этой нейтральной линии.**

Определение: точки, в которых $\sigma = \sigma_{\max}^{раст}$ или $\sigma = \sigma_{\max}^{сж}$ называются ***опасными точками.***

Примечание. Из (19.1) видно, что в разных сечениях комбинация M_x, M_y может давать разные комбинации $\sigma_{\max}^{сж}$ и $\sigma_{\max}^{раст}$, то есть в одном сечении максимальным будет $\sigma^{сж}$, а в другом $\sigma^{раст}$. Более того, нельзя заранее знать, в каком сечении $\sigma_{\max}^{сж}$ или $\sigma_{\max}^{раст}$ будут наибольшими.

Поэтому при растяжении с изгибом опасными являются все те сечения, в которых или M_x, или M_y экстремальны.

19.4 Косой изгиб

Это случай сложной деформации, при котором есть только изгиб в двух плоскостях.

В этом случае в формуле (19.1), полагаем $N = 0$.

Тогда:
$$\sigma = -\frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x .$$

Уравнение нейтральной линии получает вид:
$$-\frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x = 0 .$$

Видно, что нейтральная линия проходит через центр тяжести.

Особенностью косого изгиба и растяжения с изгибом в общем случае является то, что нейтральная линия (штриховая прямая на рис.19.7) не перпендикулярна равнодействующей F поперечных сил F_x, F_y.

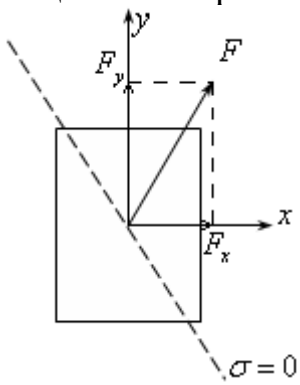


Рис.19.7

19.5. Проверка прочности круглых стержней при кручении с изгибом

Будем рассматривать только круглые стержни.

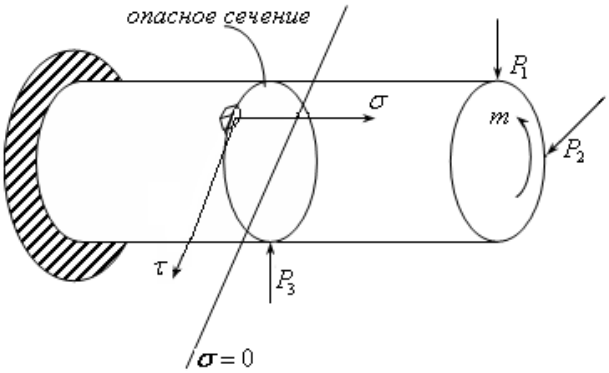


Рис.19.8

Пусть стоит задача: проверки прочности в опасном сечении. Исследуем малый элемент в опасном сечении (см. рис.19.8)

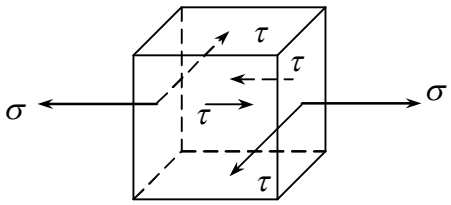


Рис.19.9

Особенность ситуации в том, что на элемент действуют два вида напряжений одновременно, поэтому условие прочности вида $\sigma < [\sigma\ ]$, $\tau < [\tau\ ]$, не обеспечивают прочность, поскольку они справедливы только при простом растяжении и при простом сдвиге. Так как σ и τ действуют одновременно, то в зависимости от материала, нужно применять различные теории прочности.

Для стали в запас прочности можно использовать III теорию:

$$\boxed{\tau_{\max} = 0.5\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le 0.5[\sigma]}. \qquad (19.3)$$

Здесь τ вычисляется как обычно: $\tau = \dfrac{M_Z}{J_p} \cdot \rho$.

Для полого вала J_p имеет вид:

$$J_p = 2J_x = \frac{\pi \cdot R^4 - \pi \cdot r^4}{4} \cdot 2. \qquad (19.4)$$

Для отыскания σ для круглых стержней не обязательно находить опасную точку. Действительно, если найдена нейтральная линия, то мы можем принять её за ось x.

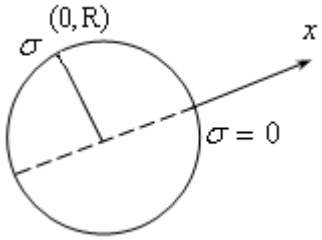


Рис.19.10

В этом случае опасной будет точка с координатами $x = 0$, $y = R$ (рис.19.10). Изгибающий момент тогда вычисляется как геометрическая сумма M_x и M_y:

$$M^{изг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}\ . \qquad (19.5)$$

Поэтому по формуле Навье найдем:

$$\sigma = \frac{M^{изг}}{J_x} R, \qquad J_x = \frac{\pi \cdot R^4 - \pi \cdot r^4}{4}.$$

Если кроме кручения и изгиба имеется растяжение, то максимальное значение напряжения σ вычисляется по формуле:

$$\sigma = \sigma^{раст} + \sigma^{изг} = \frac{N}{A} + \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{J_x} R\ . \qquad (19.6)$$

19.6 Внецентренное сжатие. Ядро сечения

Рассмотрим три варианта нагружения колонны (рис.19.11).

1) сжатие силой по центру
2) сжатие силой, чуть сдвинутой от центра
3) сжатие по краю

В сечении получим распределения напряжений, приведенные на рис 19.11.

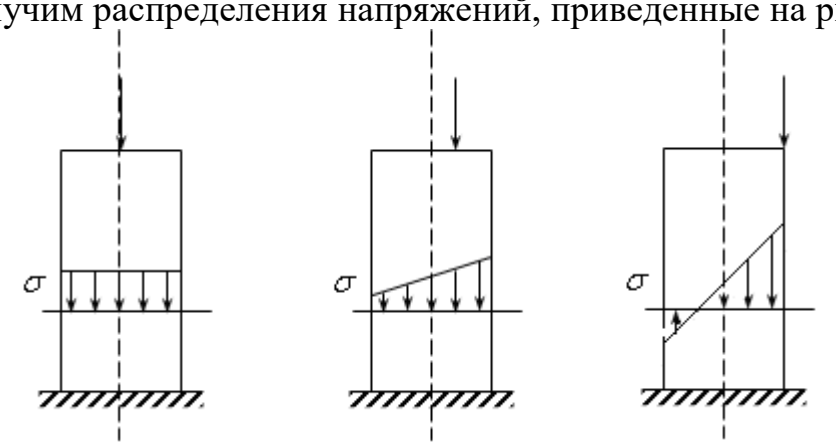


Рис.19.11

Большинство строительных материалов плохо работают на растяжение (бетон, кирпич, камень, стекло) поэтому наличие зон растяжения требуется максимально уменьшить, а еще лучше - исключить.

Как видно из рисунка для этого силу нужно располагать как можно ближе к центру.

Определение 1:

Внецентренным сжатием или растяжением называется такая деформация стержня, которая происходит под действием продольной силы, приложенной не в центре тяжести сечения.

Определение 2:

Ядро сечения - это область, расположенная вокруг центра тяжести сечения (рис.19.12), причем, такая, что если приложить продольную сжимающую силу в этой области, то нигде в стержне не возникнет напряжения растяжения, будет только сжатие.

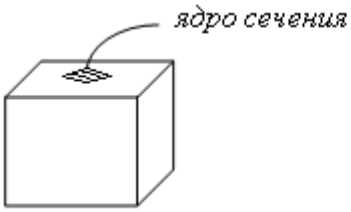


Рис.19.12

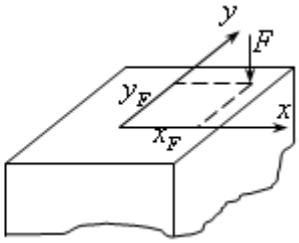


Рис.19.13

Исследуем внецентренное сжатие (рис.19.13). Здесь x_F, y_F - координаты точки приложения силы *F*. Тогда сила сжатия $N = -F$.

Из рисунка видно, что *F* создает следующие моменты относительно осей *x* и *y* (причем, независимо от того на какой высоте находится сечения):

$$M_x = F \cdot y_F,$$

$$M_y = F \cdot x_F.$$

Тогда получим:

$$\boxed{\sigma = -\frac{F}{A} - \frac{F \cdot y_F \cdot y}{J_x} - \frac{F \cdot x_F \cdot x}{J_y}}. \qquad (19.7)$$

Рассмотрим уравнение нейтральной линии, т.е. линии, где $\sigma = 0$:

$$-\frac{F}{A} - \frac{F \cdot y_F \cdot y}{J_x} - \frac{F \cdot x_F \cdot x}{J_y} = 0 \;\Big|\; \div(-F).$$

Деля на *F*, получим:

$$\boxed{\frac{1}{A} + \frac{y_F \cdot y}{J_x} + \frac{x_F \cdot x}{J_y} = 0}. \qquad (19.8)$$

Таким образом, из (19.8) следует, что **положение нейтральной линии, которое определяет растянутые и сжатые зоны, не зависит от величины силы *F***, а зависит только от точек её приложения, то есть от y_F, x_F.

19.7 Построение ядра сечения

Рассмотрим некоторое сечение (рис.19.14).

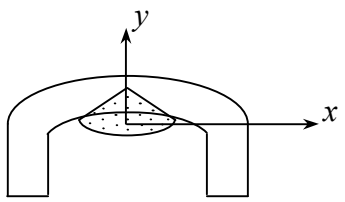


Рис.19.14

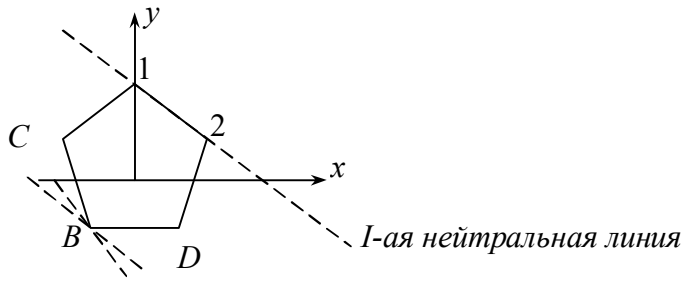


Рис.19.15

Если точка приложения силы F находится на границе ядра сечения, то зоны растяжения не будет. Бесконечно малое удаление силы от ядра приведет к тому, что появится зона растяжения, значит для точек границы ядра нейтральная линия касается нашего сечения.

Следовательно, для построения ядра надо рассмотреть всевозможные касательные к сечению и найти для этих случаев точки приложения силы. Соединив затем эти точки, получим контур ядра сечения.

<u>Процедура построения ядра сечения.</u>

Запишем уравнение I-ой нейтральной линии (рис.19.15). Это уравнение, проходящее через две точки 1-2:

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1)\,. \qquad (19.9)$$

Уравнение (19.9) должно совпадать с уравнением (19.8). Таким образом, уравнение (19.9) известно, известны также J_x, J_y, надо найти y_F, x_F.

Для этого сначала полагаем $x=0$. Из соотношения (19.9) определяем y, подставляем это y и $x=0$ в уравнение (19.8) и находим y_F.

Для отыскания x_F полагаем $y = 0$. Из формулы (19.9) определяем x, подставляем это x и $y=0$ в уравнение (19.8) и находим x_F.

<u>Важное примечание</u>. Рассмотрим угловую точку B. Через точку B можно провести бесконечно много касательных.

Однако все прямые, проходящие через точку B, описываются уравнением, которое удовлетворяется при подстановке x_B, y_B. Подставим их в уравнение (19.8):

$$\frac{1}{A} + \frac{y_F \cdot y_B}{J_x} + \frac{x_F \cdot x_B}{J_y} = 0\,.$$

Поскольку x_B, y_B, J_x, J_y - это известные числа, то в результате получим

$$a + b \cdot y_F + c \cdot x_F = 0\,,$$

где *a,b,c* – постоянные. Это есть уравнение **прямой**, на которой лежат точки границы ядра.

Таким образом, при переходе от стороны *BC* к стороне *BD*, искать y_F, x_F не нужно, а нужно просто соединить прямой две точки границы ядра, которые получены для *BC* и *BD*.

Рассмотрим **примеры**. Найдем ядро сечения для прямоугольника.

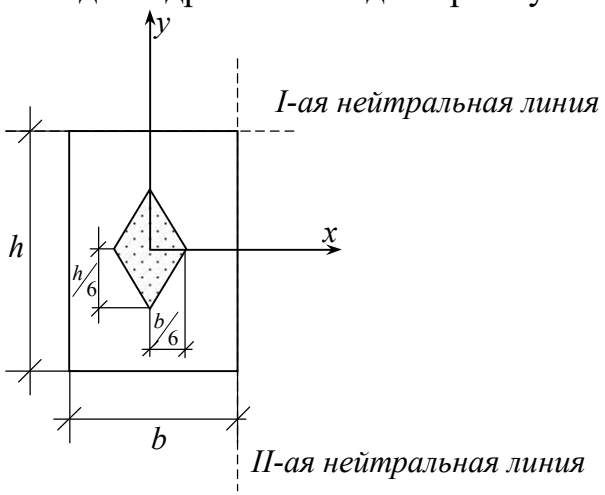


Рис.19.16

Для I-ой нейтральной линии уравнение прямой (19.9) имеет вид:

$$y = \frac{h}{2}\,. \qquad (19.10)$$

Для (19.8) имеем:

$$A = h \cdot b\,,\ J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}\,,\ J_y = \frac{b^3 \cdot h}{12}\,.$$

Тогда (19.8) примет вид:

$$\frac{1}{b \cdot h} + \frac{y_F \cdot y}{b \cdot h^3/12} + \frac{x_F \cdot x}{b^3 \cdot h/12} = 0\,.$$

Умножая на $\frac{b \cdot h}{12}$ получим:

$$\frac{1}{12} + \frac{y_F \cdot y}{h^2} + \frac{x_F \cdot x}{b^2} = 0\,. \qquad (19.11)$$

Полагаем сначала *x = 0*. Тогда из (19.10) вытекает, что $y = h/2$. Подставляя в (19.11) получаем:

$$\frac{1}{12} + \frac{y_F \cdot h/2}{h^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y_F = -\frac{h}{6}\,.$$

Найдем x_F. Поскольку в (19.10) можно принимать лишь $y = \frac{h}{2}$, то полагаем $y = \frac{h}{2}$, x – любое число, например $x=b/2$. Подставляя в (19.11), найдем:

$$\frac{1}{12} - \frac{h/6 \cdot h/2}{h^2} + \frac{x_F \cdot b/2}{b^2} = 0 .$$

Отсюда: $$0 + x_F \cdot \frac{b}{2b^2} = 0 .$$

$$x_F = 0 .$$

Аналогично найдем точку границы ядра сечения для случая, когда нейтральная линия проходит вертикально (*II*-ая нейтральная линия) Тогда получим $x_F = -b/6$, $y_F = 0$.

Точно так же определяются еще 2 точки. В результате получим ядро сечения, изображаемое на рисунке (19.16) в виде ромба.

Ядра сечения для двутавра, швеллера, круга имеют виды, приведенные на (рис.19.17).

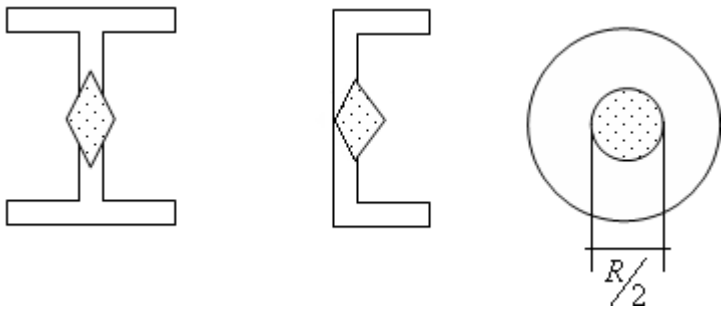


Рис.19.17

20. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

В некоторых случаях на строительные конструкции воздействуют силы, которые быстро меняются со временем. Это может приводить к двум опасным последствиям:

1) Динамическое воздействие может превысить статическое воздействие внешних сил в разы и даже в десятки и сотни раз.

2) Может возникнуть явление резонанса.

Существует 2 способа решения задачи об определении динамического воздействия тел на конструкции. Они основаны соответственно на следующих двух законах: законе сохранения энергии и принципе Даламбера.

20.1. Удар

Рассмотрим задачу о падении груза веса $F=mg$ с высоты H (см. рис.20.1).

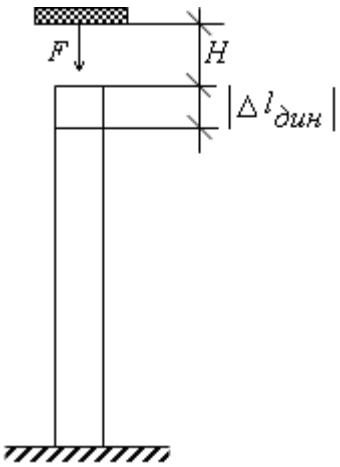


Рис.20.1

Проектировщика интересует максимальная сила воздействия, которую назовем силой удара. Наряду с этой задачей рассмотрим фиктивную задачу, когда на стержень действует сила $F_{стат}$, которая равна весу тела F.

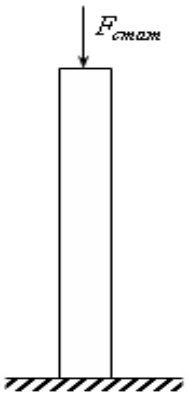


Рис.20.2

Силу удара обозначим через $F_{дин}$. Ясно, что: $F_{дин} > F_{стат}$.

Введем коэффициент динамичности:

$$k_{дин} = \frac{F_{дин}}{F_{стат}}.$$

Тогда динамическое напряжение будет

$$\sigma_{дин} = \frac{F_{дин}}{A} = k_{дин}\frac{F_{стат}}{A} = k_{дин} \cdot \sigma_{стат}. \qquad (20.2)$$

По закону Гука:

$$\Delta l_{дин} = \frac{N_{дин} l}{EA}.$$

Согласно (20.1) получим:

$$\Delta l_{дин} = k_{дин} \cdot \Delta l_{стат}, \qquad \Delta l_{стат} = \frac{F_{стат} l}{EA} = \frac{F\,l}{EA} \qquad (20.3)$$

Таким образом, проблема сводится к вычислению числа $k_{дин}$. Для его определения используем закон сохранения энергии.

Падая, груз совершит некоторую работу. Эта работа не может исчезнуть, она превращается в энергию деформации сжатого стержня.

Обозначим через W_F - работу силы F; а через W_σ - энергию деформации стержня. Тогда $W_F = W_\sigma$.Сначала вычислим W_F:

$$W_F = F \cdot s.$$

Здесь s - путь, который пройдет сила F. Из рис.20.1 видно, что:

$$W_F = F(H + |\Delta l_{дин}|) = F_{стат}(H + k_{дин} \cdot |\Delta l_{стат}|) \qquad (20.4)$$

Вычислим энергию деформации стержня:

$$W_\sigma = \frac{1}{2}(N \cdot \Delta l) = \frac{1}{2}(F_{дин} \cdot |\Delta l_{дин}|) = \frac{1}{2} \cdot k_{дин} \cdot F_{стат} \cdot \frac{k_{дин} \cdot F_{стат} \cdot l}{E \cdot A}.$$

Подставляя в закон сохранения энергии (20.4), получаем:

$$F_{стат}(H + k_{дин} \cdot |\Delta l_{стат}|) = \frac{1}{2} \cdot k^2{}_{дин} \cdot F_{стат} \cdot |\Delta l_{стат}|.$$

Сокращая на $F_{стат}$ получим квадратное уравнение относительно $k_{дин}$:

$$k_{дин}^2 \cdot \Delta l_{стат} - 2 \cdot k_{дин} \cdot \Delta l_{стат} - 2H = 0.$$

Его решение имеет вид:

$$k_{дин} = \frac{|\Delta l_{стат}| \pm \sqrt{\Delta l_{стат}^2 + 2H}}{|\Delta l_{стат}|}.$$

Учтем, что $F_{дин} > F_{стат}$. Тогда получим:

$$k_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{|\Delta l_{стат}|}}. \qquad (20.5)$$

Это основная формула для вычисления коэффициента динамичности. Здесь H- высота падения груза; $\Delta l_{стат}$ - деформация стержня для фиктивной задачи о статическом нагружении (рис.20.2).

<u>Следствия из формулы (20.5).</u>

1) Если даже высота падения H=0, то согласно (20.5) внезапное нагружение удваивает силу воздействия веса груза.

2) Чем больше $\Delta l_{стат}$ (то есть чем больше осадка стержня), тем меньше вредное воздействие удара, поскольку $k_{дин}$ становится меньше. Из закона Гука:

$$\Delta l_{стат} = \frac{P_{стат} \cdot l}{E \cdot A}.$$

следует, что этого можно добиться 3-мя способами

1. Увеличить длину стержня
2. Уменьшить толщину стержня
3. Уменьшить жесткость (E) стержня

<u>Примечание:</u> формулу (20.5) можно применять и при ударе по балке (рис.20.3). При этом под $\Delta l_{стат}$ нужно понимать прогиб $v_{стат}$ (см. рис.20.3)

Рис.20.3

20.2 Область применения формулы для коэффициента динамичности

1. Из (20.3) видно, что при $F \to 0$ по закону Гука $\Delta l_{стат} \to 0$. Следовательно, коэффициент динамичности $k_{дин}$ будет неограниченно увеличиваться. Одной из причин этого парадокса является то, что при выводе не учитывалась масса самого стержня. А при ударе часть энергии груза передается элементам стержня, которые тоже начинают двигаться, приобретая кинетическую энергию. Приближенно это энергия учитывается в следующей уточненной формуле:

$$k_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{|\Delta l|_{стат}} \cdot \frac{m}{m + cm_0}}. \qquad (20.6)$$

Здесь m-масса груза ($m = F/g$), m_0-масса стержня, c - поправочный коэффициент, зависящий от способа закрепления и вида удара (продольного или поперечного).

Например, при поперечном ударе по шарнирно опертой балке $c \approx 0,5$, при продольном ударе $c \approx 0,33$. При продольном ударе по стержню, массу которого можно считать расположенной в точке удара, коэффициент c=1.

2. При вычислении коэффициента динамичности использовался закон Гука, поэтому если $\sigma_{дин} > \sigma_{пц}$, то этой формулой пользоваться нельзя.

3. Исследования показали, что при $k_{дин} > 100$ формулу (20.5) также нельзя применять, поскольку при этом могут появляться местные и неупругие деформации. Кроме того, при $k_{дин} > 100$ в теле большую роль начинают играть ударные волны, которые не были учтены при выводе формулы (20.5).

20.3 Выражение коэффициента динамичности через скорость ударяющего тела

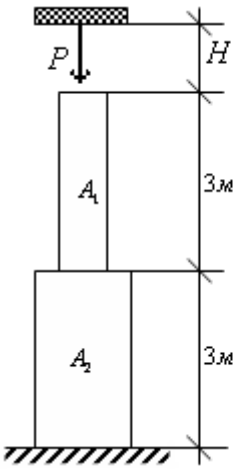
Пусть тело движется со скоростью v_0. Для преобразования формулы (20.5) применим следующее рассуждение. Если тело падает с высоты *H*, то его скорость v и высота падения *H* связаны соотношением:

$$v^2 = 2gH .$$

Найдя отсюда *2H* и подставляя в (20.6), получим:

$$k_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \cdot (\Delta l_{стат})} \cdot \frac{m}{m + c \cdot m_0}} \qquad (20.7)$$

<u>*Пример:*</u> Проверить прочность бетонной колонны, если $[\sigma]_{сж} = 0{,}1\ т/см^2$



$P = 1т$

$H = 10\ м^2$

$A_1 = 100\ см^2$

$A_2 = 200\ см^2$

$E = 100\ т/см^2$

Рис.20.4

<u>*Решение*</u>: Из расчетной схемы видно, что

$$(\sigma_{стат})_{\max} = \frac{(N_1)_{стат}}{A_1} = \frac{1\,т}{100\,см^2} = 0{,}01\ т/см^2 .$$

Тогда $(\sigma_{дин})_{\max} = k_{дин} \cdot 0{,}01\ т/см^2$.

Вычислим $k_{дин}$. Для этого сначала найдем $\Delta l_{стат}$:

$$\left|\Delta l_{стат}\right| = \left|\Delta l_1 + \Delta l_2\right| = \frac{1\,т \cdot 3м}{100\ т/см^2 \cdot 100\,см^2} + \frac{1\,т \cdot 3\,м}{100\ т/см^2 \cdot 200\,см^2} = \left(3 + \frac{3}{2}\right) \cdot 10^{-2}\,см = 0,045\,см\,.$$

По формуле(20.5), получаем:

$$k_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10}{0,045}} = 1 + \sqrt{445} = 1 + 21 = 22\,.$$

Таким образом:

$$\sigma_{дин} = 22 \cdot 0,01\ т/см^2 = 0,22\ т/см^2\,.$$

Поскольку $[\sigma]_{сж} = 0,1\ т/см^2$, то имеем большую перегрузку.

20.4. Принцип Даламбера

Если ускорение элементов конструкции известны, то динамическую задачу можно свести к статической. На многочисленных экспериментах, сравнениях и расчетах было показано, что добавление силы инерции к внешним нагрузкам приводит динамическую задачу к обычной статической. То есть, если к внешним силам добавить силы инерции в уравнениях равновесия, то скорости и перемещения, найденные из этих уравнений согласуются с замеренными в эксперименте.

Рассмотрим применение этого принципа на простом примере.

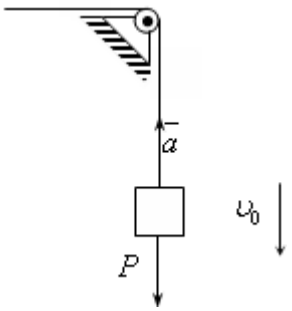


Рис.20.5

Пусть груз опускается со скоростью υ_0. Пусть в результате торможения груз остановился за время Δt. Найдем силу натяжения троса. Пренебрежем силой веса троса и силами ее инерции.

Кроме силы веса груза при торможении появиться сила его инерции:

$$\overline{F}_{инерции} = -m\bar{a}\,.$$

Здесь $m = P/g$ - масса груза, а ускорение a вычисляется по формуле:

$$a = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{\upsilon_0}{\Delta t}\,.$$

Таким образом, $F_{инерции} = m\dfrac{\upsilon_0}{\Delta t}$.

Сила натяжения будет:

$$N = P_{стат} + F_{инерции} = mg + m\frac{\upsilon_0}{\Delta t} = m\left(g + \frac{\upsilon_0}{\Delta t}\right).$$

Ускорение можно вычислить также и в задачах о вращении тел. Пусть ω - угловая скорость, тогда центростремительное ускорение

$$a = \omega^2 \cdot R .$$

Следовательно, для этих задач, тоже можно вычислить силу инерции. В других случаях необходимо решать дифференциальные уравнения вида:

$$F = m\ddot{x}, \qquad (20.9)$$

где x – перемещение массы m.

20.5. Колебания упругих стержней

Колебания подразделяются **на свободные и вынужденные**.

Свободные колебания возникают после кратковременного приложения внешней силы.

Вынужденные колебания вызываются переменами во времени нагрузками.

Для простоты будем считать, что масса стержня намного меньше массы груза, поэтому силами инерции элементов стержня пренебрегаем.

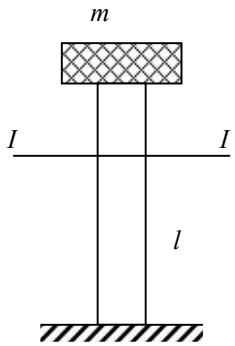


Рис.20.6.

20.5.1. Свободные колебания

Приложим кратковременную нагрузку и удалим ее. Поскольку внешних сил нет, то колебания существуют по причине наличия сил инерции. Рассмотрим сечение I-I.

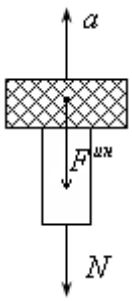


Рис.20.7

На него действует сила растяжения N. Если груз движется с некоторым ускорением a, то на груз действует сила инерции

$$\overline{F}_{инер} = -\overline{a} \cdot m .$$

Запишем условие равенства нулю всех сил.

$$\sum F = 0 .$$

$$\boxed{N + F_{инер} = 0 .} \qquad (20.10)$$

Выразим N и $F_{инер}$ через удлинение стержня. Имеем закон Гука:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{A \cdot E} \qquad \Rightarrow \qquad N = \frac{\Delta l}{l} \cdot A \cdot E . \qquad (20.11)$$

С другой стороны перемещение u груза это и есть величина удлинения Δl. Из теоретической механики известно, что ускорение и $F_{инер}$ вычисляются по формуле (точка означает дифференцирование по времени):

$$\begin{cases} a = \ddot{u} = \Delta \ddot{l} \\ F_{инер} = \Delta \ddot{l} \cdot m \end{cases} \qquad (20.12)$$

Подставим в (20.10):

$$\frac{\Delta l}{l} \cdot A \cdot E + \Delta \ddot{l} \cdot m = 0 \ \Big| \div m$$

Деля на m и вводя обозначение $\omega^2 = \dfrac{A \cdot E}{m \cdot l}$, получим следующее уравнение относительно Δl:

$$\Delta \ddot{l} + \Delta l \cdot \omega^2 = 0 .$$

Решение этого уравнения (которое называется **уравнением свободных колебаний)** имеет вид (это легко проверить путем подстановки)

$$\Delta l = B \cdot Sin\, \omega t + C \cdot Cos\, \omega t .$$

Картина зависимости Δl от времени для разных ω приведен на рис.20.8.

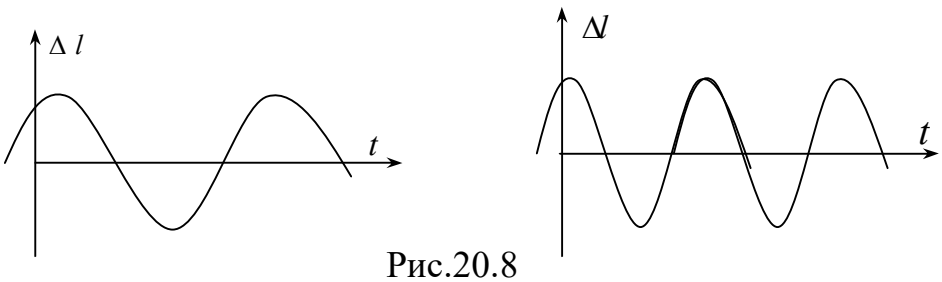


Рис.20.8

Коэффициент ω характеризует то, насколько часто повторяется волна синусоиды в каком-либо интервале времени. Чем больше ω, тем чаще повторяется волна синусоиды, поэтому ω называют частотой свободных колебаний стержня. Например, на рисунке 20.8 справа волн больше, значит ω для нее больше.

Константы B и C определяются из начальных условий, например, если при $t=0$ оттянуть стержень на величину Δl_0, а затем отпустить, то имеем следующие начальные условия:

$$\begin{cases} \Delta l(0) = \Delta l_0 \\ \Delta \dot{l}(0) = 0 \end{cases}$$

Подставим в эти условия наше решение:

$$\begin{cases} B \cdot Sin\,\omega \cdot 0 + C \cdot Cos\,\omega \cdot 0 = \Delta l_0 \\ B \cdot \omega \cdot Cos\,\omega \cdot 0 - C \cdot \omega \cdot Sin\,\omega \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

Получим:

$$B = 0, \quad C = \Delta l_0 \ .$$

Таким образом:

$$\Delta l = \Delta l_0 \cdot Cos\,\omega t \ .$$

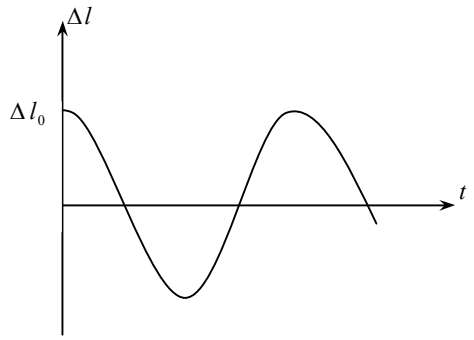


Рис.20.9

График зависимости Δl от времени приведен на рис.20.9.

Примечание. Величина ω является наиболее важной характеристикой сооружения, поскольку она определяет возможность появления резонанса от воздействия внешних нагрузок.

20.5.2. Вынужденные колебания

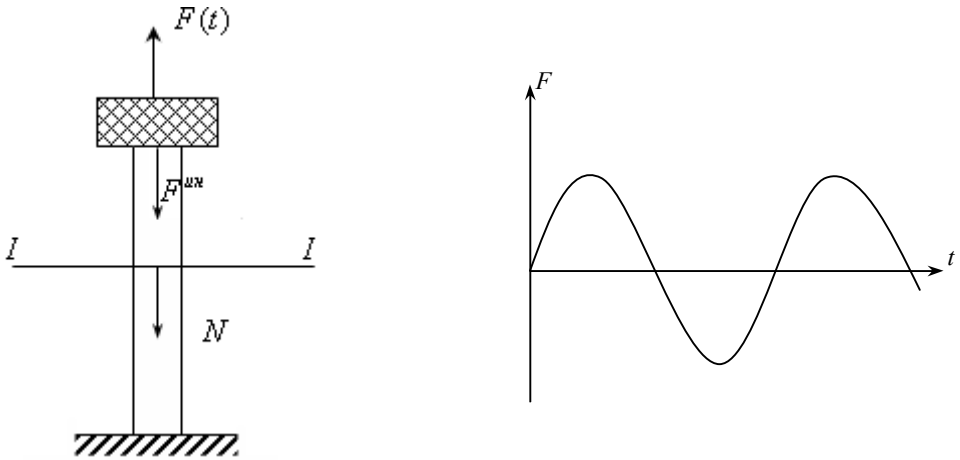


Рис.20.10

Рассмотрим случай, когда к грузу приложена внешняя сила $F(t)$, переменная во времени. Исследуем наиболее опасный случай, когда она является периодической:

$$F(t) = F_0 \cdot Sin(\omega_0 t)\,. \qquad (20.13)$$

Коэффициент ω_0 характеризует то, насколько часто меняется направление воздействия силы $F(t)$.

Запишем уравнение равновесия верхней части стержня

$$-N - F^{ин} + F(t) = 0\,.$$

Подставляя сюда (20.11), (20.12), (20.13), получим:

$$-\frac{\Delta l}{l} \cdot A \cdot E - m \cdot \Delta \ddot{l} + F_0 \cdot Sin(\omega_0 t) = 0\ .$$

Поделив на m, получаем уравнение, которое называется **уравнением вынужденных колебаний:**

$$\Delta \ddot{l} + \Delta l \cdot \omega^2 - \frac{F_0}{m} Sin(\omega_0 t) = 0\,. \qquad (20.14)$$

Ищем решение в виде:

$$\Delta l = B \cdot Sin\ \omega_0 t + C \cdot Cos\ \omega_0 t\,.$$

Тогда

$$\Delta \dot{l} = B \cdot \omega_0 \cdot Cos\ \omega_0 t - C \cdot \omega_0 \cdot Sin\ \omega_0 t,$$

$$\Delta \ddot{l} = -B \cdot \omega_0^2 \cdot Sin\ \omega_0 t - C \cdot \omega_0^2 Cos\ \omega_0 t$$

Подставляя в (20.14), находим:

$$-B \cdot \omega_0^2 \cdot Sin\,\omega_0 t - C \cdot \omega_0^2 \cdot Cos\,\omega_0 t + \omega^2 \cdot B \cdot Sin\,\omega_0 t + \omega^2 \cdot C \cdot Cos\,\omega_0 t - \frac{F_0}{m} Sin\,\omega_0 t = 0\,,$$

$$\left(-B \cdot \omega_0^2 + \omega^2 \cdot B - \frac{F_0}{m}\right) \cdot Sin\,\omega_0 t + \left(-C \cdot \omega_0^2 + \omega^2 \cdot C\right) \cdot Cos\,\omega_0 t = 0\,.$$

Чтобы это уравнение выполнялось в любое время, скобки должны быть равны нулю. Отсюда получаем:

$$\begin{cases} -B \cdot \omega_0^2 + \omega^2 \cdot B - \dfrac{F_0}{m} = 0 \\ -C \cdot \omega_0^2 + \omega^2 \cdot C = 0 \qquad \Rightarrow \quad C = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения находим:

$$B = \frac{F_0}{m(\boldsymbol{\omega}^2 - \boldsymbol{\omega}_0^2)}\,.$$

<u>*Выводы:*</u> как видно из выражения для B, если собственная частота колебания стержня ω будет приближаться по величине к частоте изменения

внешней силы ω_0, то B становится неограниченно большим, следовательно, удлинение $\Delta l = B \cdot Sin\,\omega_0 t$ становится тоже неограниченно большим.

<u>Определение</u>: это явление называется **<u>резонансом</u>**.

<u>Способы борьбы с резонансом</u>

<u>Первый способ</u>. Для обеспечения неравенства $\omega \neq \omega_0$ можно изменить размеры стержня так, чтобы $\omega^2 = \dfrac{A \cdot E}{m \cdot l}$ сильно отличалось от ω_0. Это можно сделать, изменив или длину, или площадь поперечного сечения.

<u>Второй способ</u>. Из технологических или других соображений может не допускаться изменение геометрических характеристик сооружения. Тогда используется другой способ - *<u>установка демпферов</u>*. Демпфер – это конструкция, гасящая колебания, например, цилиндр, наполненный жидкостью и с поршнем внутри него:

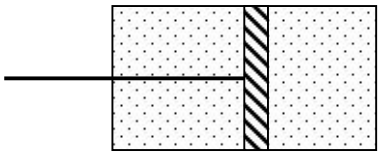


Рис.20.11

20.5.3 Вынужденные колебания стержня с демпфером

Для тел, которые двигаются в жидкости, Аристотелем был открыт закон, гласящий: **чем больше сила, приложенная к телу, тем больше скорость его движения в жидкости**.

Для нашего случая схема установки демпферов представлена на левом рисунке 20.12.

Сделаем сечение *I-I* и рассмотрим верхнюю часть нашего стержня.

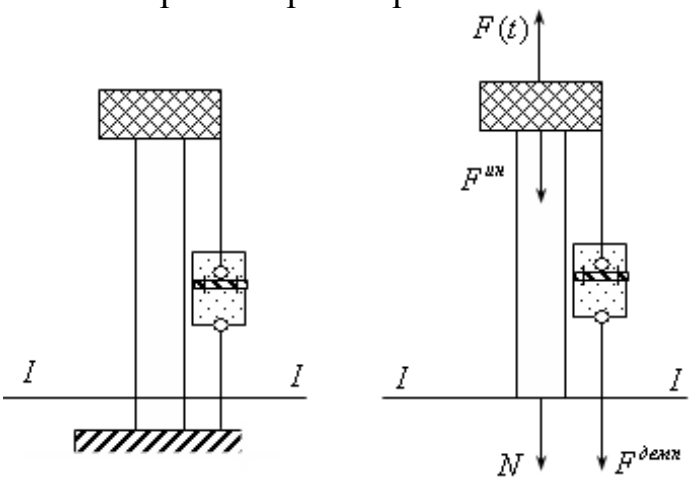


Рис.20.12

Выразим $F^{демп}$ через перемещение груза. Считаем абсолютно жесткими стержни, соединяющие демпфер с грузом и основанием. Тогда перемещение поршня совпадает с перемещением груза.

Согласно закону движения тела в вязкой жидкости:

$$\Delta \dot{l} = \frac{F^{демп}}{\eta}, \tag{20.15}$$

где η - коэффициент вязкости. Отсюда:

$$F^{демп} = \Delta \dot{l} \cdot \eta . \tag{20.16}$$

Запишем уравнение равновесия верхней части нашего стержня:

$$-N - F^{демп} - F^{ин} + F = 0$$

$$-\frac{\Delta l}{l} AE - \Delta \dot{l} \cdot \eta - \Delta \ddot{l} \cdot m + F_0 \cdot Sin\omega_0 t = 0 \quad \Big| \div(-m)$$

$$\Delta \ddot{l} + \Delta \dot{l} \frac{\eta}{m} + \Delta l \cdot \omega^2 - \frac{F_0}{m} Sin\ \omega_0 t = 0 \tag{20.17}$$

Решение ищем в виде:

$$\Delta l = B \cdot Sin\ \omega_0 t + C \cdot Cos\ \omega_0 t .$$

Подставляя в (20.17), получим:

$$-B \cdot \omega_0^2 \cdot Sin\ \omega_0 t - C \cdot \omega_0^2 \cdot Cos\ \omega_0 t + B \cdot \omega_0 \cdot Cos\ \omega_0 t \cdot \frac{\eta}{m} - C \cdot \omega_0 \cdot Sin\ \omega_0 t \cdot \frac{\eta}{m} +$$

$$+ B \cdot \omega^2 \cdot Sin\ \omega_0 t + C \cdot \omega^2 \cdot Cos\ \omega_0 t - \frac{F_0}{m} Sin\ \omega_o t = 0$$

Собирая множители при $Sin\ \omega_0 t$ и $Cos\ \omega_0 t$ получим:

$$\left[B\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) - C \cdot \omega_0 \cdot \frac{\eta}{m} - \frac{F_0}{m} \right] \cdot Sin\ \omega_0 t + \left[C\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) + B \cdot \omega_0 \cdot \frac{\eta}{m} \right] \cdot Cos\ \omega_0 t = 0 .$$

Чтобы уравнение удовлетворялось в любой момент времени *t,* квадратные скобки должны быть равны нулю. Отсюда получаем систему:

$$\begin{cases} B\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) - C \cdot \omega_0 \dfrac{\eta}{m} = \dfrac{F_0}{m} \\ B\left(\omega_0 \dfrac{\eta}{m}\right) + C \cdot (\omega^2 - \omega_0^2) = 0 \end{cases}$$

Выразим *C* из 2-го уравнения:

$$C = \frac{-\omega_0 \cdot \eta}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} B \,. \qquad (20.18)$$

Подставляя его в первое уравнение, получим:

$$B(\omega^2 - \omega_0^2) + B\frac{(\omega_0\eta)^2}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)} = \frac{F_0}{m},$$

Отсюда получаем, что

$$B = \frac{F_0 \cdot m \cdot (\omega^2 - \omega_0^2)}{m^2\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) + \left(\omega_0\eta\right)^2}.$$

Из выражения (20.18) находим *C:*

$$C = -\frac{F_0 \cdot \omega_0 \cdot \eta}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2) + \omega_0^2\eta^2}.$$

<u>Выводы из решения</u><u>*:*</u> Как видно, в знаменателе стоит сумма квадратов двух выражений, следовательно, знаменатель никогда не будет равен 0, таким образом, явления резонанса никогда не будет.

Однако при $\omega = \omega_0$, если вязкость η демпфера мала, то коэффициент *C* будет очень большой. Поэтому для того, чтобы перемещения были малы, вязкость демпфера должна быть достаточно велика.

<u>*Примечание*</u>: на сегодня масляные демпферы требуют больших затрат по обслуживанию, поэтому ведутся исследования по отысканию податливых конструкционных материалов, которые обладали бы вязкими свойствами, достаточными для демпфирования. Такое свойство материалов называют внутренним трением, им обладают практически все материалы, но в разной степени. Вязкие свойства проявляются в них ярче при высоких температурах.

21. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ И ЕЁ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИ РАСЧЕТЕ КОНСТРУКЦИЙ

Основы современной теории предложил А.А.Гвоздев в 30-е годы при разработке методов расчета железобетонных конструкций. В отличие от обычного подхода теории сопротивления материалов, называемого методом расчета **по рабочему состоянию** на стадии упругого деформирования тела (часто именуемого также **методом расчета по допустимым напряжениям**), эта теория основана на использовании пластических свойства материалов и позволяет определить разрушающую нагрузку.

Основной постулат теории заключается в следующем:

Если в каком то малом элементе тела (стержня), наступает состояние, при котором начинается текучесть, то этот элемент не перестает работать, а продолжает сопротивляться с постоянным напряжением:

$$\sigma = \sigma_T .$$

Разрушением считается состояние не разделения на части, а состояние, при котором происходит переход конструкции **в механизм**, то есть в состояние, при котором она уже не может удерживать **дополнительную нагрузку** и деформируется неограниченно. Рассмотрим некоторые примеры.

21.1. Несущая способность стержневой конструкции

Пусть плита подвешена на двух стержнях. Необходимо найти нагрузку $P*$, которую может выдержать данная конструкция.

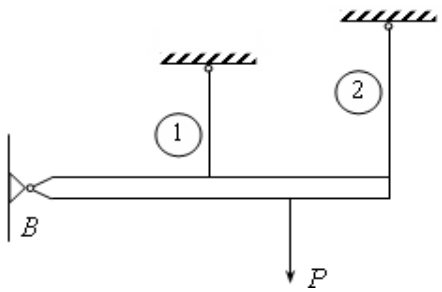


Рис.21.1

Ясно, что плита начнет неограниченно перемещаться (вращаясь около опоры) только тогда, когда оба стержня потекут. Тогда в первом стержне $N_1 = \sigma_T \cdot A_1$ и во втором: $N_2 = \sigma_T \cdot A_2$.

Введем силовую схему, заменяя противодействие опоры реакциями. Проведем сечение *I-I* и заменим действие верхней части конструкции на нижнюю силами N_1, N_2 (см. рис.21.2).

Запишем уравнение равновесия:

$$\sum M_B = 0: \qquad => \qquad N_1 \cdot a - P^* \cdot b + N_2 \cdot c = 0 .$$

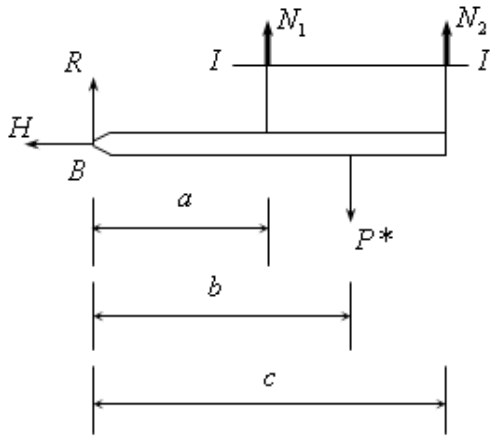


Рис.21.2

Отсюда получаем разрушающую нагрузку:

$$\boxed{P^* = \frac{\sigma_T \cdot A_1 + \sigma_T \cdot A_2 \cdot c}{b}}.$$

21.2 Задача изгиба балки

<u>Предельный момент</u>

Рассмотрим балку (см. рис.21.3), которая изгибается силами P и моментом m.

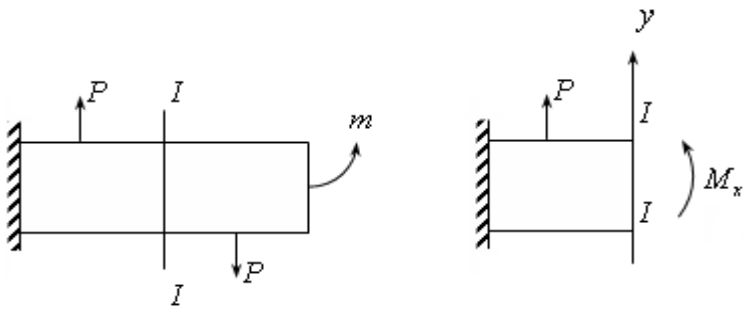


Рис.21.3

Сделаем сечение I-I. На него справа действует изгибающий момент M_x. Нарисуем эпюру σ при разных значениях M_x (см. рис.21.4). При некотором M_x достигаем состояния, при котором $\sigma_{\max} = \sigma_T$. Еще более увеличивая M_x придем к тому, что нижние и верхние волокна будут пластически деформироваться при постоянном $\sigma = \sigma_T$. Дальнейшее увеличение M_x приведет к тому, что по всей высоте волокна перейдут в пластическое состояние (см. рис.21.5). Геометрически это означает, что в данном сечении изгиб балки будет не плавным, а сосредоточенным (см. рис.21.6).

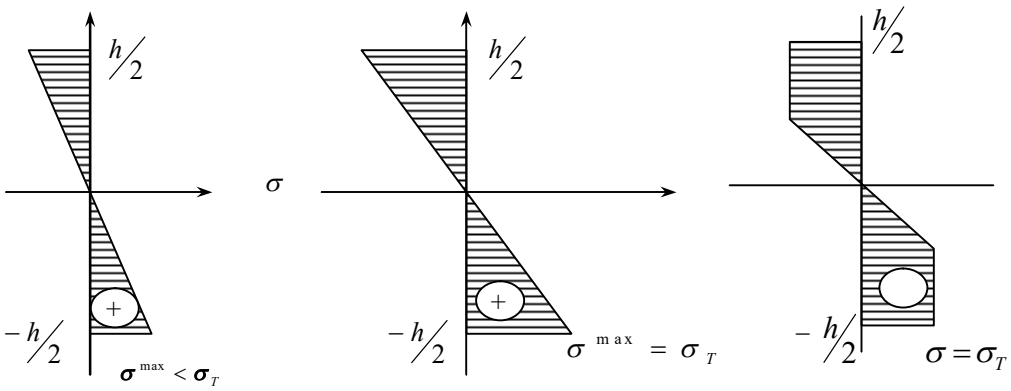


Рис.21.4

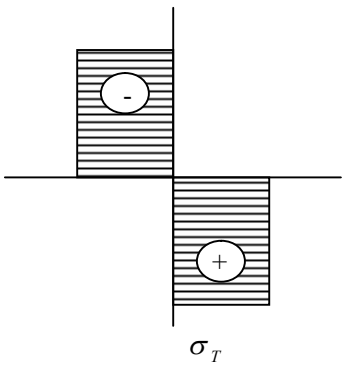


Рис.21.5

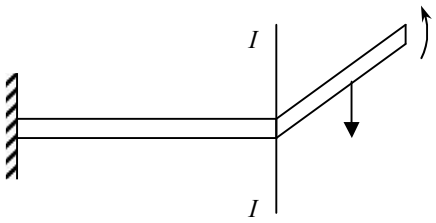


Рис.21.6

Это состояние в сечении называется **предельным**, сечение называют **пластическим шарниром**, а момент, который вызывает такое состояние, также называется **предельным**. Обозначают его через M_T.

Подсчитаем его значение. Как обычно разбиваем сечение на малые площадки. Тогда:

$$dN = \sigma \cdot dA,$$

$$dM_x = dN \cdot y = \sigma \cdot y \cdot dA.$$

В нашем случае $|\sigma| = \sigma_T$. Следовательно:

$$dM_x = \sigma \cdot y \cdot dA$$

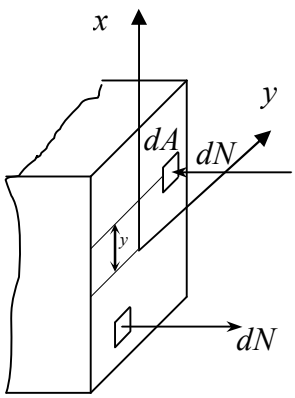


Рис.21.7

Подсчитаем момент для верхней части сечения:

$$M_x = \sum M_x = \int_{A/2} \sigma_T \cdot y \cdot dA = \sigma_T \int_{A/2} y \cdot dA = \sigma_T \cdot (S_x)_{A/2}.$$

Здесь $(S_x)_{A/2}$ - это статический момент верхней половины сечения. Для нижней части получим то же самое. В результате:

$$M_T = 2\sigma_T (S_x)_{A/2}. \qquad (21.1.)$$

Рассмотрим пример отыскания предельной нагрузки $P*$ для статически неопределимой балки (рис.21.8).

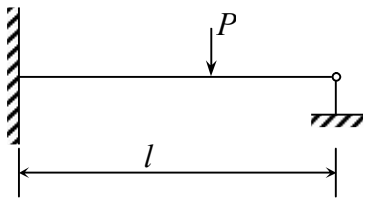


Рис.21.8

Разрушение произойдет тогда, когда под силой и в заделке произойдет пластический излом.

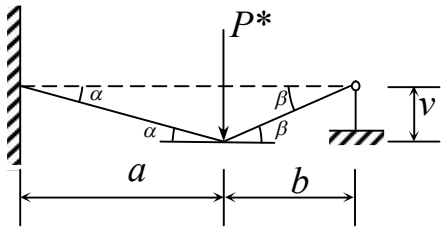


Рис.21.9

Это означает, что под силой и в заделке момент достигает предельного значения M_T. Найдем $P*$ из закона сохранения энергии.

Работа силы $P*$ будет

$$W_P = P* \cdot v.$$

Здесь v – это прогиб под силой (см. рис.21.9). Эта работа тратится на создание пластических шарниров в заделке и под силой. Подсчитаем работу, которую совершает в них момент M_T.

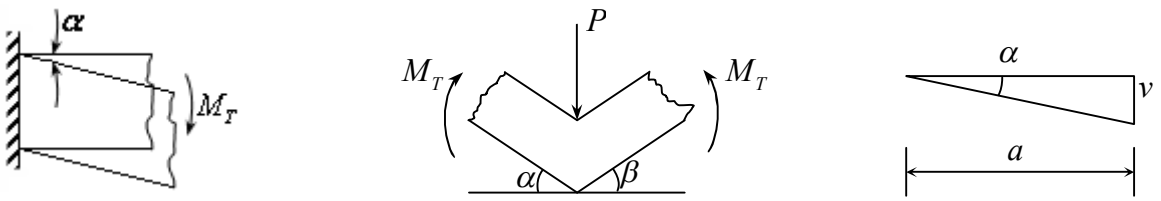


Рис.21.10

В заделке момент повернул стержень на угол α, значит он совершил работу:

$$W_1 = M_T \cdot \alpha .$$

Рассмотрим теперь малый элемент под силой *P*. Тогда:

$$W_2 = M_T \cdot \alpha\,, \qquad W_3 = M_T \cdot \beta\,.$$

Закон сохранения энергии дает:

$$P^* \cdot v = M_T(\alpha + \alpha + \beta),$$

$$P^* = M_T \frac{2\alpha + \beta}{v}.$$

Выразим α и β через v. Так как перемещения малы, то

$$tg\alpha \approx \alpha\,, \quad tg\beta \approx \beta\,.$$

Значит: $$\alpha = \frac{v}{a}, \quad \beta = \frac{v}{b}.$$

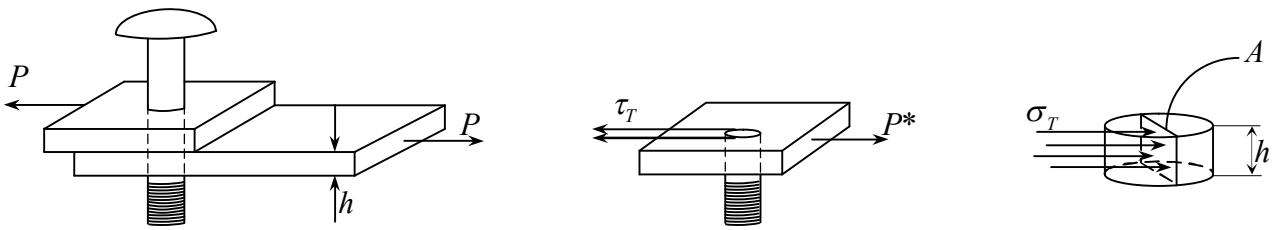
Тогда: $$2\alpha + \beta = v\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Подставляя, получаем:

$$\boxed{P^* = M_T\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right)}.$$

21.3. Применение теории предельного равновесия для расчета болтовых (заклепочных) и сварных соединений

Пусть 2 элемента соединяются болтом. Существует две опасности – **срез** болта и **смятие** пластины или болта.



A) B) C)

Рис.21.11

<u>Разрушение срезом</u>

Считаем, что при разрушении происходит срез болта, ввиду возникновения предельных значений касательного напряжения (рис.21.9 B).

Тогда:

$$P^* = \tau_T \cdot A = \tau_T \cdot \pi \cdot R^2.$$

Если болтов несколько (пусть их n штук), то получим:

$$P^* = n\left(\tau_T \cdot \pi \cdot R^2\right). \qquad (21.2)$$

Теперь можно найти допустимую силу

$$[P] = \frac{P^*}{k} = n\frac{\pi \cdot R^2 \cdot \tau_T}{k} = n \cdot \pi \cdot R^2 \cdot [\tau]. \qquad (21.3)$$

Если же дана проектная сила P, то можно из (21.3) найти количество болтов, обеспечивающих прочность соединения.

<u>Разрушение смятием</u>

Разрушение может произойти в результате смятия самого болта или пластины. Пластина при этом воздействует на болт по сечению A напряжением σ_T (см. рис.21.11 С).

Тогда:

$$\boxed{P^* = \sigma_T \cdot A = \sigma_T \cdot h \cdot 2R}.$$

<u>Расчет сварных соединений</u>

Рассмотрим *<u>продольные швы:</u>*

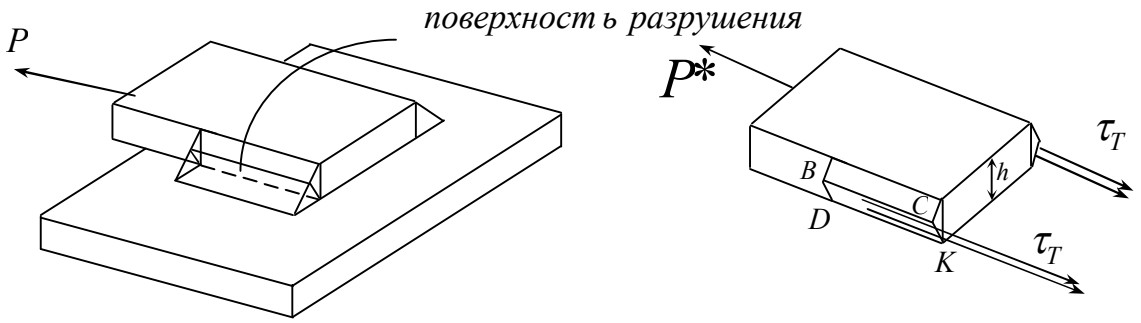


Рис.21.12

Нарисуем разрушенное состояние. Из уравнения равновесия следует, что:

$$P^* = \tau_T \cdot A_{BCDK} + \tau_T \cdot A_{BCDK}.$$

Запишем условие прочности (k - коэффициент запаса):

$$P \le \frac{P^*}{k}.$$

С учетом того, что $[\tau] = \frac{\tau_T}{k}$ отсюда получаем $P \le [\tau] \cdot A_{BCDK} \cdot 2$.

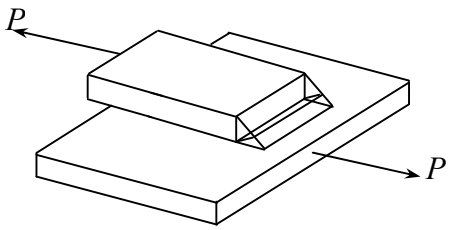
Основной задачей расчета сварных швов является определение минимально-допустимой длины шва. Выражая площадь фигуры $BCDK$ через l найдем:

$$P \le [\tau] \cdot l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot h \cdot 2, \qquad => \qquad l \ \ge \ \frac{P}{\sqrt{2} \cdot [\tau] \cdot h}.$$

Это расчетная длина шва. При изготовлении сварки расчетную длину увеличивают на 1 сантиметр, так как по концам шва всегда образуются микротрещины на глубину порядка 0,5 сантиметров.

<u>Торцевые (или лобовые) швы</u> рассчитываются аналогично по формуле:

$$l \ \ge \ \frac{\sqrt{2}P}{[\tau] \cdot h}.$$



ЛИТЕРАТУРА

1. Терегулов И.Г. «Сопротивление материалов и основ теории упругости и пластичности» М.: Высшая школа, 1984
2. Тимошенко С.П. Механика материалов: Учебник для вузов / Гере, Джеймс Монро. - 2-е изд., стер. - СПб.: Лань, 2002. - 672с
3. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 712с.
4. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов : Учебник для вузов / 11-е изд., стереотип. - М. : МГТУ им.Н.Э.Баумана, 1999. - 592с.
5. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. – М.: «Высшая школа», 2000. – 560с.
6. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. -М.: Изд-во «Наука», 1976. – 607с.
7. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука., ред. Физ.мат.лит. – 1979.- 384с.
8. Варданян Г.С., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов. – М.: Инфра – М., 2003. – 478с.
9. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. -М.: «Высшая школа», 1989. – 624с.
10. Долинский Ф.В., Михайлов М.Н. Краткий курс сопротивления материалов. – М.: «Высшая школа», 1988. – 431с.
11. Копнов В.А., Кривошапко С.Н. Сопротивление материалов. Руководство для решения задач и выполнения расчетно-графических работ. – М.: «Высшая школа», 2005. – 351с.
12. Кочетов В.Т., Кочетов М.В., Павленко А.Д. Сопротивление материалов. – СПб.: БХВ – Петербург, 2004. – 544с.
13. Костенко Н.А., Балясникова С.В., Волошановская Ю.Э. Сопротивление материалов. – М.: «Высшая школа», 2000. – 430с.
14. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: «Наук.думка», 1988. – 736с.
15. Сопротивление материалов /Под редакцией Смирнова А.Ф./ М.: «Высшая школа», 1975. – 480с.
16. Строительная механика. Под редакцией Даркова А.В. - М.: «Высшая школа», 1976. – 600с.
17. Степин П.А. Сопротивление материалов. – М.: «Высшая школа», 1988. – 366с.
18. Серазутдинов М.Н., Островская Э.Н., Петухов Н.П., Сидорин С.Г. Механика. Вопросы теоретической механики, сопротивления материалов, деталей машин. Казань: Центр инновационных технологий, 2007. – 330с.

СОДЕРЖАНИЕ

Рашит Абдулхакович Каюмов

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Редакция и корректировка автора

Редакционно-издательский отдел
Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Подписано к печати		Формат 60x84/16
Тираж 100 экз	Печать ризографическая	Усл.-печ.л.10.6
Бумага офсетная №1	Заказ №	Уч.-изд.л.10,6

Печатно-множительный отдел КГАСУ
420043, Казань, ул.Зеленая,1