МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению расчетно-графической работы
по теме «Расчет стержня при сложном сопротивлении»
для студентов направления подготовки: 270800, 190100, 19070

Составитель Мартышев Вячеслав Петрович

Редактор В.В.Попова

Редакционно-издательский отдел
Казанского государственного архитектурно-строительного университета
Подписано в печать 17.04.12. Формат 60x84/16
Заказ 203. Печать ризографическая Усл.-печ.л.1,5
Тираж 150 экз. Бумага офсетная № 1 Уч.-изд.л.1,5

Печатно-множительный отдел КГАСУ
420043, Казань, ул.Зеленая, 1

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ И ОСНОВ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению расчетно-графической работы по теме:

«Расчет стержня при сложном сопротивлении»

для студентов направления подготовки: **270800, 190100, 190700**

Казань, **2012**

УДК 539.3
ББК 22.251
М29

М29 Методические указания к выполнению расчетно-графической работы по теме «Расчет стержня при сложном сопротивлении» для студентов направления подготовки: 270800, 190100, 19070 / Сост. В.П.Мартышев. Казань: КГАСУ, 2012.- 24 с.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Методические указания состоят из двух частей: Часть 1. Расчет ломанного стержня. Часть II. Расчет внецентренно сжатого стержня.

В методических указаниях приводятся исходные данные для выполнения расчетно-графической работы: шифр, схемы, пример выполнения расчетно-графической работы.

Рецензент
Доктор физико-математических наук, профессор
Ю.И.Бутенко

УДК 539.3
ББК 22.251

© Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 2012

© Мартышев В.П., 2012

Расчетно-графическая работа «Расчет стержня при сложном сопротивлении» состоит из двух частей: **Часть I. Расчет ломаного стержня. Часть II. Расчет внецентренно сжатого стержня.**

Исходные данные для каждой задачи (значения действующих сил, геометрические размеры и т.д.) выбираются из таблицы согласно шифру.

Все столбцы таблицы обозначены начальными буквами русского алфавита (А, Б, В, Г). Из каждого столбца берется то значение, которое соответствует данной цифре по шифру.

ШИФР - четырехзначное число, образуется из первых четырех букв фамилии студента. Буквенную часть шифра преобразуют в цифровую согласно таблице.

1	А	Й	У	Э
2	Б	К	Ф	Ю
3	В	Л	Х	Я
4	Г	М	Ц	
5	Д	Н	Ч	
6	Е	О	Ш	
7	Е	П	Щ	
8	Ж	Р	Ъ	
9	З	С	Ы	
0	И	Т	Ь	

<u>Пример</u>
студент Ибрагимов
ИБРА 0281
Шифр 0281

Каждой цифре шифра соответствует буква русского алфавита.

0 2 8 1
А Б В Г

В таблице, приведенной для каждой работы, из столбца **А** необходимо взять число, стоящее в десятой строке (0), из столбца **Б** - число, стоящее во второй строке (2), из столбца **В** - число, стоящее в восьмой строке (8) и т.д.

На первой странице пояснительной записки должна быть указана цель работы и приведена расчетная схема с заданными размерами и нагрузками (числовые данные). Все пункты должны быть озаглавлены. Заголовки – выделены. Решение задачи должно сопровождаться краткими пояснениями. В окончательных результатах необходимо указывать единицы измерения всех величин. Вычисления вести в системе СИ.

ЧАСТЬ I. РАСЧЕТ ЛОМАНОГО СТЕРЖНЯ

Ломаный стержень расположен в горизонтальной плоскости. Углы в местах соединения стержней – прямые. Все стержни длины L.

Требуется: 1) Записать аналитические выражения внутренних силовых факторов (ВСФ) по участкам, вычислить их значения в характерных точках и построить эпюры. 2) Установить тип сложного сопротивления и записать значения ВСФ в опасном сечении на каждом участке. 3) На участках, испытывающих косой изгиб, подобрать двутавр и размеры прямоугольного сечения при соотношении сторон h/b = 2. 4) На участке, испытывающем косой изгиб с кручением, подобрать круглое сечение по четвертой теории прочности.

Схему ломаного стержня взять из рис.1, числовые данные взять из таблицы 1. Материал стержней – Сталь 3, допускаемое напряжение $[\sigma] = 16$кН/см^2.

Таблица 1

Номер строки	Схема	F (кН)	L (м)	q (кН/м)	b (м)
1	I	2,0	1,1	2,0	0,10
2	II	2,5	1,2	1,9	0,12
3	III	3,0	1,3	1,8	0,14
4	IV	3,5	1,4	1,7	0,16
5	V	4,0	1,5	1,6	0,18
6	VI	4,5	1,6	1,5	0,20
7	VII	5,0	1,7	1,4	0,22
8	VIII	5,5	1,8	1,3	0,24
9	IX	6,0	1,9	1,2	0,26
0	X	6,5	2,0	1,1	0,28
	А	**Б**	**А**	**Б**	**В**

ЧАСТЬ II. РАСЧЕТ ВНЕЦЕНТРЕННО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

Чугунный короткий стержень сжимается продольной силой F, приложенной в точке P. Поперечное сечение стержня выбирается из рис.2, величина «b» из табл.1 согласно шифра.

Требуется: 1) Определить положение главных центральных осей ХСУ и величины главных моментов инерции J_x и J_y поперечного сечения стержня.

2) Из условий прочности стержня, изготовленного из хрупкого материала с допустимыми напряжениями: $[\sigma]_р = 3$ кН/см^2 (при растяжении) и $[\sigma]_{сж} = -9$ кН/см^2 (при сжатии), найти допускаемую силу $[F]$, построить эпюру σ_x в сечении стержня.

3) Построить ядро сечения.

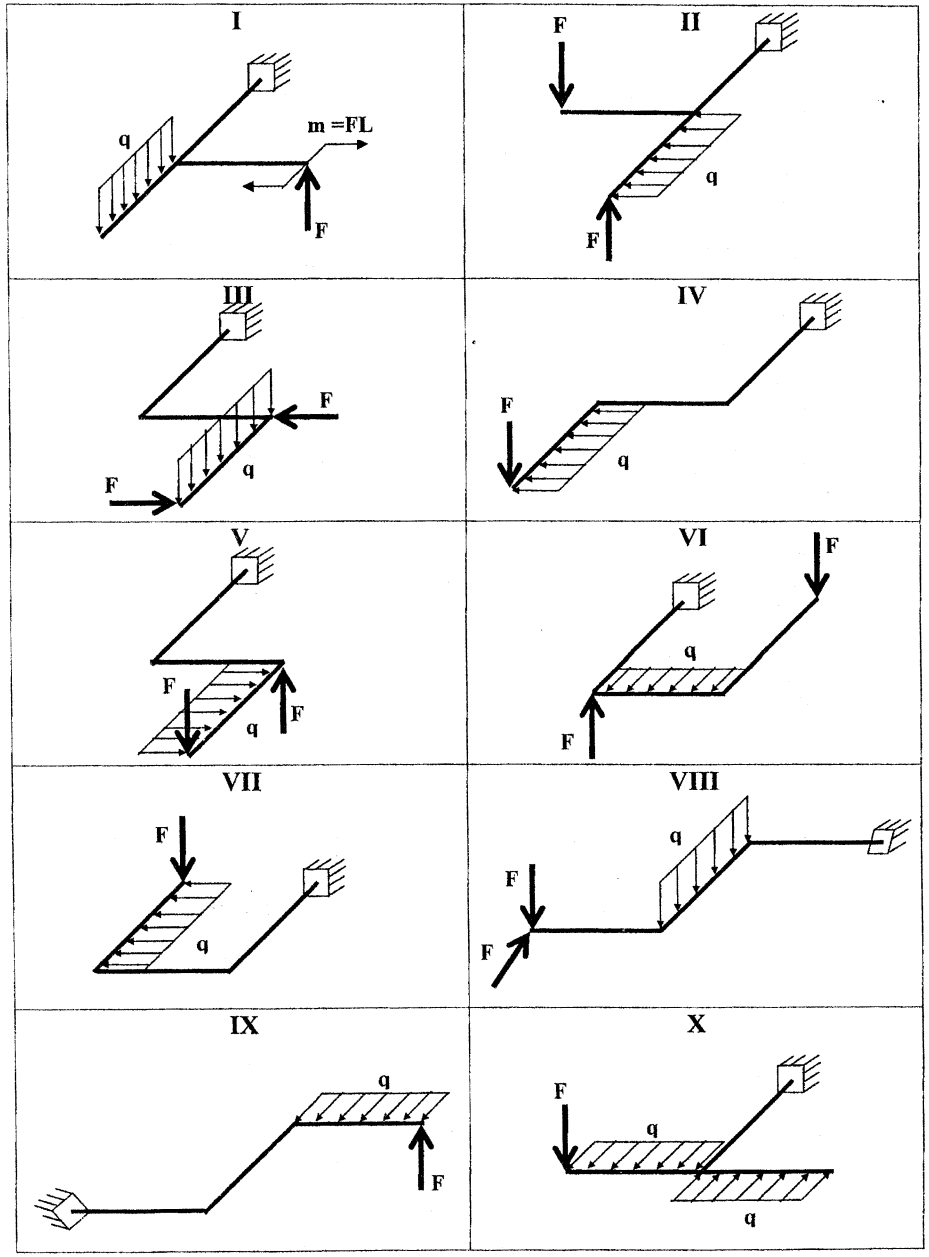


Рис.1

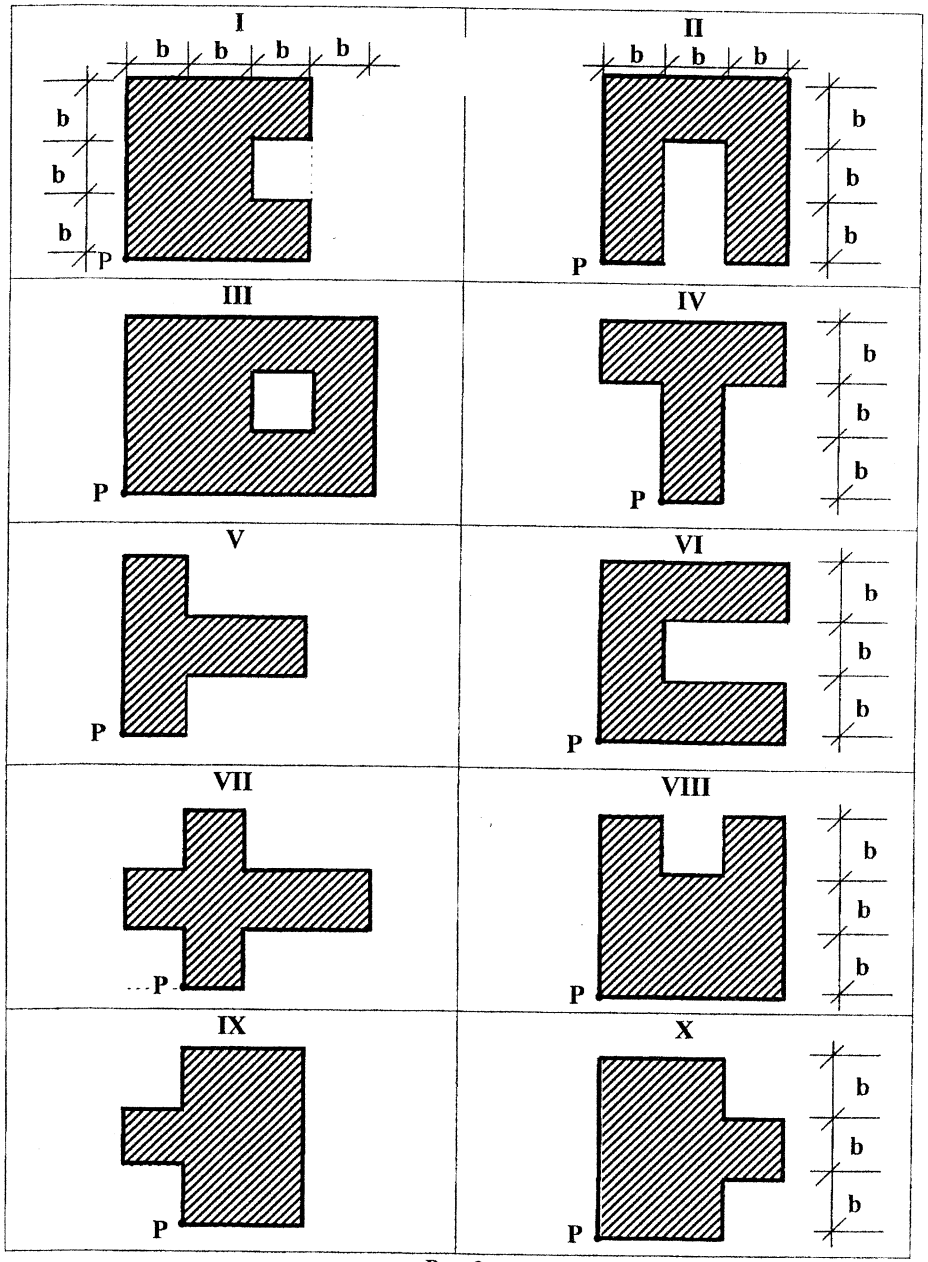


Рис.2

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

ПРИМЕР К ЧАСТИ I. РАСЧЕТ ЛОМАНОГО СТЕРЖНЯ

Правила построения эпюр внутренних силовых факторов (ВСФ) в стержне (брусе) при сложном сопротивлении

В общем случае конструкции бруса и нагрузки в поперечных сечениях его участков могут возникнуть все шесть компонент внутренних сил и моментов (ось z – всегда вдоль оси бруса, оси cx и cy – в поперечном сечении бруса и составляют *правую систему координат* xyz): N_z – продольная сила, Q_x -поперечная (перерезывающая) сила вдоль оси x, Q_y – поперечная сила вдоль оси y, M_x – изгибающий момент относительно (вокруг) оси x, M_y – изгибающий момент относительно оси y, M_z – крутящий (относительно оси z) момент. Для их определения в произвольном сечении стержня можно использовать шесть уравнений равновесия, рассматривая одну из отсеченных частей стержня (левую или правую):

$$N_z = -\Sigma F_{iz}^{\text{лев}} = \Sigma F_{jz}^{\text{прав}}; \quad M_x = -\Sigma \text{mom}_{cx} F_i^{\text{лев}} = \text{mom}_{cx} F_j^{\text{прав}};$$
$$Q_x = -\Sigma F_{ix}^{\text{лев}} = \Sigma F_{jx}^{\text{прав}}; \quad M_y = -\Sigma \text{mom}_{cy} F_i^{\text{лев}} = \text{mom}_{cy} F_j^{\text{прав}}; \qquad (1)$$
$$Q_y = -\Sigma F_{iy}^{\text{лев}} = \Sigma F_{jy}^{\text{прав}}; \quad M_z = -\Sigma \text{mom}_{cz} F_i^{\text{лев}} = \text{mom}_{cz} F_j^{\text{прав}}.$$

Положительные направления внутренних сил и моментов в сечении левой части бруса показаны на рис.3.

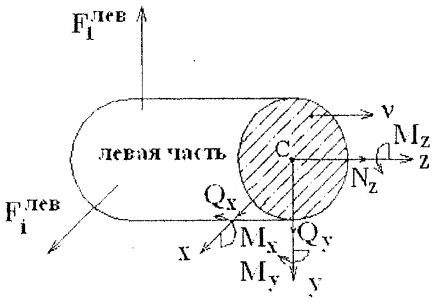


Рис.3

Левой отсеченной частью *условно* будем считать ту часть бруса, у которой нормаль ν к сечению (внешняя) направлена вдоль оси z (у правой части нормаль ν направлена против оси z).

В сечении левой части: $N_z > 0, Q_x > 0, Q_y > 0$, если их направления совпадают с направлениями осей z, x, y, соответственно; $M_x > 0$, $M_y > 0$, $M_z > 0$, если с концов осей x, y и z эти моменты видны против движения часовой стрелки или от этих моментов правый винт (буравчик) перемещается вдоль направлений осей x, y и z, соответственно.

В сечении правой части бруса, отброшенной на рис. 3, положительные направления ВСФ по III закону Ньютона (действия и противодействия) направлены противоположно показанным на рис. 3 направлениям.

Составляющие по осям внешних сил $F_i(F_{ix}, F_{iy}, F_{iz})$ для левой и правой частей в уравнениях (1) положительны, если они направлены вдоль осей; внешние моменты от них в сечении бруса относительно осей cx, cy и z положительны, если от них правый винт (буравчик) перемещается вдоль направлений осей x, y и z (совпадают с направлениями M_x, M_y и M_z на рис. 3).

С учетом этих правил, по формулам (1) можно построить эпюры всех ВСФ в брусе, по которым определяется опасное сечение бруса.

Часто ось бруса состоит из отрезков прямых, соединенных под углами 90°(ломаный брус), и загружена произвольной нагрузкой (рис.4).

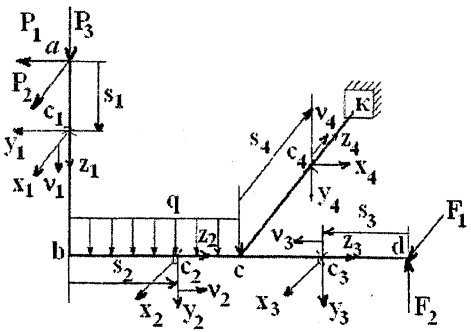


Рис.4

Стержень разбивается на участки, границами которых служат точки излома оси бруса, точки приложения сосредоточенных нагрузок, начало и конец распределенных нагрузок. На каждом участке вводим правую систему координат $C_i x_i y_i z_i$ (оси правые, если кратчайший поворот оси x_i к оси y_i с конца оси z_i виден против хода часовой стрелки), т. C_i – центр тяжести поперечного сечения бруса, оси $C_i x_i$ и $C_i y_i$ – главные центральные оси сечения.

За первый участок примем тот, который имеет свободный конец ($a-b$ или $d-c$). Выберем участок $a-b$ длиной l_1. Ось z_1 вдоль оси бруса от т. a. На этом участке возьмем произвольное сечение с ц.т. c_1 на расстоянии S_1 от т.a и проведем оси c_1x_1 и c_1y_1 так, чтобы с осью z_1 они составили правую систему координат $x_1y_1z_1$. Для записи уравнений (1) выгоднее рассмотреть часть бруса $a-c_1$ с известными нагрузками P_1, P_2, P_3. Внешняя нормаль ν_1 к сечению этой части направлена вдоль оси z_1, поэтому эта часть считается «*левой*» при использовании формул (1). Правую часть рассматривать невыгодно, т.к. она более сложная и содержит в заделке «*k*» шесть опорных реакций (которые предварительно придется найти). Далее оси $x_1y_1z_1$ поступательно, без вращения вокруг оси z_1 (поворачиваются вокруг оси x), перемещаются на второй участок $b-c$ и в сечении c_2 оси c_2x_2, c_2y_2 и ось z_2. Проще рассмотреть участки $a-b-c_2$, и эта часть бруса считается тоже *левой*, т.к. нормаль ν_2 в сечении c_2 направлена вдоль оси z_2. Положение сечения c_2 определим расстоянием S_2, причем $0 \le S_2 \le l_2$. Далее оси перемещаем на III участок $c-d$ и в сечении c_3 проводим оси c_3x_3 и c_3y_3.

Положение сечения c_3 определим расстоянием S_3 ($0 \le S_3 \le l_3$) и рассмотрим *правую* часть c_3-d, т.к. нормаль ν_3 в сечении направлена против оси z_3. На IV участок оси переводим из положения $x_2y_2z_2$, поворачивая их в т. C вокруг оси y, ось z_4 вдоль стержня $c-k$. Проводим произвольно сечение в т.c_4, в котором располагаем оси c_4x_4 и c_4y_4. Рассмотрим всю переднюю часть, поэтому сечение c_4 определим расстоянием S_4 ($0 \le S_4 \le l_4$), эта часть бруса будет «*левой*», т.к. ν_4 направлена вдоль оси z_4 (для правой части надо определить 6 опорных реакций в заделке «*k*»).

При построении эпюр по формулам (1):

Эп. N_z строится в любой плоскости (xz или yz), *обязательно указать знак*;

Эп. Q_x – в плоскости xz, положительные значения откладывать вдоль направления оси x;

Эп. Q_y – в плоскости yz, $Q_y > 0$ вдоль оси y;

Эп. M_x строится в плоскости изгиба бруса yz, $M_x > 0$ вдоль оси y;

Эп. M_y – в плоскости xz, $M_y > 0$ вдоль направления оси x;

Эп. M_z – в любой плоскости (xz или yz), желательно указывать знак.

По эпюрам можно определить тип сложного сопротивления бруса, найти опасное (расчетное) сечение на каждом участке «ломанного» бруса и величины всех ВСФ в них.

Косой изгиб: обязательно $M_z = 0$, $M_x \ne 0$, $M_y \ne 0$, возможно $Q_x \ne 0, Q_y \ne 0, N_z \ne 0$.

Изгиб с кручением: обязательно $M_z \ne 0$, $M_x \ne 0$ или $M_y \ne 0$ или оба $M_x \ne 0$ и $M_y \ne 0$, возможно $Q_x \ne 0, Q_y \ne 0, N_z \ne 0$.

Внецентренное растяжение (сжатие): обязательно $N_z \ne 0$, $M_x = \text{const}$, $M_y = \text{const}$, $Q_x = Q_y = M_z = 0$.

Другие комбинации ВСФ относятся к общему случаю сложного сопротивления бруса.

Пример построения эпюр ВСФ

Рассмотрим «ломанный брус», показанный на рис. 4.

Исходные данные:

$P_1 = F_1 = 1$ кН, $P_2 = F_2 = 2$ кН, $P_3 = 3$ кН, $q = 1$ кН/м, $l_1 = l_{ab}$, $l_2 = l_{bc}$, $l_3 = l_{cd}$, $l_4 = l_{ck}$, $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 1$ м.

Из рис. 4 видно, что брус имеет четыре участка Для каждого участка бруса запишем формулы (1), по которым построим все эпюры ВСФ:

I *участок* $0 \le S_1 \le l_1$ (левая часть)

$N_{z_1} = -(P_3) = -P_3 = -3$ кН – const; $Q_{x_1} = -(P_2) = -P_2 = -2$ кН – const;

$Q_{y_1} = -(P_1) = -P_1 = -1$ кН – const;

$M_{x_1} = -(P_1 S_1) = -P_1 S_1$ – линейная зависимость:

Считаем : $\begin{cases} S_1 = 0 & M_{x_1} = 0, \\ S_1 = l_1 & M_{x_1} = -1\text{кНм}; \end{cases}$

$M_{y_1} = -(-P_2 S_1) = P_2 S_1$:

$M_{z_1} = -(0) = 0.$

Считаем $\begin{cases} S_1 = 0 & M_{y_1} = 0, \\ S_1 = l_1 & M_{y_1} = 2\text{кНм}. \end{cases}$

По этим данным строим эпюры (графики) всех ВСФ на I участке на рис.5 по вышеуказанным правилам.

II *участок* $0 \le S_2 \le l_2$ (левая часть)

$N_{z2} = -(-P_1) = P_1 = 1\,\text{кН}$ – const ; $Q_{x2} = -(P_2) = -P_2 = -2\,\text{кН}$;

$Q_{y2} = -(P_3 + qS_2) = -P_3 - qS_2$ – линейная зависимость:

Считаем: $\begin{cases} S_2 = 0 & Q_{y_2} = -3\text{кН}, \\ S_2 = l_2 & Q_{y_2} = -4\text{кН}. \end{cases}$

$M_{x2} = -(P_1 l_1 + q\dfrac{S_2^2}{2} + P_3 S_2)$ – квадратная парабола:

Считаем $\begin{cases} S_2 = 0 & M_{x_2} = -1\text{кНм}, \\ S_2 = l_2/2 & M_{x_2} = -2{,}125\text{кНм}, \\ S_2 = l_2 & M_{x_2} = -4{,}5\text{кНм}; \end{cases}$

$M_{y2} = -(-P_2 S_2)$:

$M_{z_2} = -(P_2 l_1) = -2\text{кНм}$ – const.

Считаем $\begin{cases} S_2 = 0 & M_{y_2} = 0, \\ S_2 = l_2 & M_{y_2} = 2\text{кНм}. \end{cases}$

Строим эпюры на II участке

III *участок* $0 \le S_3 \le l_3$ (правая часть)

$N_{z_3} = 0;$ $Q_{x_3} = F_1 = 1\text{кН};$ $Q_{y_3} = -F_2 = -2\text{кН};$

$M_{x_3} = F_2 S_3$: Считаем $\begin{cases} S_3 = 0 & M_{x_3} = 0, \\ S_3 = l_3 & M_{x_3} = 2\text{кНм}; \end{cases}$

$M_{y_3} = F_1 S_3$: Считаем $\begin{cases} S_3 = 0 & M_{y_3} = 0, \\ S_3 = l_3 & M_{y_3} = 1\text{кНм}. \end{cases}$

$M_{z_3} = 0.$

Строим эпюры на III участке.

IV *участок* $0 \le S_4 \le l_4$ (левая часть)

$N_{z_4} = -(-F_1 - P_2) = 3\text{кН};$ $Q_{x_4} = -(-P_1) = 1\text{кН};$ $Q_{y_4} = -(P_3 + ql_2 - F_2) = -2\text{кН};$

$M_{x_4} = -(P_3 S_4 + P_2 l_1 + ql_2 S_4 - F_2 S_4)$ – линейная зависимость:

Считаем $\begin{cases} S_4 = 0 & M_{x_4} = -2\text{кНм}, \\ S_4 = l_4 & M_{x_4} = -4\text{кНм}. \end{cases}$

$M_{y_4} = -(P_1 S_4 - P_2 l_2 + F_1 l_3)$ – линейная зависимость:

Считаем $\begin{cases} S_4 = 0 & M_{y_4} = 1\text{кНм}, \\ S_4 = l_4 & M_{y_4} = 0. \end{cases}$ $M_{z_4} = -(-P_3 l_2 - P_1 l_1 - ql_2^2/2 - F_2 l_3) = 6{,}5\text{кНм}.$

Эпюры всех внутренних силовых факторов приведены на рис. 5 (1÷6).

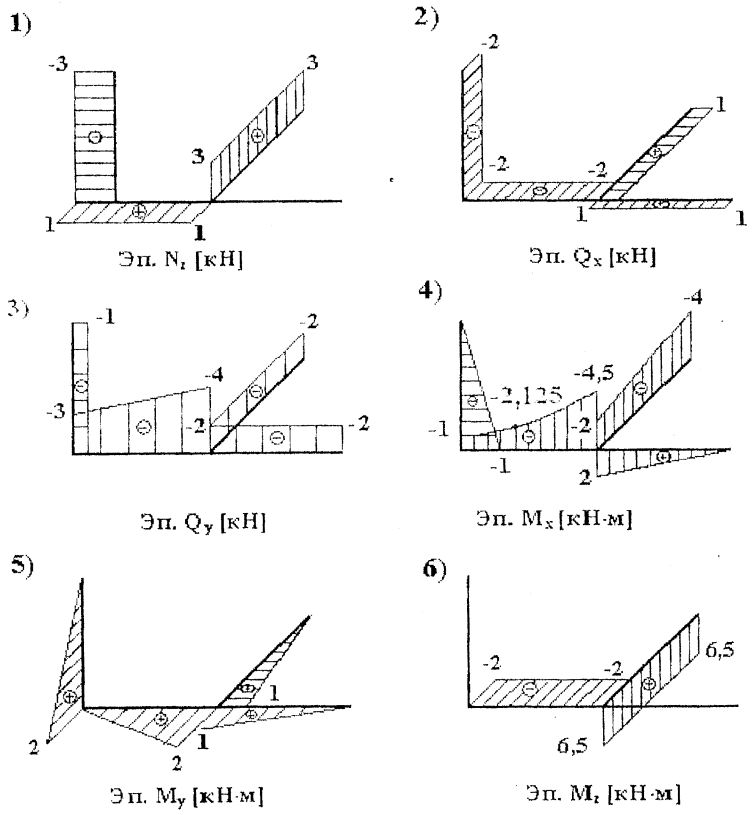


Рис.5

Определим тип сложного сопротивления, найдем опасное (расчетное) сечение на каждом участке бруса из анализа полученных эпюр рис. 5.

I *участок*: **Здесь косой изгиб и сжатие**. Опасное сечение при $S_1 = l_1$, где: $N_{z1} = -3\text{кН}$, $Q_{x1} = -2\text{кН}$, $Q_{y1} = -1\text{кН}$, $M_{x1} = -1\text{кНм}$, $M_{y1} = 2\text{кНм}$, $M_{z1} = 0$.

II *участок*: **Здесь косой изгиб с кручением и растяжением.** Опасное сечение при $S_2 = l_2$, где: $N_{z2} = 1$кН, $Q_{x2} = -2$кН, $Q_{y2} = -4$кН, $M_{x2} = -4{,}5$кНм, $M_{y2} = 2$кНм, $M_{z2} = -2$кНм.

III *участок*: **Здесь косой изгиб.** Опасное сечение $S_3 = l_3$, где: $N_{z3} = M_{z3} = 0$, $Q_{x3} = 1$кН, $Q_{y3} = -2$кН, $M_{x3} = 2$кНм, $M_{y3} = 1$кНм.

IV *участок*: **Здесь косой изгиб с кручением и растяжением.** Опасное сечение при $S_4 = l_4$, где: $N_{z4} = 3$кН, $Q_{x4} = 1$кН, $Q_{y4} = -2$кН, $M_{x4} = -4$кНм, $M_{y4} = 0$, $M_{z4} = 6{,}5$кНм.

Подбор размеров сечений для участков бруса при сложном сопротивлении

1. Для участка, испытывающего косой изгиб, подобрать из условия его прочности стандартный двутавр. Сечение двутавра расположить так, чтобы больший из изгибающих моментов воспринимался большим моментом инерции двутавра. Материал двутавра Ст.3 [σ] = 16 кН/см^2. Допускается перегрузка 5%. Рассмотрим I участок, здесь косой изгиб. В опасном сечении его:

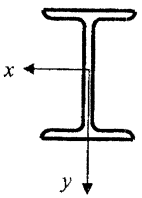
$$M_{x_1}^{оп} = -1\text{кНм} = -100\text{кН}\cdot\text{см},\ M_{y_1}^{оп} = 2\text{кНм} = 200\text{кН}\cdot\text{см},\ N_{z1}^{оп} = -3\text{кН}.$$

Условие прочности при косом изгибе для подбора размеров сечения имеет вид ($N_z \neq 0$ ***пока не учитывается***):

$$\frac{1}{W_x}\left(\left|M_x^{оп}\right| + \frac{W_x}{W_y}\left|M_y^{оп}\right|\right) \le [\sigma] \qquad (2)$$

Отношение $\frac{W_x}{W_y}$ зависит от ориентации сечения двутавра:

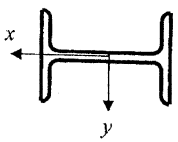
а) Если $\left|M_x^{оп}\right| > \left|M_y^{оп}\right|$



$J_x > J_y$

$$\frac{W_x}{W_y} = 8 \div 10$$

в) Если $\left|M_x^{оп}\right| < \left|M_y^{оп}\right|$



$$J_x = J_y^{табл};\ J_y = J_x^{табл}$$

$$W_x = W_y^{табл};\ W_y = W_x^{табл}$$

$$\frac{W_x}{W_y} = \frac{1}{8} \div \frac{1}{10}$$

На первом участке $\left|M_x^{оп}\right| < \left|M_y^{оп}\right|$. Поэтому двутавр расположим как в случае в). Возьмем $\frac{W_x}{W_y} = \frac{1}{10}$. Из (2) найдем **необходимый момент сопротивления $W_x^н$ двутавра:**

$$\frac{1}{W_x}\left(100 + \frac{1}{10}200\right) \le 16, \text{ отсюда } W_x^н \ge \frac{120}{16} = 7{,}5 \text{ см}^3$$

Так как здесь $J_x = J_y^{табл}$, из табл. ГОСТа можно выбрать двутавры:

№ 10: $W_x = W_y^{табл} = 6{,}49$ см^3, $W_y = W_x^{табл} = 39{,}7$ см^3, $A_{табл.} = 12$ см^3

№ 12: $W_x = 8{,}72$ см^3, $W_y = 58{,}4$ см^3, $A_{табл.} = 14{,}7$ см^3

Делаем проверку выбранных двутавров на прочность с учетом N_z по формуле:

$$\frac{|N_z|}{A} + \frac{\left|M_x^{оп}\right|}{W_x} + \frac{\left|M_y^{оп}\right|}{W_y} \le [\sigma] + 5\% \qquad (3)$$

Двутавр № 10: $\frac{3}{12} + \frac{100}{6{,}49} + \frac{200}{39{,}7} = 20{,}69 \le 16 + 5\% = 16{,}8$.

Условие прочности не выполняется и двутавр № 10 не подходит.

Двутавр № 12: $\frac{3}{14{,}7} + \frac{100}{8{,}72} + \frac{200}{58{,}4} = 15{,}097 \le 16 + 5\%$.

Недогрузка $\Delta = \frac{15{,}097 - 16}{16}100\% = -5{,}6\%$.

Окончательно выбираем для I участка двутавр № 12.

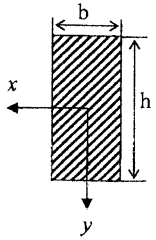
2. Для другого участка с косым изгибом (а если такого нет, то для первого участка) подобрать прямоугольное сечение бруса с заданным отношением сторон ***h/b*** = 2. Сечение расположить так, чтобы больший изгибающий момент воспринимался большим моментом инерции сечения.

Рассмотрим III участок, здесь тоже косой изгиб. В опасном сечении его:

$$M_{x_3}^{оп} = 2\text{кНм} = 200\text{кН}\cdot\text{см},\ M_{y_3}^{оп} = 1\text{кНм} = 100\text{кН}\cdot\text{см},\ N_{z1}^{оп} = 0.$$

Подбор размеров ведем по условию прочности (2). Отношение $\frac{W_x}{W_y}$ зависит от ориентации сечения:

г) если $\left|M_x^{on}\right| > \left|M_y^{on}\right|$

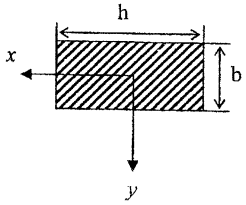


$$W_x = \frac{bh^2}{6}; W_y = \frac{hb^2}{6}$$

$$\frac{W_x}{W_y} = \frac{h}{b}, \quad A = bh,$$

$$J_x >> J_y$$

d) $\left|M_y^{on}\right| > \left|M_x^{on}\right|$



$$W_x = \frac{b^2h}{6}; W_y = \frac{h^2b}{6}$$

$$\frac{W_x}{W_y} = \frac{b}{h}, \quad A = bh, \quad J_y >> J_x$$

Задано ***h/b*** = 2. Размеры h и b округлить до стандартных, кратных 0,5 см. На участке III $\left|M_{x_3}^{on}\right| > \left|M_{y_3}^{on}\right|$, поэтому прямоугольное сечение расположим как в случае г). Здесь $\frac{W_x}{W_y} = \frac{h}{b} = 2$.

Из (2) найдем необходимый $W_x^н$:

$$\frac{1}{W_x}(200 + 2 \cdot 100) \le 16 \text{ отсюда } W_x^н \ge \frac{400}{16} = 25 \text{ см}^3$$

Найдем необходимые размеры прямоугольника:

$$W_x = \frac{bh^2}{6}, \text{ т.к. } \frac{h}{b} = 2, \text{ то } W_x = \frac{h \cdot h^2}{2 \cdot 6} = \frac{h^3}{12} \ge W_x^н$$

$$h \ge \sqrt[3]{12W_x^н} = \sqrt[3]{12 \cdot 25} = \sqrt[3]{300} = 6{,}69 \text{ см}, \; b = \frac{h}{2} = \frac{6{,}69}{2} = 3{,}345 \text{ см}.$$

Выберем стандартные размеры сечения (кратные 0,5 см):

1. $h_{ст}$= 6,5 см $b_{ст}$ = 3 см (*min*)
2. $h_{ст}$= 7 см $b_{ст}$ = 3,5 см (*max*)

Проверим прочность сечения при *min* размерах по формуле (3):

$$A = h_{ст} \cdot b_{ст} = 6{,}5 \cdot 3 = 19{,}5 \text{ см}^2;$$

$$W_x = \frac{b_{ст}h_{ст}^2}{6} = \frac{3 \cdot 6{,}5^2}{6} = 21{,}13 \text{ см}^3 \quad W_y = \frac{h_{ст}b_{ст}^2}{6} = \frac{6{,}5 \cdot 3^2}{6} = 9{,}75 \text{ см}^3$$

$$\frac{0}{19{,}5} + \frac{200}{21{,}13} + \frac{100}{9{,}75} \le 16 + 5\% \quad 19{,}73 \le 16 + 5\% = 16{,}8$$

Условие прочности не выполняется. Проверим *max* размеры:

$$A = h_{ст} \cdot b_{ст} = 7 \cdot 3{,}5 = 24{,}5 \text{ см}^2;$$

$$W_x = \frac{3{,}5 \cdot 7^2}{6} = 28{,}58 \text{ см}^3 \quad W_y = \frac{7 \cdot 3{,}5^2}{6} = 14{,}29 \text{ см}^3$$

$$\frac{0}{24{,}5} + \frac{200}{28{,}58} + \frac{100}{14{,}29} \le 16 + 5\% \quad 13{,}996 \le 16 + 5\%$$

Недогрузка $\Delta = \frac{13{,}996 - 16}{16} 100\% = -12{,}5\%$.

Окончательно для III участка выбираем прямоугольное сечение с размерами *h* = 7 см, *b* = 3,5 см.

3. Для одного участка, испытывающего изгиб с кручением, подобрать сплошное круглое сечение радиуса R, использовать четвертую теорию прочности, [σ] = 16 кН/см^2.

Изгиб с кручением испытывают II и IV участки. Рассмотрим один из них, например **II участок**.

В опасном сечении его:

$$N_{z_2}^{on} = 1\text{кН}, \; M_{x_2}^{on} = -4{,}5\text{кНм} = -450 \text{ кН} \cdot \text{см}, \; M_{y_2}^{on} = 2 \text{ кНм} = 200\text{кН} \cdot \text{см},$$

$$M_{z_2}^{on} = -2\text{кНм} = -200 \text{ кН} \cdot \text{см}.$$

Условие прочности при изгибе с кручением для подбора размеров сечения имеет вид (N_z^{on} пока не учитывается):

$$\frac{M_p^{(i)}}{W} \le [\sigma] \tag{4}$$

Здесь $M_p^{(i)}$ **- расчетный (приведённый) момент по *i*-ой теории прочности.**

По IV теории прочности

$$M_p^{IV} = \sqrt{M_u^{on2} + 0{,}75M_z^{on\,2}} \tag{5}$$

$M_u^{on} = \sqrt{M_x^{on\,2} + M_y^{on\,2}}$ **- полный изгибающий момент** в опасном сечении:

$$M_u^{on} = \sqrt{(-450)^2 + 200^2} = 492{,}44 \text{ кН·см}$$

$$M_p^{IV} = \sqrt{492{,}44^2 + 0{,}75(-200)^2} = 522{,}015 \text{ кН·см}$$

Из (4) найдем необходимый момент сопротивления круглого сечения:

$$W^H \ge \frac{M_p^{IV}}{[\sigma]} = \frac{522{,}015}{16} = 32{,}63 \text{ см}^3$$

Для сплошного круглого сечения радиуса R

$$W = \frac{\pi R^3}{4} \ge W^H \text{ отсюда } R \ge \sqrt[3]{\frac{4W^H}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 32{,}63}{3{,}14}} = \sqrt[3]{41{,}57} = 3{,}464 \text{ см}$$

За стандартные размеры примем диаметры кратные 0,5 см, следовательно, радиусы R - кратные 0,25 см.

В нашем случае можно принять

R = 3,25 см (*min*) или R = 3,5 см (*max*).

Проверим прочность сечения при R = 3,25 см с учетом $N_{z_2}^{оп} = 1$кН (по IV теории прочности). Предварительно вычислим:

$$A = \pi R^2 = 3{,}14 \cdot 3{,}25^2 = 33{,}17 \text{ см}^2;\ W = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 3{,}25^3}{4} = 26{,}95 \text{ см}^3$$

$$\sigma_z = \frac{|N_z^{оп}|}{A} + \frac{|M_u^{оп}|}{W} = \frac{1}{33{,}17} + \frac{492{,}44}{26{,}95} = 18{,}30 \text{ кН/см}^2$$

От кручения $\tau = \frac{M_z^{оп}}{W_\rho} = \frac{M_z^{оп}}{2W} = \frac{-200}{2 \cdot 26{,}95} = -3{,}71$ кН/см^2

Четвертая теория прочности: $\sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau^2} \le [\sigma] + 5\%$.

$$\sqrt{18{,}30^2 + 3(-3{,}71)^2} = 19{,}4 \le 16 + 5\% = 16{,}8.$$

Условие прочности при R = 3,25 см не выполняется.

Проверим R = 3,5 см (max):

$$A = \pi R^3 = 3{,}14 \cdot 3{,}5^2 = 38{,}47 \text{ см}^2;\ W = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 3{,}5^3}{4} = 33{,}66 \text{ см}^3$$

$$\sigma_z = \frac{1}{38{,}47} + \frac{492{,}44}{33{,}66} = 14{,}66 \text{ кН/см}^2 \quad \tau = \frac{-200}{2 \cdot 33{,}66} = -2{,}97 \text{ кН/см}^2$$

Четвертая теория прочности: $\sqrt{14{,}66^2 + 3(-2{,}97)^2} = 15{,}54 \le 16$

Недогрузка $\Delta = \frac{15{,}54 - 16}{16} 100\% = -2{,}9\%$.

Окончательно выберем сечение с R = 3,~~2~~5 см. 3,5 см.

ПРИМЕР К ЧАСТИ II

Исходные данные:

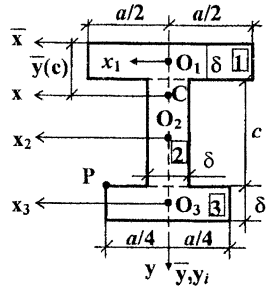


Рис.6

Рассмотрим стержень с поперечным сечением, показанным на рис.6. Сечение сложное, его надо разбить на прямоугольные части:

1 фигура a x δ;

2 фигура c x δ;

3 фигура 0,5a x δ.

Размеры a, c, δ надо определять через заданный размер «b» в табл.1.

.Пусть получилось a = 24 см, c = 26,8см, δ = 2,6 см.

РЕШЕНИЕ

1. Найдем центр тяжести сечения (т.C) и главные центральные моменты инерции J_x и J_y.

Сечение имеет одну ось симметрии «Y» - она является главной осью, вторая главная ось X перпендикулярна первой и проходит через т.C.

Введем произвольные оси $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ (рис.6) с учетом симметрии фигуры. Положение т.C можно определить так:

$$\bar{Y}(C) = \frac{S_{\bar{x}}}{A} = \frac{2153{,}84}{163{,}28} = \mathbf{13{,}19} \text{ см, где:}$$

$A = \sum_{i=1}^{3} A_i$ - суммарная площадь сечения;

$S_{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{3} A_i \bar{Y}(O_i)$ - статический момент сечения относительно оси $\bar{X}$.

<u>Примечание:</u> если сечение включает прямоугольное отверстие, то при суммировании эта площадь и статический момент считаются <u>отрицательными</u>.

$$A_1 = a \cdot \delta = 24 \cdot 2{,}6 = 62{,}4 \text{ см}^2;\ A_2 = c \cdot \delta = 26{,}8 \cdot 2{,}6 = 69{,}68 \text{ см}^2;$$

$$A_3 = 0{,}5a \cdot \delta = 12 \cdot 2{,}6 = 31{,}2 \text{ см}^2;\ A = 62{,}4+69{,}68+31{,}2 = \mathbf{163{,}28} \text{ см.}$$

$\bar{Y}(O_i)$ - координаты центров тяжести O_i каждого прямоугольника вдоль оси $\bar{Y}$:

$\bar{Y}(O_1) = \delta/2 = 1{,}3$ см; $\bar{Y}(O_2) = \delta + c/2 = 2{,}6 + 26{,}8/2 = 16$ см;

$\bar{Y}(O_3) = \delta + c + \delta/2 = 2{,}6 + 26{,}8 + 1{,}3 = 30{,}7$ см

$S_{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{3} A_i \bar{Y}(O_i) = 62{,}4 \cdot 1{,}3 + 69{,}68 \cdot 16 + 31{,}2 \cdot 30{,}7 = \mathbf{2153{,}84}$ **см^3**

Определив $\bar{Y}(C)$ находим положение т.C и проводим главные центральные оси XCY.

Для вычисления моментов инерции используем формулу изменения моментов инерции при параллельном переносе осей (верхний индекс в скобках при J определяет номер фигуры, а нижний определяет ось):

$J_{\bar{x}} = J_x + A\bar{Y}^2(C)$ отсюда $J_x = J_{\bar{x}} - A\bar{Y}^2(C)$

$$J_{\bar{x}} = J_{\bar{x}}^{(1)} + J_{\bar{x}}^{(2)} + J_{\bar{x}}^{(3)} = 140,6 + 22008,66 + 29423,3 = 51572,6\,\text{см}^4$$

$$J_{\bar{x}}^{(1)} = J_{x_1}^{(1)} + A_1\bar{Y}^2(O_1) = \frac{24\cdot 2,6^3}{12} + 62,4\cdot 1,3^2 = 140,6\ \text{см}^4$$

$$J_{\bar{x}}^{(2)} = J_{x_2}^{(2)} + A_2\bar{Y}^2(O_2) = \frac{2,6\cdot 26,8}{12} + 69,68\cdot 16^2 = 22008,66\ \text{см}^4$$

$$J_{\bar{x}}^{(3)} = J_{x_3}^{(3)} + A_3\bar{Y}^2(O_3) = \frac{12\cdot 2,6}{12} + 31,2\cdot 30,7^2 = 29423,3\ \text{см}^4$$

$$\boldsymbol{J_x} = J_{\bar{x}} - A\bar{Y}^2(C) = 51572,6 - 163,28\cdot 13,19^2 = \mathbf{23165,8\ см^4}$$

Все оси $Y, \bar{Y}$ и Y_1 совпадают (ввиду симметрии сечения), поэтому

$$\boldsymbol{J_y} = J_{y_1}^{(1)} + J_{y_2}^{(2)} + J_{y_3}^{(3)} = 2995,2 + 39,25 + 374,4 = \mathbf{3408,9\ см^4}$$

$$J_{y_1}^{(1)} = \frac{\delta a^3}{12} = \frac{2,6\cdot 24^3}{12} = 2995,2\ \text{см}^4;\ J_{y_2}^{(2)} = \frac{c\delta^3}{12} = \frac{26,8\cdot 2,6^3}{12} = 39,25\ \text{см}^4;$$

$$J_{y_3}^{(3)} = \frac{\delta(0,5a)^3}{12} = \frac{2,6\cdot 12^3}{12} = 374,4\ \text{см}^4$$

Найдем радиус инерции сечения:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \sqrt{\frac{23165,8}{163,28}} = \mathbf{11,91\ см};\ i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{3408,9}{163,28}} = \mathbf{4,57\ см}$$

Вычислим координаты точки Р приложения сжимающей силы F в главных центральных осях (см.рис.7):

$$\boldsymbol{X_P} = a/4 = \mathbf{6\ см};\ \boldsymbol{Y_P} = \delta + C - \bar{Y}(C) = 2,6 + 26,8 - 13,19 = \mathbf{16,21\ см}$$

Определим положение нейтральной оси (Н.О) сечения. Для этого вычислим отрезки a_x и a_y, которые Н.О отсекает на осях координат:

$$a_x = -\frac{i_y^2}{X_p} = -\frac{4,57^2}{6} = -3,48\ \text{см};\ a_y = -\frac{i_x^2}{Y_p} = -\frac{11,91^2}{16,21} = -8,75\ \text{см}$$

Рисуем сечение стержня в масштабе и, откладывая на этом чертеже отрезки a_x и a_y с учетом знаков, найдем положение Н.О (рис.7).

Пронумеруем все угловые точки сечения т.1.÷12. Нейтральная ось делит сечение на две зоны: сжатую (где расположена т.Р, в которой действует сжимающая сила F) и растянутую. Из рис.7 видно, что в растянутой зоне максимально удаленной от Н.О будет т.6, в в сжатой зоне – т.12.

Если Н.О не пересекает сечение, то все сечение работает на сжатие (растянутой зоны нет).

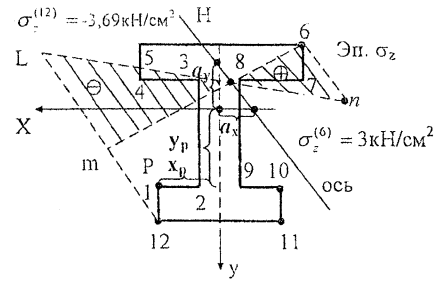


Рис.7

В любой i-той точке сечения (с координатами x_i, y_i) при внецентренном нагружении нормальные напряжения $\sigma_z^{(i)}$ можно найти по формуле:

$$\sigma_z^{(i)} = N_z\left(\frac{1}{A} + \frac{Y_p Y_i}{J_x} + \frac{X_p x_i}{J_y}\right). \qquad (6)$$

Условие прочности в т.6 ($x_6 = -12$ см, $y_6 = -\bar{Y}(C) = -13,19$ см).

$$\sigma_z^{(6)} = N_z^{(+)}\left(\frac{1}{163,28} + \frac{16,21(-13,19)}{23165,28} + \frac{6(-12)}{3408,28}\right) \le 3$$

$N_z^{(+)}(-0,024255) \le 3$. Отсюда найдем $N_z^{(+)} = F^{(+)}$ - допускаемую нагрузку из условия прочности в растянутой зоне сечения:

$$F^{(+)} = -123,70\ \text{кН}.$$

Условие прочности в т.12 ($x_{12} = 6$ см, $y_{12} = Y_p + \delta = 16,21+2,6=18,81$ см).

$$\sigma_z^{(12)} = N_z^{(-)}\left(\frac{1}{163,28} + \frac{16,21\cdot 18,81}{23165,28} + \frac{6\cdot 6}{3408,28}\right) \le -9$$

$N_z^{(-)}(+0,02982) \le -9$. Отсюда найдем $N_z^{(-)} = F^{(-)}$ - допускаемую нагрузку из условия прочности в сжатой зоне сечения:

$$F^{(-)} = -301,8\ \text{кН}.$$

Из этих двух $F^{(+)}$ и $F^{(-)}$ за общую допускаемую нагрузку $[F]$ необходимо принять *min* (по модулю)

Итак $[F]$ = -123,7 кН.

Построим эпюру σ_z в сечении колонны.

Согласно (6) $\sigma_z^{(i)}$ - линейно меняются по координатам точек x_i и y_i сечения. Поэтому эпюру σ_z можно построить по двум значениям $\sigma_z^{(i)}$ от $[F]$:

1) в т.6 от $[F] = F^{(+)}$ = -123,7 кН $\sigma_z^{(6)}$ = 3 кН/см².

2) в т.12 от $[F]$ $\sigma_z^{(12)} = [F]\,(0,02982)$ = -- 3,69 кН/см²

Строим эпюру σ_z. Из т.6 проводим перпендикуляр к Н.О, отрезок (6–m). В т.6 под углом 90° к (6–m) отложим $\sigma_z^{(6)}$ = 3 кН/см², получим точку n. Из т.12 проводим отрезок (12–m–L), параллельно Н.О. Отложим $\sigma_z^{(12)}$ = – 3,69 кН/см², равное отрезку (m–L).

Напряжения откладывать в масштабе, смена знаков на эпюре σ_z происходит в точке, где отрезок (L–n) пересекается с Н.О. Эпюра σ_z показана на рис.7.

ПОСТРОЕНИЕ ЯДРА СЕЧЕНИЯ

Ядро сечения – область около центра тяжести сечения, располагая в которой точку «Р» приложения силы F, во всем сечении будут возникать напряжения только одного знака (т.е. Н.О. при этом не пересекает сечение). Если т.Р. расположена на границе ядра сечения, то нейтральная ось только касается контура сечения. На этом и основан порядок построения ядра сечения, показанного на рис.8. Для определения граничных точек ядра сечения даем Н.О. все возможные положения, касательные к контору сечения (рис.8).

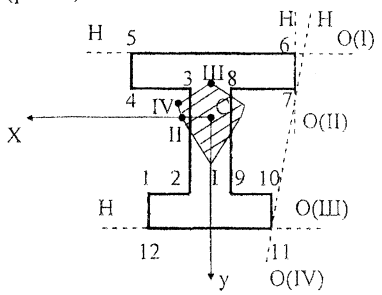


Рис.8

В нашем примере достаточно провести четыре положения Н.О. ввиду симметрии сечения:
НО(I) через т.5 и 6;
НО (II) через т.6 и 7;
НО (IV) через т.7 и 11;
НО (III) через т.11 и 12.
Для НО (I)÷НО(III) легко определить отрезки $a_x^{(i)}, a_y^{(i)}$, которые эти Н.О. отсекают на осях x и y.

Следовательно, можно найти $x_p^{(i)}$ и $y_p^{(i)}$ - координаты точек полюса «Р», которым соответствует каждое положение Н.О. по формулам:

$$x_p^{(i)} = -\frac{i_y^2}{a_x^{(i)}} = x_я^{(i)};\ \ y_p^{(i)} = -\frac{i_x^2}{a_y^{(i)}} = y_я^{(i)}. \qquad (7)$$

Это и будут координаты граничных точек ядра сечения. Найдем их:

Н.О. (I): $a_x^{(I)} = \infty$; $a_y^{(I)} = y_6 = -13{,}19$ см; $x_я^{(I)} = 0$; $y_я^{(I)} = -\dfrac{11{,}91^2}{13{,}19} = 10{,}75$ см

Н.О. (II): $a_x^{(II)} = x_6 = -12$ см; $a_y^{(II)} = \infty$; $x_я^{(II)} = -\dfrac{4{,}57^2}{12} = 1{,}74$ см; $y_я^{(II)} = 0$

Н.О. (III): $a_x^{(III)} = \infty$; $a_y^{(III)} = y_{12} = 18{,}81$ см; $x_я^{(III)} = 0$; $y_я^{(III)} = -\dfrac{11{,}91^2}{18{,}81} = -7{,}54$ см.

Сечение на рис.8 рисуется в масштабе и в этом же масштабе откладываются координаты $x_я^{(i)}$ и $y_я^{(i)}$ с учетом знаков. Получим граничные точки ядра сечения (I)÷ (III). Для Н.О. (IV) найти отрезки a_x и a_y затруднительно. Поэтому, для таких (наклонных) Н.О. проще использовать уравнение нейтральной оси

$$1 + \frac{x_p x_0}{i_y^2} + \frac{y_p y_0}{i_x^2} = 0. \qquad (8)$$

Здесь x_0 и y_0 координаты точки на Н.О.

Нейтральная ось IV проходит через т.7, координаты которой $x_0^{(7)} = -12$ см; $y_0^{(7)} = -(\bar{y}(c) - \delta) = -10{,}59$см и через т.11 $x_0^{(11)} = -6$ см; $y_0^{(11)} = 18{,}81$см$= y_{12}$.

Подставляя это в уравнение (8), получим два уравнения с двумя неизвестными x_p и y_p:

т.7: $$1 + \frac{x_p(-12)}{4{,}57^2} + \frac{y_p(-10{,}59)}{11{,}91^2} = 0.$$

т.11: $$1 + \frac{x_p(-6)}{4{,}57^2} + \frac{y_p 18{,}81}{11{,}91^2} = 0.$$

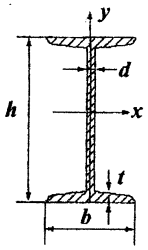
Решая эти уравнения, найдем $x_p = x_я^{(IV)} = 2{,}12$ см, $y_p = y_я^{(IV)} = -2{,}94$ см. Откладываем эти координаты, получим точку IV ядра на рис.8. Согласно свойства Н.О. (*при вращении Н.О. вокруг точки, полюс (т. «Р») движется по прямой*), полученные точки I-IV ядра соединяем прямыми линиями. Получим половину ядра, а т.к. сечение симметрично относительно оси y, то ядро сечения симметрично относительно оси y. Ядро сечения заштриховано на рис.8.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартышев В.П. Сопротивление материалов: Курс лекций. – Казань, КГАСУ, 2010. – 200с.
2. Каюмов Р.А. Сопротивление материалов: Конспект лекций. Офсет, КГАСУ, Казань, 2010.-170с.

Приложение 2

Сталь горячекатаная. Балки двутавровые (по ГОСТ 8239-72)

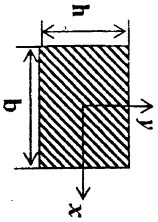
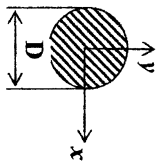
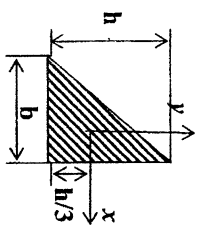
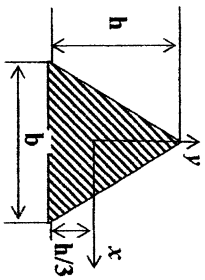


h – высота балки;
b – ширина полки;
d – толщина стенки;
t –средняя толщина полки;

J - момент инерции;
W - момент сопротивления;
i - радиус инерции;
S -статический момент полусечения;

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения А, см^2	J_x,см^4	W_x,см^3	i_x, см	S_x, см^3	J_y,см^4	W_y,см^3	i_y,см^3	Масса 1м, 1 кг
	h	*b*	*d*	*t*									
10	100	55	4,5	7.2	12	198	39.7	4.06	23	17.9	6.49	1.22	9.46
12	120	64	4,8	7.3	14.7	350	58.4	4.88	33.7	27.9	8.72	1.38	11.5
14	140	73	4,9	7.5	17.4	572	81.7	5.73	46.8	41.9	11.5	1.55	13.7
16	160	81	5	7.8	20.2	873	109	6.57	62.3	58.6	14.5	1.7	15.9
18	180	90	5.1	8.1	23.4	1290	143	7.42	81.4	82.6	18.4	1.88	18.4
18a	180	100	5.1	8.3	25.4	1430	159	7.51	89.8	114	22.8	2.12	19.9
20	200	100	5.2	8.4	26.8	1840	184	8.28	104	115	23.1	2.07	21
20a	200	110	5.2	8.6	28.9	2030	203	8.37	114	155	28.2	2.32	22.7
22	220	110	5.4	8.7	30.6	2550	232	9.13	131	157	28.6	2.27	24
22a	220	120	5.4	8.9	32.8	2790	254	9.22	143	206	34.3	2.5	25.8
24	240	115	5.6	9.5	34.8	3460	289	9.97	163	198	34.5	2.37	27.3
24a	240	125	5.6	9.8	37.5	3800	317	10.1	178	260	41.6	2.63	29.4
27	270	125	6	9.8	40.2	5010	371	11.2	210	260	41.5	2.54	31.5
27a	270	135	6	10.2	43.2	5500	407	11.3	229	337	50	2.8	33.9
30	300	135	6.5	10.2	46.5	7080	472	12.3	268	337	49.9	2.69	36.5
30a	300	145	6.5	10.7	49.9	7780	518	12.5	292	436	60.1	2.95	39.2
33	330	140	7	11.2	53.8	9840	597	13.5	339	419	59.9	2.79	42.2
36	360	145	7.5	12.3	61.9	13380	743	14.7	423	516	71.1	2.89	48.6
40	400	155	8.3	13	72.6	19062	953	16.2	545	667	86.1	3.03	57
45	450	160	9	14.2	84.7	27696	1231	18.1	708	808	101	3.09	66.5
50	500	170	10	15.2	100	39727	1589	19.9	919	1043	123	3.23	78.5
55	550	180	11	16.5	118	55962	2035	21.8	1181	1356	151	3.39	92.6
60	600	190	12	17.8	138	76806	2560	23.6	1491	1725	182	3.54	108

Геометрические характеристики некоторых сечений

Сечение	A	J_x	J_y	W_x
	bh	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{bh^2}{6}$
	$\frac{\pi D^2}{4}$	$\frac{\pi D^4}{64}$	$\frac{\pi D^4}{64}$	$\frac{\pi D^3}{32}$
	$\frac{1}{2}bh$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{36}$	$\frac{bh^2}{24}$
	$\frac{1}{2}bh$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{48}$	$\frac{bh^2}{24}$