МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Кафедра сопротивления материалов и основ теории упругости

Методические указания
для выполнения расчетно-графической работы
студентами специальности 271101.65

РАСЧЕТ ОБОЛОЧКИ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ СНЕГОВОЙ И ВЕСОВОЙ НАГРУЗОК

Казань
2014

УДК 539.3

ББК 22.251
К12

К12 Расчет оболочки на прочность при воздействии снеговой и весовой нагрузок: Методические указания для выполнения расчетно-графической работы студентами специальности 271101.65 / Сост. Р.А. Каюмов, И.З. Мухамедова. – Казань: Изд-во Казанск. гос.архитект.-строит. ун-та, 2014.– 13с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

В методических указаниях изложены основные соотношения по безмоментной теории оболочек. Приведено решение типовой задачи, где определяются геометрические параметры оболочки и проводится расчет на прочность.

Табл. 1, ил. 8.

Рецензент
доктор физико-математических наук, профессор
кафедры «Сопротивление материалов и основы теории упругости»
Ю.И. Бутенко

УДК 539.3
ББК 22.251

© Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 2014

© Каюмов Р.А., Мухамедова И.З., 2014

1. Постановка задачи

Дана расчетная схема бетонной оболочки (рис.1) постоянной толщины h с условиями опирания, которые обеспечивают наиболее рациональный вариант напряженного безмоментного состояния. Известны механические характеристики бетона.

Уравнение меридиана описывается полиномом третьего порядка:

$$f = a \cdot (x - R_0)^3 + b \cdot (x - R_0)^2 + c \cdot (x - R_0), \qquad (1)$$

константы a, b, c считаются заданными (*Таблица 1*).

Поверхностная нагрузка $\boldsymbol{p_y}$ (весовая суммарно со снеговой) считается постоянной. На крышку оболочки (перекрытие) действует суммарная нагрузка $\boldsymbol{P}$ (*Таблица 1*).

Требуется проверить прочность конструкции. Расчет проводить по упрощенной безмоментной теории.

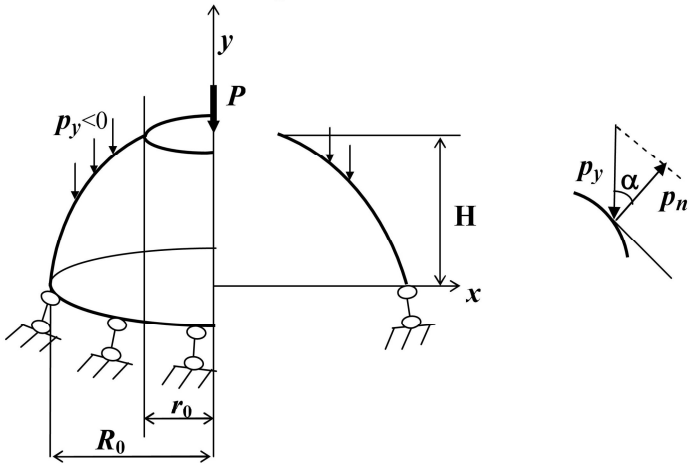

Рис.1 Расчетная схема оболочки

2. Порядок расчета

2.1. Определяются геометрические параметры оболочки.

2.1.1. С помощью уравнения кривой определяются главные кривизны $\boldsymbol{k_1}$ и $\boldsymbol{k_2}$.

2.1.2. Вычисляются тригонометрические функции $\boldsymbol{\sin\alpha}$, $\boldsymbol{\cos\alpha}$, угла наклона меридиана $\boldsymbol{\alpha}$.

2.2. Из уравнений равновесия определяются напряжения вдоль меридиана σ_1 и вдоль параллели σ_2 на разных высотах.

2.5. Проводится проверка прочности бетона на основе критерия прочности Гениева Г.А.

Таблица 1

№	А	Б	В	Г	А	Б	В	Г
	a ($1/м^2$)	**b** (м)	**c** (безр)	**Ro** (м)	**ro** (м)	**h** (м)	$\mathbf{p_y}$ (МПа)	**P** (МН)
1	0.011	0.017	-2.1	12	5	0.22	0.017	4.6
2	-0.2	-0.12	-1.2	11	5	0.2	0.02	4.1
3	0.01	0.01	-1.8	10	4	0.18	0.019	1.5
4	0.012	0.024	-1.5	12	6	0.2	0.017	2.6
5	-0.018	-0.2	-2	11	4	0.21	0.014	3.2
6	-0.019	-0.11	-1.5	13	6	0.19	0.013	1.5
7	-0.017	-0.15	-1.7	12	5	0.21	0.015	2.5
8	0.012	0.018	-2.3	14	6	0.2	0.016	5.1
9	0.011	0.016	-2.2	11	5	0.18	0.018	4.4
10	0.018	-0.11	-1.3	12	4	0.17	0.014	1.6

3. Основные соотношения

3.1. Геометрические характеристики оболочки

Все геометрические характеристики оболочки вычисляются через функцию f и ее производные, которые будем далее обозначать следующим образом:

$$f' = \frac{df}{dx}, \quad f'' = \frac{d^2 f}{dx^2},$$

Тогда угол наклона меридиана $\alpha>0$ и его тригонометрические характеристики определяются по следующим формулам:

$$tg\alpha = -f' \tag{2}$$

$$\sin\alpha = -\frac{f'}{\sqrt{1+(f')^2}} \tag{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+(f')^2}}. \qquad (4)$$

Кривизна меридиана (см. *рис.1*) определяется из соотношения

$$k_1 = -\frac{f''}{\left(\sqrt{1+(f')^2}\right)^3}. \qquad (5)$$

Кривизна параллели вычисляется по формуле:

$$k_2 = \frac{\sin\alpha}{x} \quad . \qquad (6)$$

3.2. Уравнения равновесия элемента оболочки для определения погонных сил

Проведем сечение оболочки по параллели (см. *рис.2*). Тогда уравнение для σ_1 вытекает из условия равновесия верхней части оболочки. Изобразим на *рис.2* напряжения σ_1 и σ_2 растягивающими, согласно правилам теории упругости. Вычислим площадь поверхности оболочки:

$$A = \int_{r_0}^{r} 2\pi x \cdot ds, \qquad (7)$$

здесь *ds* - длина дуги меридиана, которая вычисляется по формуле

$$ds = \sqrt{1+(f')^2} \cdot dx.$$

Проекция равнодействующей напряжений σ_1 на ось y в сечении с координатой r примет вид:

$$T_y = -\sigma_1 \cdot A_{сеч} \cdot \sin\alpha = -2\pi r \cdot h \cdot \sigma_1 \cdot \sin\alpha, \qquad (8)$$

где $A_{сеч}$ - площадь сечения при $x = r$, которое представляет собой кольцо. Равнодействующая внешних сил будет равна:

$$R_y = -(p_y \cdot A + P) = -\int_{r_0}^{r} 2\pi x \cdot p_y \cdot \sqrt{1+(f')^2} \cdot dx - P. \qquad (9)$$

Условие равновесия верхней части оболочки примет вид:

$$-R_y - T_y = 0. \qquad (10)$$

Отсюда вытекает соотношение для σ_1:

$$\sigma_1 = -\frac{T_y}{A_{сеч}} = -\frac{1}{2\pi r \cdot h \cdot \sin\alpha}\left(\int_{r_0}^{r} 2\pi x \cdot p_y \cdot \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\cdot dx + P\right). \qquad (11)$$

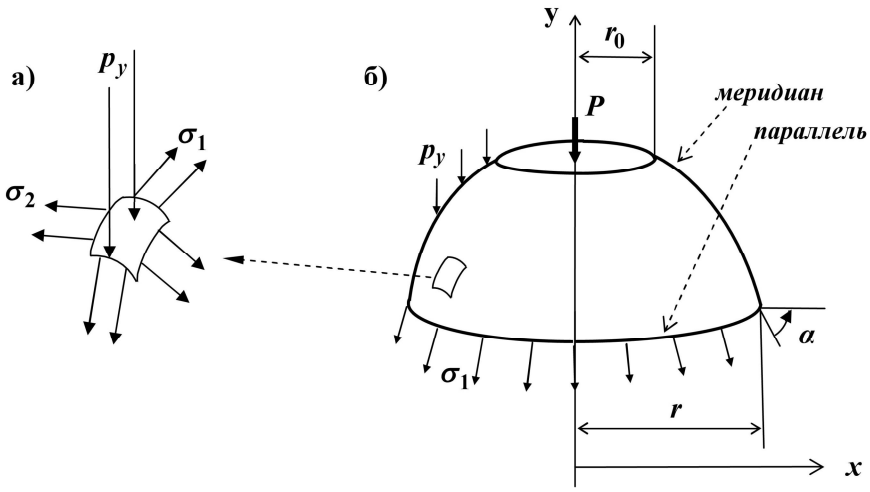

Рис.2

а) равновесие малого элемента оболочки;

б) силовая схема отсеченной части бетонной оболочки по параллели.

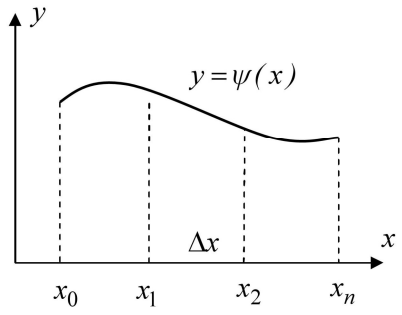

Рис. 3

Примечание.

Вычислять интеграл целесообразно численно (по формулам Симпсона, трапеций или другими приближенными методами).

Например, приведем ***формулу трапеций*** *для вычисления определенного интеграла.*

Пусть задана непрерывная функция

$\psi(x)$ на отрезке[x_0; x_n]. Разобьем отрезок [x_0; x_n] на n равных частей длины $\Delta x = \frac{x_n - x_0}{n}$.

Тогда, согласно рис.3 можно записать:

$$\int_{x_0}^{x_n} \psi(x)\,dx \approx \frac{\psi(x_0)+\psi(x_1)}{2}\cdot\Delta x + \frac{\psi(x_1)+\psi(x_2)}{2}\cdot\Delta x + \ldots \frac{\psi(x_{n-1})+\psi(x_n)}{2}\cdot\Delta x. \quad (12)$$

Выражение для σ_2 вытекает из уравнения Лапласа [1]:

$$k_1\cdot\sigma_1\cdot h + k_2\cdot\sigma_2\cdot h = p_n, \qquad p_n = -p_y\cdot\cos\alpha, \quad (13)$$

здесь p_n – нормальная составляющая нагрузки p_y (*рис.1, рис.2а*).

4. Расчет на прочность

Для проверки прочности бетона удобно использовать критерий Г.А. Гениева в виде:

$$\Omega(\sigma_1,\sigma_2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 + (\sigma_1+\sigma_2)(R_b - R_{bt}) \le R_{bt}R_b, \quad (14)$$

здесь $\Omega(\sigma_1,\sigma_2)$ - показатель уровня напряженности, R_{bt}, R_b - расчетные значения бетона растяжению и сжатию соответственно.

Для проверки прочности вычисляем в разных сечениях функцию Ω и строим ее эпюру.

Если нигде не нарушается условие (14), то делается заключение о том, что оболочка отвечает условиям прочности, если где-то имеется нарушение этих условий, то делается вывод, что она не прочная.

Пример численного расчета купола

Пусть известны проектные значения радиусов основания и перекрытия R_0 и r_0. Материал купола - бетон марки В50.

Исходные данные:

$$a = 0.01\ м^{-2},\ b = 0.02\ м^{-1}, c = -2.1,\ r_0 = 5\ м,\ R_0 = 12\ м,$$

$$P = 4\ МН,\quad p_y = 0.018\ \ МПа,\ h = 0.2\ м\ .$$

Для бетона марки В50: $R_b = 27.5\ МПа$, $R_{bt} = 1.6\ МПа$

Уравнение меридиана по проекту примет вид:

$$\begin{aligned} f &= a\cdot(x-R_0)^3 + b\cdot(x-R_0)^2 + c\cdot(x-R_0) = \\ &= 0.01\cdot(x-12)^3 + 0.02\cdot(x-12)^2 - 2.1\cdot(x-12)\ . \end{aligned} \qquad (15)$$

Для построения эпюр напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \Omega$ вычислим их в трех точках с координатами $x_1 = r_0,\ x_2 = \dfrac{r_0 + R_0}{2},\ x_3 = R_0$.

1) **Первая точка $x_1 = r_0 = 5м$**.

Вычислим $sin\alpha$, $cos\alpha$, k_1, k_2 в этой точке согласно (3) – (6):

$$sin\alpha = 0.6730\ ,\ cos\alpha = 0.7396\ ,\ k_1 = 0.15\ м^{-1}\ ,\ k_2 = 0.13\ м^{-1}.$$

Далее найдем напряжения σ_1 и σ_2 по (11) и (13):

$$\sigma_1 = -\frac{P}{2\pi x\cdot h\cdot \sin\alpha} = -\frac{4\ МН}{2\cdot 3.14\cdot 5м\cdot 0.2\ м\cdot 0.6730} = -0.95 МПа\,,$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \left(\frac{-p_y\cdot\cos\alpha}{h} - k_1\cdot\sigma_1\right)/k_2 = \\ &= \left(\frac{-0.018\ МПа\cdot 0.7396}{0.2\ м} - 0.15 м^{-1}\cdot(-0.95\ МПа)\right)/0.13\ м^{-1} = 0.59\ МПа\ . \end{aligned}$$

Согласно (14) в первой точке показатель напряженности $\Omega = 7.51 МПа^2$.

2) Вторая точка $\boldsymbol{x_2 = \dfrac{r_0 + R_0}{2} = 8.5\ м}$.

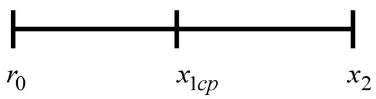

Рис. 4

Вычислим $sin\alpha$, $cos\alpha$, k_1, k_2 в этой точке:

$$sin\alpha = 0.8821,\ cos\alpha = 0.4711,\ k_1 = 0.018\ м^{-1},\ k_2 = 0.104 м^{-1}.$$

Определим напряжение σ_1. Интеграл в выражении (11) подсчитаем численно по формуле трапеций согласно (12). Обозначим подынтегральную функцию

$$\psi(x) = 2\pi x \cdot p_y \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} =$$
$$= 0.11 \cdot x \cdot \sqrt{1 + ((-2.1) + 0.04 \cdot (x - 12) + 0.03 \cdot (x - 12)^2)^2},$$

Имеем интервал $[r_0, x_2]$. Разобьем его на 2 отрезка. Тогда $n = 2$.

$$\Delta x = \frac{x_2 - r_0}{n} = \frac{8.5 - 5}{2} = 1.75\ м, \qquad x_{1cp} = r_0 + \Delta x = 5 + 1.75 = 6.75\ м.$$

Подсчитаем

$$\int_{r_0}^{x_2} \psi(x) \cdot dx = \frac{\psi(r_0) + \psi(x_{1cp})}{2} \Delta x + \frac{\psi(x_{1cp}) + \psi(x_2)}{2} \Delta x =$$
$$= \frac{0.76 + 1.37}{2} \cdot 1.75 + \frac{1.37 + 2.04}{2} \cdot 1.75 = 4.84\, MH.$$

Тогда

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2\pi \cdot x_2 \cdot h \cdot \sin\alpha} \left(\int_{r_0}^{x_2} \psi(x) \cdot dx + P \right) =$$
$$= -\frac{1}{2 \cdot 3.14 \cdot 8.5\ м \cdot 0.2\ м \cdot 0.8821} \cdot (4.84\ MH + 4 MH) = -0.94 МПа.$$

Найдем напряжение σ_2 из уравнения Лапласа:

$$\sigma_2 = (\frac{-p_y \cdot \cos\alpha}{h} - k_1 \cdot \sigma_1)/k_2 =$$
$$= (\frac{-0.018\ МПа \cdot 0.4711}{0.2\ м} - 0.018 м^{-1} \cdot (-0.94\ МПа))/0.104\ м^{-1} = -0.25 МПа\ .$$

Во второй точке $\Omega = 30.03 МПа^2$.

3) Третья точка $\boldsymbol{x_3 = R_0 = 12\ м}$.

$sin\alpha = 0.9029$, $cos\alpha = 0.4299$, $k_1 = -0.003\ м^{-1}$, $k_2 = 0.075 м^{-1}$.

Вычислим σ_1. Согласно формуле трапеций имеем интервал $[r_0, R_0]$.

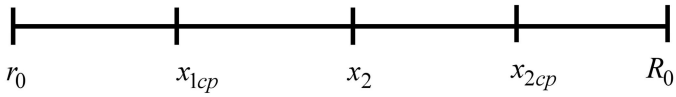

Рис. 5

Разобьем его на 4 отрезка. Тогда $n = 4$. $\Delta x = \frac{x_2 - r_0}{n} = \frac{12-5}{4} = 1.75\ м$,

$x_{1cp} = r_0 + \Delta x = 5 + 1.75 = 6.75\ м$,
$x_2 = r_0 + 2 \cdot \Delta x = 5 + 2 \cdot 1.75 = 8.5\ м$,
$x_{2cp} = r_0 + 3 \cdot \Delta x = 5 + 3 \cdot 1.75 = 10.25\ м$,

Подсчитаем:

$$\int_{r_0}^{R_0} \psi(x) \cdot dx = \frac{\psi(r_0) + \psi(x_{1cp})}{2}\Delta x + \frac{\psi(x_{1cp}) + \psi(x_2)}{2}\Delta x + \frac{\psi(x_2) + \psi(x_{2cp})}{2}\Delta x +$$
$$\frac{\psi(x_{2cp}) + \psi(R_0)}{2}\Delta x = \frac{0.76 + 1.37}{2} \cdot 1.75 + \frac{1.37 + 2.04}{2} \cdot 1.75 + \frac{2.04 + 2.67}{2} \cdot 1.75 +$$
$$+ \frac{2.67 + 3.17}{2} \cdot 1.75 = 14.07\ МН.$$

Тогда в третьей точке (на уровне опоры)

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2\pi \cdot R_0 \cdot h \cdot \sin\alpha}\left(\int_{r_0}^{R_0} \psi(x)\cdot dx + P\right) =$$

$$= -\frac{1}{2 \cdot 3.14 \cdot 12\ м \cdot 0.2\ м \cdot 0.9029} \cdot (14.07\ МН + 4 МН) = -1.33 МПа.$$

Подсчитаем напряжение σ_2

$$\sigma_2 = (\frac{-p_y \cdot \cos\alpha}{h} - k_1 \cdot \sigma_1)/k_2 = (\frac{-0.018\ МПа \cdot 0.4299}{0.2\ м} +$$

$$+0.003 м^{-1} \cdot (-1.33\ МПа))/0.075\ м^{-1} = -0.57\ МПа\ .$$

В третьей точке показатель напряженности $\Omega = 47.88\ МПа^2$.
На *рис.6-8* построены эпюры напряжений σ_1, σ_2 и показателя напряженности Ω в вышеприведенных точках.

Проверка прочность купола

По критерию Г.А. Гениева:
в первой точке $\Omega = 7.51 МПа^2 \le 44\ МПа^2$;
во второй точке $\Omega = 30.03 МПа^2 \le 44 МПа^2$;
в третьей точке $\Omega = 47.88 МПа^2 > 44 МПа^2$.

Вывод

Прочность обеспечена в первой и второй точках. В третьей точке, на уровне опоры купола условие прочности нарушается.

Список литературы

1. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / М: Наука. – 1979. – 744с.
2. Колкунов Н.В. Основы расчета упругих оболочек / М: Высшая школа. – 1972. – 296с.
3. Терегулов И.Г. Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности / М: Высшая школа. – 1984. – 472с.

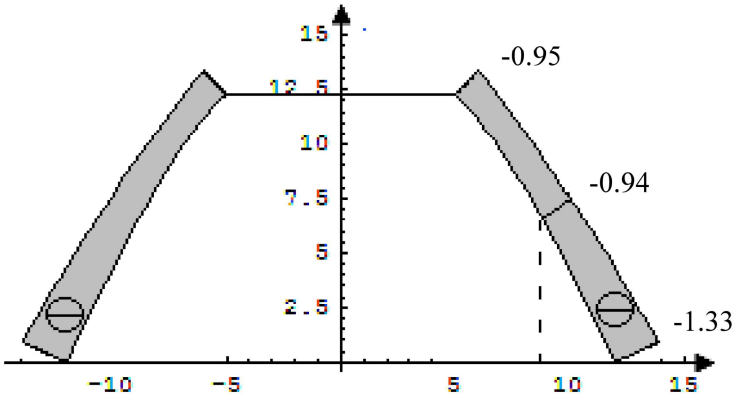

Рис.6. Эпюра напряжений σ_1, МПа

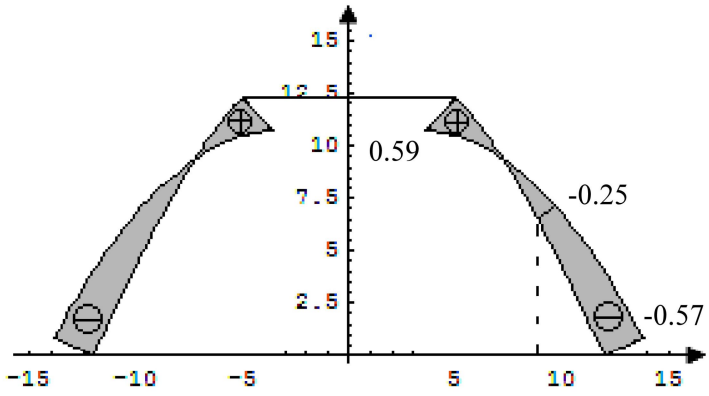

Рис.7. Эпюра напряжений σ_2, МПа

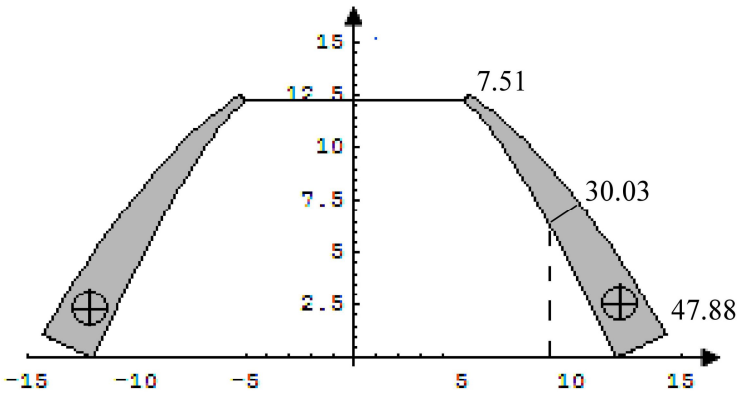

Рис.8. Эпюра показателя напряженности Ω

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения расчетно-графической работы
«Расчет оболочки на прочность при воздействии
снеговой и весовой нагрузок »

Составители: Каюмов Рашит Абдулхакович
Мухамедова Инзилия Заудатовна

Редактор В.Н. Сластникова

Редакционно-издательский отдел
Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Подписано к печати		Формат 60x84/16
	Бумага офсетная №1	Усл. печ.л. 1,1
Заказ №	Печать ризографическая	Уч.-изд.л. 1,1

Отпечатано в полиграфическом секторе Издательства КГАСУ
420043, г. Казань, ул. Зеленая, д.1.