Федеральное агентство по образованию

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Кафедра сопротивления материалов и основ теории упругости и пластичности

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛОЖНЫХ СЕЧЕНИЙ СОСТАВНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Методические указания для выполнения расчетно-графического задания студентами специальностей 270102, 270109,270112, 270114,270115, 270201,240400,290600,291000

Казань 2009

УДК 539.2/6
ББК 30.121
К31

К 31 Геометрические характеристики сложных сечений составных стержней. Методические указания для выполнения расчетно-графического задания студентами специальностей 270102, 270109, 270112, 270114, 270115, 270201, 240400, 290600, 291000 / **Р.А. Каюмов, И.З. Мухамедова**. – Казань: КГАСУ. 2009. – 24с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

В пособии систематизировано излагается общий порядок вычисления геометрических характеристик сложных поперечных сечений стержней, состоящих из простых геометрических фигур и стандартных профилей.

Приведены решения некоторых типовых задач, контрольные вопросы, а также основные справочные данные.

Рецензент
Доктор физико-математических наук, профессор кафедры сопротивления материалов и ОТУ
Ю.И.Бутенко

УДК 439.2/6
ББК 30.121

Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 2009

Каюмов Р.А., Мухамедова И.З., 2009

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ

Рассмотрим некоторые основные геометрические характеристики поперечных сечений. Пусть дано произвольное поперечное сечение бруса в системе координат OXY. Выделим элементарную площадку dA с координатами x и y. Введем следующие соотношения и определения:

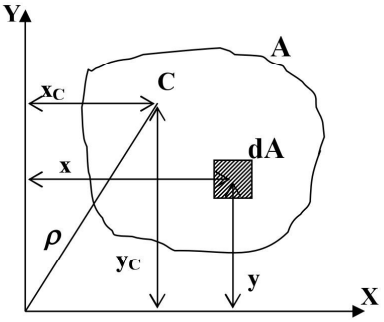


Рис.1

1) *Площадь плоской фигуры* можно представить в виде суммы площадок dA. Это записывается в виде:

$$A = \int_A dA = \iint_A dxdy, \qquad [см^2]$$

2) *Статические моменты* относительно осей X и Y определяются как суммы произведений плеча площадки dA на величину dA:

$$S_X = \int_A y\,dA = \iint_A y\,dx\,dy, \quad S_Y = \int_A x\,dA = \iint_A x\,dx\,dy, \qquad [см^3]$$

3) На основании известной из теоретической механики теоремы о моменте равнодействующей статические моменты S_X, S_Y могут быть вычислены по более простым формулам $S_X = y_C A$, $S_Y = x_C A$. Отсюда вытекает, что *центр тяжести плоской фигуры* определяется как:

$$x_C = \frac{S_Y}{A}, \qquad y_C = \frac{S_X}{A}, \qquad [см]$$

4) *Осевыми* J_X, J_Y и *центробежным* J_{XY} *моментами инерции фигуры* называются геометрические характеристики численно равные интегралам:

$$J_X = \int_A y^2\,dA = \iint_A y^2\,dxdy,$$
$$J_Y = \int_A x^2\,dA = \iint_A x^2\,dxdy, \qquad [см^4]$$
$$J_{XY} = \int_A xy\,dA = \iint_A xy\,dxdy,$$

5) *Полярный момент инерции фигуры* вводится соотношением:

$$J_p = \int_A \rho^2\,dA = \iint_A \rho^2\,dxdy = \iint_A (x^2 + y^2)\,dxdy = J_X + J_Y, \qquad [см^4]$$

6) В некоторых расчетах вводятся *радиусы инерции плоской фигуры*. Относительно осей X и Y они имеют вид:

$$i_X = \sqrt{\frac{J_X}{A}}, \qquad i_Y = \sqrt{\frac{J_Y}{A}}, \qquad [см]$$

Замечание: *Статические и центробежный моменты в зависимости от выбора системы координат могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. Осевые и полярные моменты инерции всегда положительны (это видно из их определений).*

ИЗМЕНЕНИЕ ГЕМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ

а) Связь моментов относительно параллельных осей (параллельный перенос осей координат)

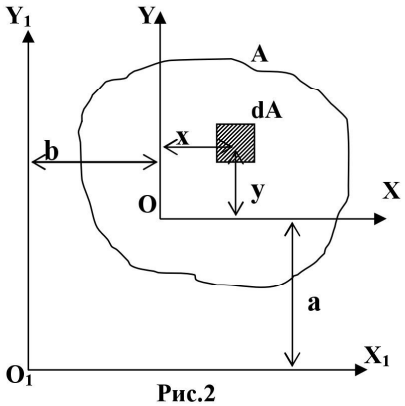


Рис.2

Пусть известны все геометрические характеристики сечения A относительно осей X и Y, которые параллельны осям X_1 и Y_1 (рис.2).

Координаты элементарной площадки dA в системе координат $O_1X_1Y_1$ примут вид:

$$x_1 = x + b, \qquad y_1 = y + a,$$

Статические моменты сечения A относительно системы координат $X_1O_1Y_1$ имеют вид:

$$\begin{aligned} S_{X_1} &= \int_A [y + a]dA = S_X + Aa, \\ S_{Y_1} &= \int_A [x + b]dA = S_Y + Ab. \end{aligned} \qquad (1)$$

Оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются ***центральными осями****. Относительно центральной оси статический момент равен нулю.*

Таким образом, если оси X и Y - центральные, то $S_X = S_Y = 0$, из формулы (1) следует:

$$S_{X_1} = Aa, \qquad S_{Y_1} = Ab.$$

Моменты инерции относительно системы координат $X_1O_1Y_1$ определяются как:

$$J_{X_1} = \int_A [y+a]^2\, dA = J_X + 2aS_X + Aa^2,$$

$$J_{Y_1} = \int_A [x+b]^2\, dA = J_Y + 2bS_Y + Ab^2, \qquad (2)$$

$$J_{X_1Y_1} = \int_A [y+a][x+b]dA = J_{XY} + bS_X + aS_Y + Aab.$$

Если оси X_C и Y_C - центральные (рис.3), то $S_{X_C} = S_{Y_C} = 0$, и соотношение (2) упрощается:

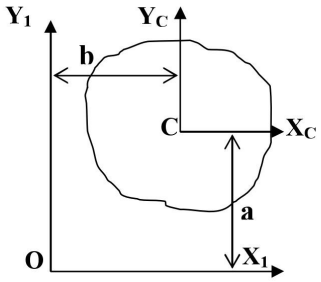


Рис.3

$$J_{X_1} = J_{X_C} + Aa^2,$$

$$J_{Y_1} = J_{Y_C} + Ab^2, \qquad (3)$$

$$J_{X_1Y_1} = J_{X_CY_C} + Aab.$$

Если наоборот, необходимо найти $J_{X_C}, J_{Y_C}, J_{X_CY_C}$, то из (3) вытекает:

$$J_{X_C} = J_{X_1} - Aa^2,$$

$$J_{Y_C} = J_{Y_1} - Ab^2, \qquad (4)$$

$$J_{X_CY_C} = J_{X_1Y_1} - Aab.$$

<u>б) Поворот осей координат</u>

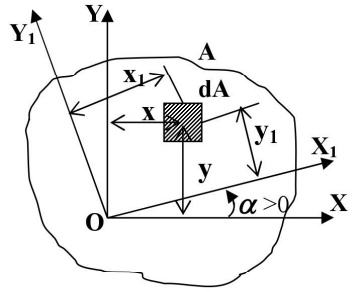


Рис.4

Повернем оси X, Y на угол α против часовой стрелки, считая угол поворота осей в этом направлении положительным. Получим оси X_1, Y_1.

Координаты произвольной элементарной площадки x_1 и y_1 выразятся через старые координаты x и y следующим образом:

$$x_1 = x\,Cos\alpha + y\,Sin\alpha,$$

$$y_1 = y\,Cos\alpha - x\,Sin\alpha$$

Статические моменты в новых осях примут вид:

$$S_{X_1} = S_X\,Cos\alpha - S_Y\,Sin\alpha, \quad S_{Y_1} = S_X\,Sin\alpha + S_Y\,Cos\alpha$$

Моменты инерции относительно осей X_1 и Y_1 повернутых относительно первоначальных X, Y на угол α примут вид:

$$J_{X_1} = \int_A y_1^2\, dA = J_X\, Cos^2\alpha + J_Y\, Sin^2\alpha - J_{XY} Sin\, 2\alpha,$$

$$J_{Y_1} = \int_A x_1^2\, dA = J_X\, Sin^2\alpha + J_Y\, Cos^2\alpha + J_{XY} Sin\, 2\alpha, \qquad (5)$$

$$J_{X_1Y_1} = \int_A x_1 y_1\, dA = J_{XY} Cos\, 2\alpha + ((J_X - J_Y)\, Sin\, 2\alpha)/2.$$

Следствие: *Из (5) вытекает, что сумма моментов инерции относительно любых взаимно перпендикулярных осей* X *и* Y *не меняется при их повороте*:

$$J_X + J_Y = J_{X_1} + J_{Y_1} \qquad (6)$$

Оси, относительно которых центробежный момент инерции обращается в нуль, называются ***главными осями инерции***. *Относительно этих осей осевые моменты инерции принимают экстремальные значения и называются* ***главными моментами инерции*** *и обозначаются* $J_{\max}$ *и* $J_{\min}$.

Действительно, если, например, взять первую производную от $(J_{X_1})'_\alpha$, то из условия $J_{X_1Y_1} = 0$ вытекает, что $(J_{X_1})'_\alpha = 0$. Таким образом это означает, что J_{X_1} будет принимать экстремальное значение относительно главной оси X_1. Аналогично, момент инерции J_{Y_1} будет принимать экстремальное значение относительно главной оси Y_1.

Таким образом, если оси X_1, Y_1 - главные оси инерции, то главные моменты инерции можно определить из первых двух соотношений (5), а последнее соотношение в (5) для центробежного момента должно обращаться в нуль ($J_{X_1Y_1} = 0$).

Замечание: Главные моменты инерции можно определить и по следующим выражениям:

$$J_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{J_X + J_Y}{2} \pm \sqrt{\frac{(J_X - J_Y)^2}{4} + J_{XY}^2} \qquad (7)$$

Главные оси инерции, проходящие через центр тяжести сечения, называются ***главными центральными осями.***

Таким образом, согласно третьему соотношению (5) угол α между главной осью X_1 и осью X определится как:

$$tg\,2\alpha = \frac{2J_{XY}}{J_Y - J_X} \tag{8}$$

Угол α *считается положительным, если он отложен против хода часовой стрелки от оси* OX.

ПОРЯДОК ВЫЧИСЛЕИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

Цель работы:

Найти положение главных центральных осей и вычислить главные моменты инерции составного сечения.

Исходные данные к выполнению расчетно-графического задания выбираются из сборника заданий к расчетно-графическим работам по курсу «Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности» согласно шифру, выданного каждому студенту преподавателем. Это пособие также определяет объем и последовательность выполнения работы.

При расчетах используются таблицы сортамента (части стандартных профилей прямоугольниками не заменять).

Порядок выполнения работы: Построим данное сечение в выбранном масштабе, согласно всем необходимым для данного задания геометрическим параметрам.

1) Выберем первоначальные оси координат OXY. Для того, чтобы упростить путь вычисления статических моментов и моментов инерции целесообразно направить оси так, чтобы все сечение находилось в первой четверти относительно осей OXY.

2) Данное поперечное сечение состоит из простейших геометрических фигур: прямоугольника, двутавра (швеллера) и равнобокого уголка.

В каждой простой фигуре проведем собственные центральные оси $C_iX_iY_i$, параллельные осям OXY. В первоначальных осях OXY определим координаты центров тяжести каждой простой фигуры x_{C_i}, y_{C_i}.

3) Найдем положение центра тяжести всего сечения в первоначальных осях OXY, т.е. координаты x_C, y_C:

$$x_C = \frac{S_Y}{A} = \frac{A_1 x_{C_1} + A_2 x_{C_2} + A_3 x_{C_3}}{A_1 + A_2 + A_3},$$
$$y_C = \frac{S_X}{A} = \frac{A_1 y_{C_1} + A_2 y_{C_2} + A_n y_{C_3}}{A_1 + A_2 + A_3}. \tag{9}$$

где A_i - площадь i - ой фигуры.

Проведем через центр тяжести (точку C) оси X_C и Y_C параллельно первоначальным осям X, Y. Это будут центральные оси всего сечения.

4) Вычислим моменты инерции каждой простой фигуры относительно первоначальных осей OXY по формулам параллельного переноса (3):

$$\begin{aligned} J_X^{(i)} &= J_{X_i}^{(i)} + A_i\, y_{C_i}^2 \ , \\ J_Y^{(i)} &= J_{Y_i}^{(i)} + A_i\, x_{C_i}^2 , \qquad (i = 1,2,3) \\ J_{XY}^{(i)} &= J_{X_iY_i}^{(i)} + A_i\, x_{C_i}\, y_{C_i} . \end{aligned} \tag{10}$$

где $J_X^{(i)}$, $J_Y^{(i)}, J_{XY}^{(i)}$ - осевые и центробежный моменты инерции i - ой фигуры относительно первоначальных осей.

$J_{X_i}^{(i)}$, $J_{Y_i}^{(i)}, J_{X_iY_i}^{(i)}$ - осевые и центробежный моменты инерции i - ой фигуры относительно собственных центральных осей.

Для всего сложного сечения моменты инерции относительно осей OXY определятся суммированием:

$$\begin{aligned} J_X &= J_X^{(1)} + J_X^{(2)} + \ldots + J_X^{(n)}, \\ J_Y &= J_Y^{(1)} + J_Y^{(2)} + \ldots + J_Y^{(n)}, \\ J_{XY} &= J_{XY}^{(1)} + J_{XY}^{(2)} + \ldots + J_{XY}^{(n)}. \end{aligned} \tag{11}$$

5) Вычислим моменты инерции всего сечения относительно центральных осей X_C и Y_C согласно формуле (4):

$$\begin{aligned} J_{X_C} &= J_X - A\, y_C^2, \\ J_{Y_C} &= J_Y - A\, x_C^2, \\ J_{X_CY_C} &= J_{XY} - A\, x_C\, y_C . \end{aligned} \tag{12}$$

Если $J_{X_CY_C} \neq 0$, то оси X_C, Y_C будут только центральными осями, но не главными.

6) Определим положение главных центральных осей сечения. Согласно соотношению (8) главная центральная ось сечения X_0 расположена под углом α_0 к центральной оси X_C:

$$tg\,2\alpha_0 = \frac{2J_{X_CY_C}}{J_{Y_C} - J_{X_C}} \tag{13}$$

Положительные значения α_0 откладывают от оси X_C против хода часовой стрелки, отрицательные - по ходу часовой стрелки.

7) Вычислим главные моменты инерции сечения J_{X_0}, J_{Y_0}.

Моменты инерции можно определить по формулам (5):

$$J_{X_0} = J_{X_C}\,Cos^2\alpha_0 + J_{Y_C}\,Sin^2\alpha_0 - J_{X_CY_C}\,Sin\,2\alpha_0,$$
$$J_{Y_0} = J_{X_C}\,Sin^2\alpha_0 + J_{Y_C}\,Cos^2\alpha_0 + J_{X_CY_C}\,Sin\,2\alpha_0, \qquad (14)$$
$$J_{X_0Y_0} = J_{X_CY_C}\,Cos\,2\alpha_0 + ((J_{X_C} - J_{Y_C})\,Sin\,2\alpha_0)/2.$$

Замечание: *Последнее соотношение в (14) проверочное, так как относительно главных центральных осей центробежный момент инерции должен быть равен нулю, т.е.* $J_{X_0Y_0} = 0$.

Главные моменты инерции можно определить и по соотношению (7).

8) Вычислим моменты инерции относительно центральных осей $C\xi\eta$, расположенных под углом β к главным центральным осям CX_0Y_0. Для этого необходимо воспользоваться соотношениями (5) с учетом того, что $J_{X_0Y_0} = 0$:

$$J_\xi = J_{X_0}\,Cos^2\beta + J_{Y_0}\,Sin^2\beta,$$
$$J_\eta = J_{X_0}\,Sin^2\beta + J_{Y_0}\,Cos^2\beta, \qquad (15)$$
$$J_{\xi\eta} = ((J_{X_0} - J_{Y_0})\,Sin\,2\beta)/2$$

9) Произведем проверку вычислений. Для этого нужно воспользоваться соотношением (6):

$$J_{X_C} + J_{Y_C} = J_{X_0} + J_{Y_0} = J_\xi + J_\eta \qquad (16)$$

ПРИМЕР ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

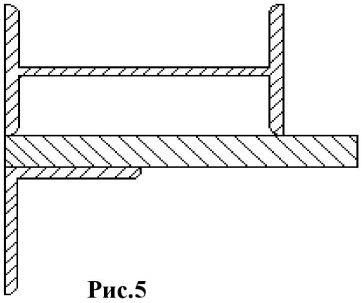


Рис.5

Исходные данные:

Двутавр №16 (ГОСТ 8239-72)
Равнобокий уголок 80 х 80х 6 (ГОСТ 9509-72)
Прямоугольник 200 х 20

РЕШЕНИЕ

1) Расположим составное сечение (рис.6) в первой четверти координатной плоскости ***OXY*** (чтобы в дальнейшем не ошибиться со знаками вычисляемых геометрических характеристик).

2) Пронумеруем фигуры:

прямоугольник - (**фигура 1**), двутавр - (**фигура 2**), равнобокий уголок - (**фигура 3**).

Проведем для каждой фигуры собственные центральные оси $C_iX_iY_i$ (рис.6, рис.11).

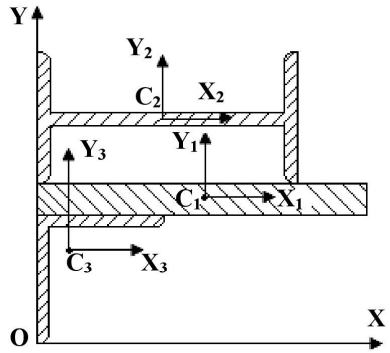


Рис.6

Для прямоугольника и двутавра эти оси будут и главными осями, так как у каждой из этих фигур есть оси симметрии.

Для каждой фигуры найдем все необходимые геометрические характеристики и координаты центра тяжести относительно первоначальных осей OXY .

а) **Прямоугольник (фигура1)**

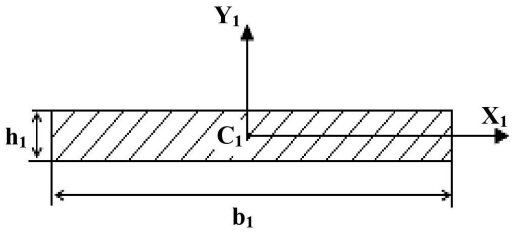


Рис.7

b_1=200мм=20см,

h_1=20мм=2см,

$A_1 = b_1 h_1 = 20 \cdot 2 = 40см^2$,

$J_{X_1}^{(1)} = b_1 h_1^{\,3} / 12 =$

$= 20 \cdot 2^3 / 12 = 13.3см^4$,

$J_{Y_1}^{(1)} = b_1^{\,3} h_1 / 12 =$

$= 20^3 \cdot 2 / 12 = 1333.3см^4$

$J_{X_1Y_1}^{(1)} = 0$ (т.к. оси $C_1X_1Y_1$ являются главными центральными).

б) Двутавр № 16 (фигура 2)

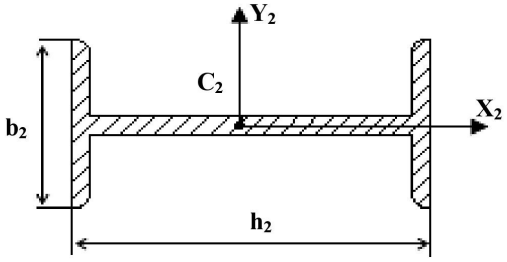


Рис.8

$h_2 = 160мм = 16см$,

$b_2 = 81мм = 8.1см$,

$A_2 = 20.2см^2$, $J_{X_2}^{(2)} = 58.6см^4$,

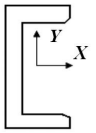
$J_{Y_2}^{(2)} = 873см^4$,

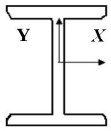
$J_{X_2Y_2}^{(2)} = 0$ (т.к. оси $C_2X_2Y_2$ являются главными центральными).

Замечание: *при выборе* J_X, J_Y *для двутавра и швеллера необходимо учитывать, что их табличное расположение может отличаться от рассматриваемого. В частности, если имеем:*

а) *вертикальное расположение швеллера(двутавра), то:*

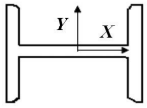
$$J_X = J_x^{табл}$$
$$J_Y = J_y^{табл}$$

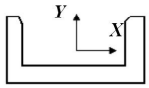




б) *горизонтальное расположение швеллера (двутавра),то:*

$$J_X = J_y^{табл}$$
$$J_Y = J_x^{табл}$$





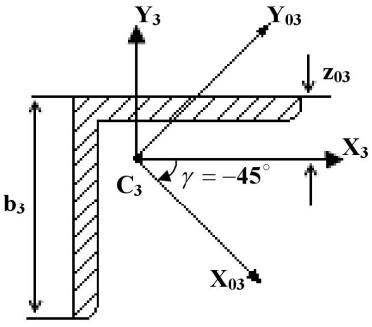


Рис.9

в)Равнобокий уголок 80х80х6 (фигура 3)

$b_3 = 80мм = 8см$, $z_{03} = 2.19см$,

$A_3 = 9.38см^2$,

$J_{X_3}^{(3)} = J_{Y_3}^{(3)} = 57см^4$,

$J_{X_{03}}^{(3)} = J_{\max}^{(3)} = 90.4см^4$,

$J_{Y_{03}}^{(3)} = J_{\min}^{(3)} = 23.5см^4$,

$J_{X_{03}Y_{03}}^{(3)} = 0$ (т.к. оси $C_3X_{03}Y_{03}$ являются главными центральными для равнобокого уголка).

Определим центробежный момент $J_{X_3Y_3}^{(3)}$. Для этого воспользуемся первым (или вторым) соотношением из (14). Знак угла γ определяется направлением поворота от центральной оси к главной.

$\gamma = -45^\circ$, если поворот от оси X_3 к оси X_{03} происходит по часовой стрелке;

$\gamma = +45^\circ$, если поворот от оси X_3 к оси X_{03} происходит против часовой стрелки;

Подставляя в первое соотношение из (14), получим:

$$J_{X_{03}}^{(3)} = J_{X_3}^{(3)} Cos^2\gamma + J_{Y_3}^{(3)} Sin^2\gamma - J_{X_3Y_3}^{(3)} Sin\,2\gamma,$$

$$90.4 = 57\,Cos^2(-45^\circ) + 57\,Sin^2(-45^\circ) - J_{X_3Y_3}^{(3)} Sin(-90^\circ),$$

$$90.4 = 57(Cos^2(-45^\circ) + Sin^2(-45^\circ)) + J_{X_3Y_3}^{(3)},$$

$$90.4 = 57 + J_{X_3Y_3}^{(3)},$$

$$J_{X_3Y_3}^{(3)} = 33.4$$

Таким образом, центробежный момент относительно центральных осей $C_3X_3Y_3$ равен $J_{X_3X_3}^{(3)} = 33.4 см^4$.

Замечание: *знак центробежного момента относительно осей* X, Y *(см.рис.10) определяется в зависимости от расположения уголка относительно этих осей.*

Для уголка в нашем примере (см на рис.10а)), большая часть сечения (заштрихованная) расположена в 1-ой четверти где $x, y > 0$ *и в 3-ей четверти, где* $x, y < 0$.

Таким образом, по определению ($J_{XY} = \int_A xydA$*) для всего сечения центробежный момент* $J_{XY} > 0$.

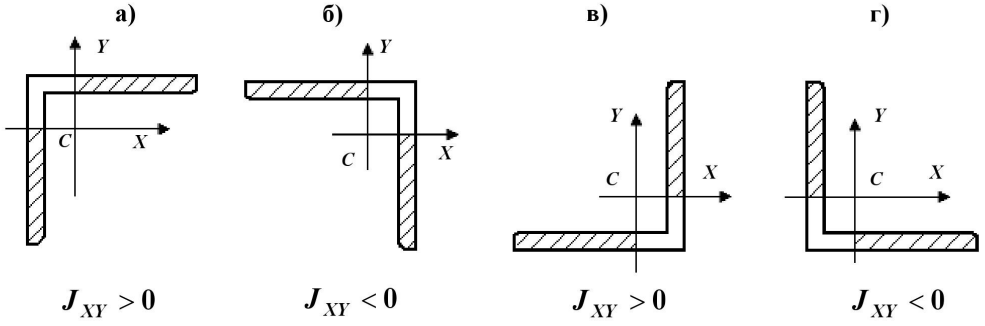


Рис.10

г) Определим координаты центров тяжести x_{C_i}, y_{C_i} у каждой фигуры относительно первоначальных осей OXY:

$$\textit{I фигура}: C_1 \begin{cases} x_{C_1} = b_1/2 = 20/2 = 10\ см, \\ y_{C_1} = b_3 + h_1/2 = 8 + 1 = 9\ см. \end{cases}$$

$$2\textit{фигура}: C_2 \begin{cases} x_{C_2} = h_2/2 = 16/2 = 8\ см, \\ y_{C_2} = b_3 + h_1 + b_2/2 = 8 + 2 + 8.1/2 = 14.05 см. \end{cases}$$

$$3\textit{фигура}: C_3 \begin{cases} x_{C_3} = z_{03} = 2.19\ см, \\ y_{C_3} = b_3 - z_{03} = 8 - 2.19 = 5.81\ см. \end{cases}$$

3) Вычислим координаты центра тяжести всей фигуры относительно первоначальных осей OXY, т.е. координаты x_C, y_C:

$$x_C = \frac{S_Y}{A} = \frac{A_1 x_{C_1} + A_2 x_{C_2} + A_3 x_{C_3}}{A_1 + A_2 + A_3} =$$

$$= \frac{40 \cdot 10 + 20.2 \cdot 8 + 9.38 \cdot 2.19}{40 + 20.2 + 9.38} = \frac{582.14}{69.58} \approx 8.367\ см,$$

$$y_C = \frac{S_X}{A} = \frac{A_1 y_{C_1} + A_2 y_{C_2} + A_3 y_{C_3}}{A_1 + A_2 + A_3} =$$

$$= \frac{40 \cdot 9 + 20.2 \cdot 14.05 + 9.38 \cdot 5.81}{40 + 20.2 + 9.38} = \frac{698.31}{69.58} \approx 10.036\ см.$$

По координатам x_C, y_C находим точку C относительно OXY и через нее проводим центральные оси CX_CY_C, параллельно первоначальным осям (рис.11).

4) Вычислим моменты инерции каждой простой фигуры относительно первоначальных осей OXY по формулам параллельного переноса (10) и просуммируем моменты инерции согласно (11).Таким образом:

$$\begin{cases} J_X^{(1)} = J_{X_1}^{(1)} + A_1 y_{C_1}^2 = 13.33 + 40 \cdot 9^2 \approx 3253\ см^4, \\ J_X^{(2)} = J_{X_2}^{(2)} + A_2 y_{C_2}^2 = 58.6 + 20.2 \cdot 14.05^2 \approx 4046 см^4, \\ J_X^{(3)} = J_{X_3}^{(3)} + A_3 y_{C_3}^2 = 57 + 9.38 \cdot 5.81^2 \approx 374 см^4, \end{cases}$$

Таким образом, $J_X = J_X^{(1)} + J_X^{(2)} + J_X^{(3)} = 3253 + 4046 + 374 \approx 7673\ см^4$.

$$\begin{cases} J_Y^{(1)} = J_{Y_1}^{(1)} + A_1 x_{C_1}^2 = 1333.33 + 40 \cdot 10^2 \approx 5333\ см^4, \\ J_Y^{(2)} = J_{Y_2}^{(2)} + A_2 x_{C_2}^2 = 873 + 20.2 \cdot 8^2 \approx 2166\ см^4, \\ J_Y^{(3)} = J_{Y_3}^{(3)} + A_3 x_{C_3}^2 = 57 + 9.38 \cdot 2.19^2 \approx 102\ см^4, \end{cases}$$

Так, $J_Y = J_Y^{(1)} + J_Y^{(2)} + J_Y^{(3)} = 5333 + 2166 + 102 \approx 7601 см^4$.

$$\begin{cases} J_{XY}^{(1)} = J_{X_1Y_1}^{(1)} + A_1 x_{C_1} y_{C_1} = 40 \cdot 9 \cdot 10 \approx 3600\ см^4, \\ J_{XY}^{(2)} = J_{X_2Y_2}^{(2)} + A_2 x_{C_2} y_{C_2} = 20.2 \cdot 14.05 \cdot 8 \approx 2270\ см^4, \\ J_{XY}^{(3)} = J_{X_3Y_3}^{(3)} + A_3 x_{C_3} y_{C_3} = 33.4 + 9.38 \cdot 2.19 \cdot 5.81 \approx 153 см^4, \end{cases}$$

Просуммируем, $J_{XY} = J_{XY}^{(1)} + J_{XY}^{(2)} + J_{XY}^{(3)} = 3600 + 2270 + 153 \approx 6023\ см^4$.

5) Вычислим моменты инерции всего сечения относительно центральных осей X_C и Y_C по формулам (12):

$$J_{X_C} = J_X - A y_C^2 = 7673 - 69.58 \cdot 10.036^2 \approx 665\ см^4,$$

$$J_{Y_C} = J_Y - A x_C^2 = 7601 - 69.58 \cdot 8.367^2 \approx 2730\ см^4,$$

$$J_{X_CY_C} = J_{XY} - A x_C y_C = 6023 - 69.58 \cdot 10.036 \cdot 8.367 \approx 181 см^4.$$

6) Определим положение главных центральных осей сечения X_0, Y_0. Главная центральная ось сечения X_0 расположена под углом α_0 к центральной оси X_C согласно (13):

$$tg\,2\alpha_0 = \frac{2 J_{X_CY_C}}{J_{Y_C} - J_{X_C}} = \frac{2 \cdot 181}{2730 - 665} \approx 0.175, \quad => \alpha_0 \approx 4.96^\circ \qquad (17)$$

Таким образом, главные центральные оси CX_0Y_0 повернуты относительно центральных осей CX_CY_C на угол $=> \alpha_0 = 4.96^\circ$ (см. рис.11) против хода часовой стрелки (так как угол положителен).

7) Вычислить главные моменты инерции сложного сечения по (14):

$$J_{X_0} = J_{X_C} Cos^2\alpha_0 + J_{Y_C} Sin^2\alpha_0 - J_{X_CY_C} Sin\,2\alpha_0 = 665 \cdot 0.9925 +$$
$$+ 2730 \cdot 0.0075 - 181 \cdot 0.1723 = 659.92 + 20.41 - 31.1 \approx 649\ см^4, \qquad (18)$$

$$J_{Y_0} = J_{X_C} Sin^2\alpha_0 + J_{Y_C} Cos^2\alpha_0 + J_{X_CY_C} Sin\,2\alpha_0 = 665 \cdot 0.0075 +$$
$$+ 2730 \cdot 0.9925 + 181 \cdot 0.1723 = 4.97 + 2709.57 + 31.1 \approx 2746\ см^4.$$

Проверка арифметических вычислений в (17) и (18).

а) Из последнего соотношения (14):

$$J_{X_0Y_0} = J_{X_CY_C} Cos\,2\alpha_0 + ((J_{X_C} - J_{Y_C}) Sin\,2\alpha_0)/2 = 181 \cdot 0.9850 +$$
$$+ (665 - 2730) \cdot 0.1723/2 \approx 0$$

б) Согласно соотношениям (16):

$$J_{X_C} + J_{Y_C} = 665 + 2730 \approx 3395\ см^4,$$
$$J_{X_0} + J_{Y_0} = 649 + 2746 \approx 3395\ см^4,$$

Таким образом, имеет место равенство:

$$J_{X_C} + J_{Y_C} \approx J_{X_0} + J_{Y_0}$$

Итак, $J_{\max} = J_{Y_0} \approx 2746\ \ см^4$; $J_{\min} = J_{X_0} \approx 649\ см^4$;

8). Определим моменты инерции относительно центральных осей $C\xi\eta$, расположенных под углом β ($\beta = 30^\circ$) к главным центральным осям CX_0Y_0.

Согласно соотношениям (15):

$$J_\xi = J_{X_0}\, Cos^2\beta + J_{Y_0}\, Sin^2\beta = 649 \cdot 0.75 + 2746 \cdot 0.25 \approx 1173 см^4,$$
$$J_\eta = J_{X_0}\, Sin^2\beta + J_{Y_0}\, Cos^2\beta = 649 \cdot 0.25 + 2746 \cdot 0.75 \approx 2222 см^4,$$
$$J_{\xi\eta} = ((J_{X_0} - J_{Y_0})\, Sin\, 2\beta)/2 = (649 - 2746) \cdot (0.8660)/2 \approx -908 см^4.$$

9) Произведем проверку последних вычислений:

$$J_\xi + J_\eta = 1173 + 2222 \approx 3395\ см^4.$$
$$J_{X_C} + J_{Y_C} \approx J_{X_0} + J_{Y_0} \approx J_\xi + J_\eta$$

10) Вычислим радиусы инерции сечения относительно главных осей.

$i_{X_0} = \sqrt{\dfrac{J_{X_0}}{A}} = \sqrt{\dfrac{649}{69.58}} \approx 3.05 см$, - откладываем на оси CY_0 от точки C

$i_{Y_0} = \sqrt{\dfrac{J_{Y_0}}{A}} = \sqrt{\dfrac{2746}{69.58}} \approx 6.28 см$ - откладываем на оси CX_0 от точки C

На этих осях строим эллипс инерции (рис.11)

Заключение

1) Положение главных центральных осей Y_0, X_0 показано на рис.11. Главные моменты инерции сечения равны $J_{Y_0} \approx 2746\ см^4$, $J_{X_0} \approx 649\ см^4$.

2) Положение эллипса инерции сечения говорит о том, что при изгибе балки в направлении оси X_0 ее жесткость и прочность будут наибольшими, а при изгибе в направлении оси Y_0 - наименьшими.

Примечание

Данная задача может быть легко алгоритмизирована и записана в виде программы для ЭВМ. Этот пример был просчитан с помощью пакета Mathematica 5 (см. Приложение 2).

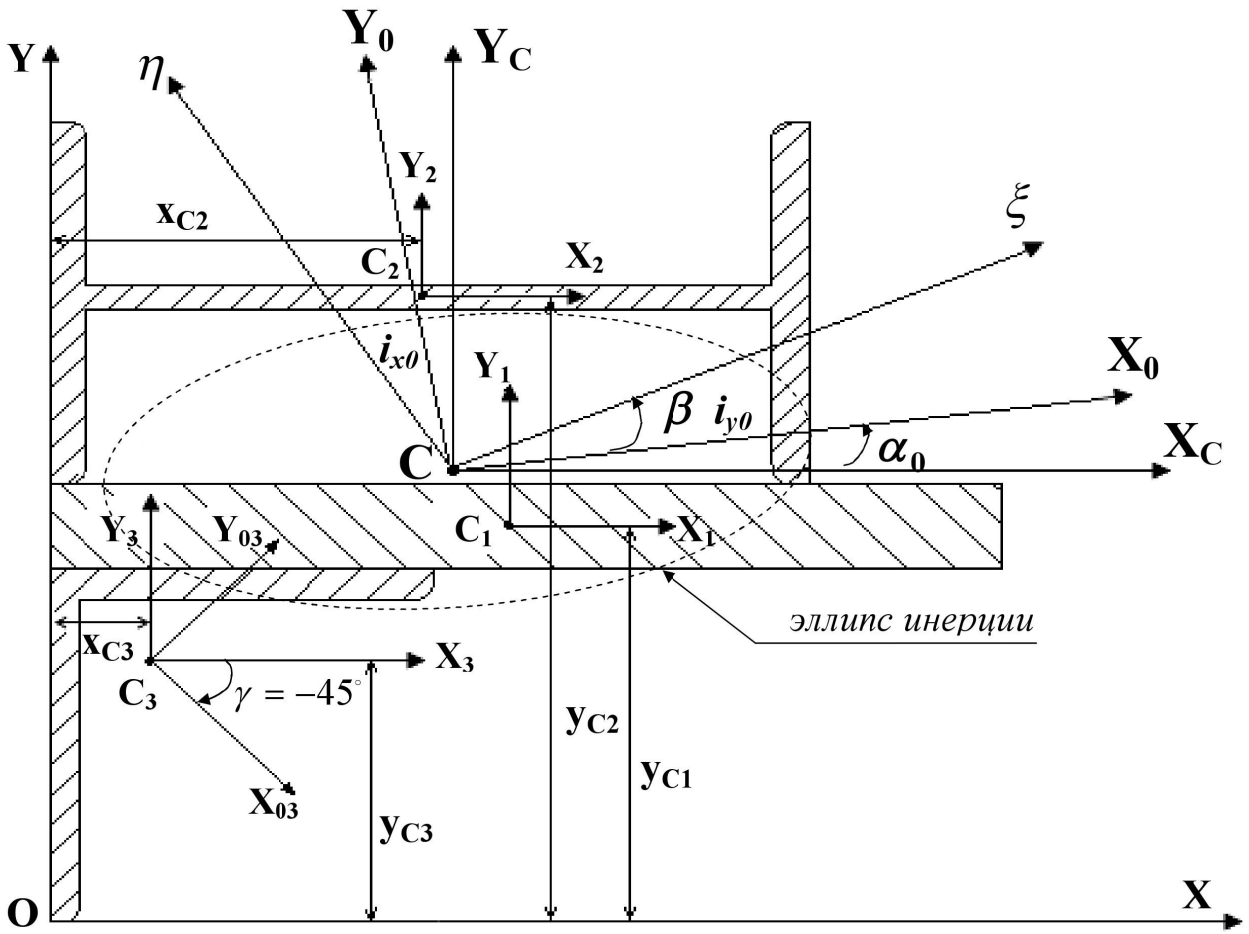

Y
η
Y0
YC
Y2
xC2
C2
X2
ξ
ix0
Y1
X0
β iy0
C
α0
XC
Y3
Y03
C1
X1
эллипс инерции
xC3
X3
C3
γ = –45°
yC2
yC1
X03
yC3
O
X

Рис.11

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ «ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ»

1. Что называется статическим моментом площади сечения относительно данной оси? Какова его размерность?
2. Чему равен статический момент сечения относительно центральной оси?
3. Как определяются координаты центра тяжести составного сечения?
4. Как находятся координаты центра тяжести сечения с двумя осями симметрии?
5. Что называется осевым, полярным и центробежным моментами инерции сечения? Какова размерность моментов инерции?
6. Какие моменты инерции всегда положительны?
7. Какие оси называются центральными и какие – главными центральными?
8. Чему равен центробежный момент инерции относительно главных осей?
9. Записать формулы для вычисления моментов инерции круга, прямоугольника и треугольника.
10. Относительно каких центральных осей осевые моменты инерции имеют наибольшее и наименьшее значения?
11. Записать зависимости для осевого и центробежного моментов инерции при параллельном переносе осей.
12. Привести формулы для осевого и центробежного моментов инерции при повороте осей.
13. Как определяется положение главных осей?
14. По каким формулам находятся главные моменты инерции?
15. Записать формулы для радиусов инерции. Для чего строится эллипс инерции?

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Задача 1

Определить главные моменты инерции для сечения (см.рис.12), состоящего из двух двутавров № 20.

Решение

Составное сечение имеет две оси симметрии, поэтому первоначальные оси лучше провести по этим осям.

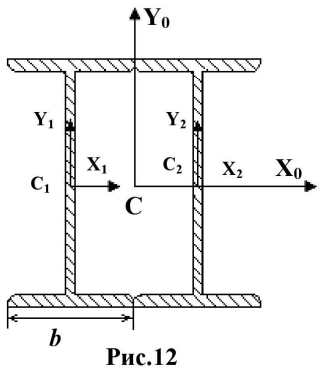


Рис.12

Центр тяжести для данной фигуры C лежит на пересечении осей симметрии как показано на рис.12

Первоначальные оси X_0, Y_0 для фигуры будут главными центральными осями.

Сечение состоит из двух двутавров. Для каждого двутавра определим положение собственных центров тяжести C_1, C_2 и собственных центральных осей X_1Y_1 и X_2Y_2.

Из таблицы сортаментов для двутавра №20:

$$J_x^{табл} = 1840\ см^4, J_y^{табл} = 115\ см^4, A^{табл} = 26.8\ см^2, b^{табл} = 100\ мм$$

Определим главные моменты инерции для всего сечения. Для этого воспользуемся формулами параллельного переноса (4):

$$J_{X_0}^{(1)} = J_{X_1}^{(1)} + A^{(1)} y_{C_1}^2 = J_x^{табл} = 1840 = 1840\ см^4,$$

$$J_{Y_0}^{(1)} = J_{Y_1}^{(1)} + A^{(1)} x_{C_1}^2 = J_y^{табл} + A^{(1)}(-b/2)^2 = 115 + 26.8 \cdot 5^2 = 785\ см^4,$$

$$J_{X_0}^{(2)} = J_{X_0}^{(1)} = 1840\ см^4,$$

$$J_{Y_0}^{(2)} = J_{Y_0}^{(1)} = 785\ см^4,$$

$$J_{X_0} = J_{X_0}^{(1)} + J_{X_0}^{(2)} = 2 \cdot 1840 = 3680\ см^4,$$

$$J_{Y_0} = J_{Y_0}^{(1)} + J_{Y_0}^{(2)} = 2 \cdot 785 = 1570\ см^4.$$

Ответ: $J_{X_0} = 3680 см^4, J_{Y_0} = 1570\ см^4.$

Задача 2

Дано составное сечение, где $h = 8\,см$, $b = 4\ см$, $R = 2\ см$. Определить:
1) осевые J_X, J_Y и центробежный J_{XY} моменты инерции относительно осей XY как показано на рис.13 .
2) положение главных центральных осей составного сечения X_0, Y_0.

Решение

Данное сечение состоит из двух простых фигур: прямоугольника и круга. Для всего сечения оси симметрии не просматриваются, поэтому первоначальные оси X, Y проведем так, чтобы все сечение находилось в I четверти координатной плоскости. Для каждой простой фигуры определим положение собственных центров тяжести C_1 и C_2 , и собственных главных центральных осей .

1) Определим центр тяжести всего сечения:

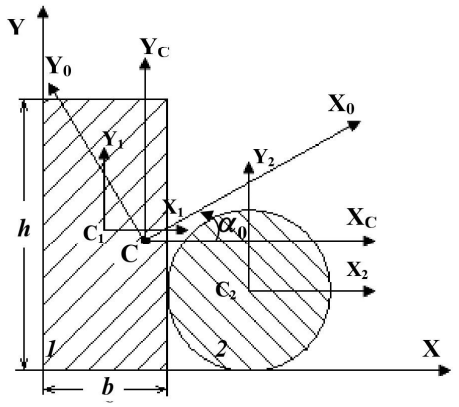


Рис.13

$$x_C = \frac{S_Y}{A} = \frac{A_1 x_{C_1} + A_2 x_{C_2}}{A_1 + A_2} =$$

$$= \frac{32 \cdot 2 + 4\pi \cdot 6}{32 + 4\pi} = \frac{139.36}{44.56} \approx 3.13\ см,$$

$$y_C = \frac{S_X}{A} = \frac{A_1 y_{C_1} + A_2 y_{C_2}}{A_1 + A_2} =$$

$$= \frac{32 \cdot 4 + 4\pi \cdot 2}{32 + 4\pi} = \frac{153.12}{44.56} \approx 3.44\ см.$$

Отметим на рисунке центр тяжести всего сечения и проведем центральные оси X_C, Y_C параллельно первоначальным.

Вычислим моменты инерции относительно первоначальных осей по формулам параллельного переноса согласно (3).

$$\begin{cases} J_X^{(1)} = J_{X_1}^{(1)} + A_1 y_{C_1}^2 = \dfrac{4 \cdot 8^3}{12} + 32 \cdot 4^2 \approx 683\ см^4, \\ J_X^{(2)} = J_{X_2}^{(2)} + A_2 y_{C_2}^2 = \dfrac{\pi R^4}{4} + \pi R^2 \cdot 2^2 \approx 63\ см^4, \end{cases}$$

Таким образом, $J_X = J_X^{(1)} + J_X^{(2)} = 683 + 63 \approx 746\ см^4$.

$$\begin{cases} J_Y^{(1)} = J_{Y_1}^{(1)} + A_1 x_{C_1}^2 = \dfrac{4^3 \cdot 8}{12} + 32 \cdot 2^2 \approx 171 см^4, \\ J_Y^{(2)} = J_{Y_2}^{(2)} + A_2 x_{C_2}^2 = \dfrac{\pi R^4}{4} + \pi R^2 \cdot 6^2 \approx 465\ см^4, \end{cases}$$

Так, $J_Y = J_Y^{(1)} + J_Y^{(2)} = 171 + 465 \approx 636\ см^4$.

$$\begin{cases} J_{XY}^{(1)} = J_{X_1Y_1}^{(1)} + A_1 x_{C_1} y_{C_1} = 32 \cdot 2 \cdot 4 \approx 256\ см^4, \\ J_{XY}^{(2)} = J_{X_2Y_2}^{(2)} + A_2 x_{C_2} y_{C_2} = \pi R^2 \cdot 6 \cdot 2 \approx 151\ см^4, \end{cases}$$

Просуммируем, $J_{XY} = J_{XY}^{(1)} + J_{XY}^{(2)} = 256 + 151 \approx 407\ см^4$.

2) Определим положение главных центральных осей сечения X_0, Y_0.

Вычислим моменты инерции всего сечения относительно центральных осей X_C и Y_C по формулам (12):

$$J_{X_C} = J_X - A y_C^2 = 745.47 - 44.56 \cdot 3.44^2 \approx 218\ см^4,$$

$$J_{Y_C} = J_Y - A x_C^2 = 635.39 - 44.56 \cdot 3.13^2 \approx 199\ см^4,$$

$$J_{X_CY_C} = J_{XY} - A x_C y_C = 406.72 - 44.56 \cdot 3.13 \cdot 3.44 \approx -73 см^4.$$

Главная центральная ось сечения X_0 расположена под углом α_0 к центральной оси X_C согласно (13):

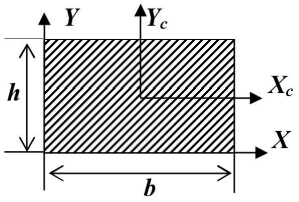
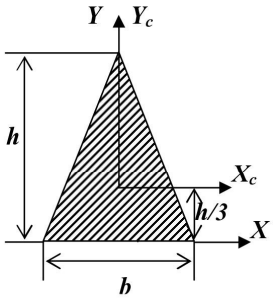
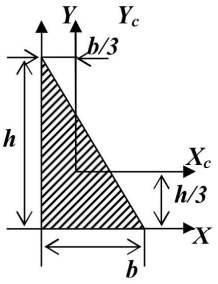
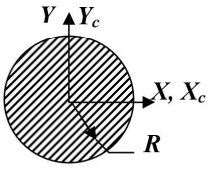
$$tg\, 2\alpha_0 = \frac{2 J_{X_CY_C}}{J_{Y_C} - J_{X_C}} = \frac{2 \cdot (-73)}{199 - 218} \approx 7.68, \quad => \alpha_0 \approx 41^\circ \qquad (17)$$

Таким образом, главные центральные оси X_0Y_0 повернуты относительно центральных осей X_CY_C на угол $\alpha_0 \approx 41^\circ$ против хода часовой стрелки (так как угол положителен).

Ответ: $J_X \approx 745\ см^4$, $J_Y \approx 636\ см^4$, $J_{XY} \approx 407\ см^4$; положение главных центральных осей определяется через угол $\alpha_0 \approx 41^\circ$.

Приложение 1

Геометрические характеристики простейших поперечных сечений

Поперечное сечение	A	J_{X_c}	J_{Y_c}	J_X	J_Y	$J_{X_cY_c}$	J_{XY}
	bh	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{b^3h}{12}$	$\frac{bh^3}{3}$	$\frac{b^3h}{3}$	0	$\frac{b^2h^2}{4}$
	$\frac{1}{2}bh$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{b^3h}{48}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{b^3h}{48}$	0	0
	$\frac{1}{2}bh$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{b^3h}{36}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{b^3h}{12}$	$-\frac{b^2h^2}{72}$	$\frac{b^2h^2}{24}$
	πR^2	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{4}$	0	0

Приложение 2

ПРИМЕР ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА ДАННОГО ЗАДАНИЯ НА ЭВМ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРИКЛАДНОГО ПАКЕТА MATHEMATICA 5

ДАННЫЕ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

```
b1=20;h1=2;
A1=b1*h1;
Jx1=b1*h1^3/12;
Jy1=b1^3*h1/12;
Jx1y1=0;
Xc1=10;Yc1=9;
```

ДАННЫЕ ДЛЯ ДВУТАВРА

```
b2=8.1;h2=16;
A2=20.2;
Jx2=58.6;
Jy2=873;
Jx2y2=0;
Xc2=8;
Yc2=14.05;
```

ДАННЫЕ ДЛЯ РАВНОБОКОГО УГОЛКА

```
 b3=8;z03=2.19;
A3=9.38;
Jx3=57;
Jy3=57;
Jx03=90.4;
Jy03=23.5;
Jx03y03=0;
Jx3y3=33.4;
Xc3=2.19;
Yc3=5.81;
```

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ВСЕГО СЕЧЕНИЯ

```
A=A1+A2+A3
69.58
```

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ СОСТАВНОГО СЕЧЕНИЯ Xc,Yc

$$Xc = \frac{A1 * Xc1 + A2 * Xc2 + A3 * Xc3}{A}$$

$$Yc = \frac{A1 * Yc1 + A2 * Yc2 + A3 * Yc3}{A}$$

```
8.36652
10.036
```

ВЫЧИСЛНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ КАЖДОЙ ПРОСТОЙ ФИГУРЫ Jx,Jy,Jxy ОТНОСИТЕЛЬНО ПЕРВОНАЧАЛЬНЫХ ОСЕЙ OXY ПО ФОРМУЛАМ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСА

```
Jxfigura1 = Jx1 + A1 * Yc1^2;
Jxfigura2 = Jx2 + A2 * Yc2^2;
Jxfigura3 = Jx3 + A3 * Yc3^2;
Jx = Jxfigura1 + Jxfigura2 + Jxfigura3

Jyfigura1 = Jy1 + A1 * Xc1^2;
Jyfigura2 = Jy2 + A2 * Xc2^2;
Jyfigura3 = Jy3 + A3 * Xc3^2;
Jy = Jyfigura1 + Jyfigura2 + Jyfigura3

Jxyfigura1 = Jx1y1 + A1 * Xc1 * Yc1;
Jxyfigura2 = Jx2y2 + A2 * Xc2 * Yc2;
Jxyfigura3 = Jx3y3 + A3 * Xc3 * Yc3;
Jxy = Jxyfigura1 + Jxyfigura2 + Jxyfigura3
 7673.1
 7601.12
 6023.23

МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ  Jxc,Jyc,Jxcyc СЕЧЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРАЛЬНЫХ
ОСЕЙ  XcYc

Jxc = Jx - A * Yc^2
Jyc = Jy - A * Xc^2
Jxcyc = Jxy - A * Yc * Xc
 664.85
 2730.62
 180.827

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ГЛАВНЫХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ОСЕЙ Xo,Yo

α=ArcTan[2*Jxcyc/(Jyc-Jxc)]/2*180/π
 4.96506

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ СЛОЖНОГО СЕЧЕНИЯ Jxo,Jyo

 Jx0=Jxc*Cos[α*π/180]^2+Jyc*Sin[α*π/180]^2-Jxcyc*Sin[2*α*π/180]
 649.141
 Jy0=Jxc*Sin[α*π/180]^2+Jyc*Cos[α*π/180]^2+Jxcyc*Sin[2*α*π/180]
 2746.33

ПРОВЕРКА АРИФМЕТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ
 Jx0y0=Jxcyc*Cos[2*α*π/180]+(Jxc-Jyc)*Sin[2*α*π/180]/2
 0.
Jxc+Jyc
Jx0+Jy0
 3395.47
 3395.47
```

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРАЛЬНЫХ ОСЕЙ $\xi\eta$ РАСПОЛОЖЕННЫХ ПОД УГЛОМ β=30 К ОСЯМ Xo,Yo

```
β=30;
Jξ=Jx0*Cos[β*π/180]^2+Jy0*Sin[β*π/180]^2
Jη=Jx0*Sin[β*π/180]^2+Jy0*Cos[β*π/180]^2
Jξη=(Jx0-Jy0)*Sin[2*β*π/180]/2
 1173.44
 2222.03
 -908.109
```

ПРОВЕРКА ВЫЧИСЛЕНИЙ

```
 Jξ+Jη
 3395.47
```