8. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка..32
9. Линейные однородные уравнения второго порядка 33
10. Линейные неоднородные уравнения второго порядка.....34
11. Метод вариации произвольных постоянных для нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения второго порядка.....35

IV. ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ.....37
1. Определение и свойства интеграла по поверхности.....37
2. Вычисление интеграла по поверхности.....38
3. Применение интеграла по поверхности к решению физических задач.....39
4. Формула Остроградского.....40
5. Формула Стокса. Условия независимости криволинейного интеграла по пространственной кривой от линии интегрирования.....40

V. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ.....42
1. Понятия векторного поля и векторной линии.....42
2. Поток вектора через поверхность.....43
3. Дивергенция векторного поля.....44
4. Циркуляция, ротор (вихрь) векторного поля.....45
5. Оператор Гамильтона. Оператор Лапласа.....48
6. Простейшие векторные поля.....49

ЛИТЕРАТУРА.....52

Редактор Н.Х. Михайлова
Корректор М.А. Рожавина

Редакционно-издательский отдел
Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Подписано в печать 5.12.05. Формат 60x84/ 16
Заказ 671. Бумага тип N 1 Усл.-печ. л. 3,7
Тираж 300 экз. Печать RISO Усл.-изд. л. 3,7

Печатно-множительный отдел КГАСУ
420043, Казань, Зеленая, 1.

С.И.Филиппов

КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ЗАОЧНОГО И ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ

Часть III

Учебное пособие

Казань
2005

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РФ

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

С.И.Филиппов

КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ЗАОЧНОГО И ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ

Часть III

Учебное пособие

Казань

2005

УДК 517
ББК 22.1
Ф 53

Ф 53 Филиппов С.И. Краткий курс высшей математики для заочного и дистанционного обучения: Учебное пособие. Часть III. — Казань: Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 2005. – 54 с.

ISBN 5-7829-0146-2
Печатается по решению РИС КГАСУ

Учебное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов второго курса (третий семестр) заочной и дистанционной форм обучения. Часть III содержит необходимый теоретический материал по кратным, криволинейным и поверхностным интегралам, дифференциальным уравнениям и элементам теории векторного поля.

Научный редактор – доктор физ.-мат. наук, профессор Р.Б. Салимов
Рецензенты: доктор физ.-мат. наук, профессор С.Р. Насыров
доктор техн. наук, профессор В.Ф. Шарафутдинов

ISBN 5-7829-0146-2

© Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 2005
© Филиппов С.И., 2005

I. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Объём цилиндрического тела

Пусть на плоскости Oxy, в области D, задана функция двух переменных $z = f(x, y)$, непрерывная и положительная всюду в D. В пространстве $Oxyz$ уравнение $z = f(x, y)$ определяет поверхность. Так как $f(x, y) > 0$ в области D, то указанная поверхность расположена выше плоскости Oxy (рис. 1).

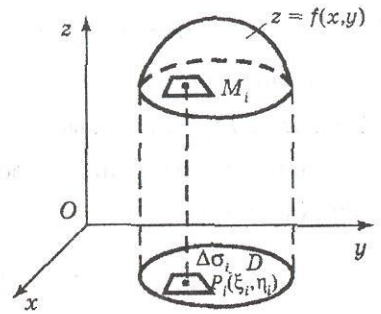

Рис. 1

Требуется найти объем цилиндрического тела, основанием которого является область D, сверху ограниченного поверхностью с уравнением $z = f(x, y)$, а с боков – цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz и проходящими через границу области D.

Разобьем область D на n частей, которые будем называть частичными областями. Эти области и их площади обозначим $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, ... , $\Delta\sigma_i$, ... , $\Delta\sigma_n$. Через границу каждой частичной области проведём цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oz. Тем самым рассматриваемое цилиндрическое тело разобьём на n частей – цилиндрических тел. Внутри частичной области $\Delta\sigma_i$ возьмём произвольную точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$. В этой точке вычислим значение заданной функции $f(\xi_i, \eta_i) = f(P_i)$. Это значение равно $f(\xi_i, \eta_i) = f(P_i) = P_iM_i$ – расстоянию от точки P_i до точки M_i поверхности $z = f(x, y)$. Точка P_i – проекция точки M_i на плоскость Oxy при проектировании параллельно оси Oz. Через точку M_i проведём плоскость параллельно плоскости Oxy. На этой плоскости цилиндрическая поверхность, проведённая через границу области $\Delta\sigma_i$ с образующими, параллельными оси Oz, отсечёт фигуру с площадью

$\Delta\sigma_i$ (см. рис. 1). Таким образом получится цилиндр с площадью основания $\Delta\sigma_i$, высотой $f(\xi_i, \eta_i)$ и, следовательно, объёмом, равным $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$. Этим цилиндром заменим i–ю часть цилиндрического тела с основанием $\Delta\sigma_i$. Такое же построение выполним для всех частей области D, на которые мы её разбили. Тогда получим ступенчатое тело, состоящее из n цилиндров. Объём этого тела обозначим V_n. Он равен сумме объёмов цилиндров, из которых тело состоит:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i. \qquad (1)$$

Диаметром d_i частичной области $\Delta\sigma_i$ называется наибольшее расстояние между точками границы этой области. Пусть $\max d_i$ есть наибольший из всех диаметров частичных областей области D. Пусть число делений $n \to \infty$ так, что $\max d_i \to 0$, т. е. все частичные области стягиваются в точки. Тогда вышеуказанное ступенчатое тело по форме будет приближаться к исходному цилиндрическому, поэтому естественно за объём V цилиндрического тела принять $\lim\limits_{\substack{n\to\infty,\\ \max d_i\to 0}} V_n = V$.

Подставим сюда сумму из формулы (1) и получим

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \max d_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i. \qquad (2)$$

2. Двойной интеграл и его геометрический смысл

Пусть в области D задана функция $f(x, y) = f(P)$, где $P(x, y)$ – любая точка области. Будем считать, что эта функция принимает любые значения. Область D разобьём на n частей с площадями $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$. Внутри области $\Delta\sigma_i$ возьмём произвольную точку P_i с координатами (ξ_i, η_i) и вычислим в ней значение заданной функции, т. е. найдём $f(\xi_i, \eta_i) = f(P_i)$. Это значение умножим на площадь $\Delta\sigma_i$ i-й частичной области. Подобные вычисления проведем

для всех частей, на которые разбили область D. Просуммируем все произведения, получим $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$. Эта сумма называется *интегральной суммой* для функции $f(x, y)$ и области D, в которой функция задана. Пусть $\max d_i$ – наибольший из диаметров частичных областей $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$. Пусть число делений $n \to \infty$ так, что $\max d_i \to 0$, т. е. все частичные области стягиваются в точки. Тогда, если существует конечный предел вышеуказанной интегральной суммы и он не зависит ни от способа разбиения области D, ни от выбора точек $P(\xi_i, \eta_i)$, то его называют *двойным интегралом* от функции $f(x, y) = f(P)$ по области D и обозначают

$$\iint_D f(P)\,d\sigma = \iint_D f(x, y)\,dxdy = \lim_{\substack{n\to\infty\\ \max d_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i. \qquad (3)$$

Здесь $d\sigma = dxdy$ – элемент площади; $f(P)d\sigma$ – подинтегральное выражение; x, y – переменные интегрирования; D – область интегрирования.

Отметим частный случай формулы (3), когда $f(x, y) = 1$ всюду в области D, тогда $\iint\limits_D dxdy = S$ – площади области интегрирования D.

Если всюду в области D функция $f(x, y) = f(P) > 0$, то согласно формуле (2) предел правой части (3) равен V – объёму соответствующего цилиндрического тела

$$V = \iint_D f(P)\,d\sigma = \iint_D f(x, y)\,dxdy. \qquad (4)$$

В этом заключается *геометрический смысл двойного интеграла.* Если всюду в области D функция $z = f(x, y)$ принимает отрицательные значения, тогда цилиндрическое тело вместе с поверхностью лежат

ниже плоскости Oxy. Нетрудно показать, что в этом случае $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = -V$, где V – объём указанного цилиндрического тела.

3. Тройной интеграл и его механический смысл

Пусть в области V с границей S в пространстве $Oxyz$ задана функция $f(x,y,z) = f(P)$, где $P(x,y,z)$ – любая точка области V (рис. 2). Разобьем область V на n частей, объёмы которых и сами области обозначим ΔV_1, ΔV_2, ... , ΔV_n. Внутри области ΔV_i возьмём произвольную точку $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ и вычислим в ней значение заданной функции, т. е. найдём $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) = f(P_i)$. Это значение умножим на ΔV_i – объём i-й части. Подобную операцию проделаем со всеми частями, на которые разбили область V, и, сложив все произведения, получим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i$. Пусть d_i – диаметр области ΔV_i, т. е. наибольшее расстояние между точками границы области ΔV_i, и $\max d_i$ есть наибольший из всех диаметров частичных областей ΔV_i области.

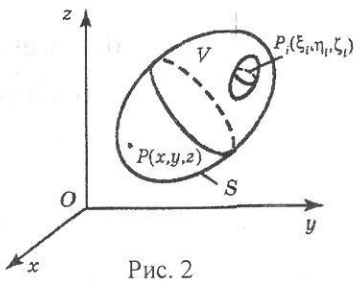

Рис. 2

Если существует конечный предел вышеуказанной интегральной суммы при $n \to \infty$, $\max d_i \to 0$ и он не зависит ни от способа разбиения области V, ни от выбора точек $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, то этот предел называют *тройным интегралом* по области V от функции $f(x,y,z) = f(P)$ и обозначают

$$\iiint\limits_V f(P)dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max d_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i. \quad (5)$$

Здесь $dV = dxdydz$ называется элементом объёма, а остальные термины называют так же, как и в случае двойного интеграла.

Отметим частный случай. Формула (5), когда $f(x,y,z) \equiv 1$ всюду в области V, даёт $\iiint\limits_V f(P)dV = \iiint\limits_V dV = \iiint\limits_V dxdydz = V$ – величину объёма области интегрирования V.

Можно показать, что если функция $f(P)$ непрерывна в области V, то существует конечный предел формулы (5), т.е. существует тройной интеграл этой формулы. Аналогичное утверждение справедливо и для двойного интеграла.

Рассмотрим *механический смысл тройного интеграла.* Пусть область V сплошь заполнена веществом и Δm_i – масса вещества, заключённого внутри объёма ΔV_i, содержащего внутри себя точку P_i. Тогда предел $\lim(\Delta m_i / \Delta V_i)$, когда $\Delta V_i \to 0$ и стягивается в точку P_i, называется *плотностью вещества в точке* P_i. Пусть вещество внутри объёма V распределено неравномерно, и в каждой точке $P(x,y,z)$ плотность равна $\gamma(x,y,z)$. Пусть функция $\gamma(x,y,z)$, характеризующая распределение плотности по телу, известна всюду в области V. Тогда масса вещества, заключённого в объёме V (масса тела V), определяется формулой

$$M = \iiint\limits_V \gamma(x,y,z)dxdydz.$$

4. Свойства двойного (тройного) интеграла

Запишем эти свойства для двойных интегралов, для тройных интегралов они аналогичны.

1. Постоянный множитель можно вынести за знак двойного интеграла, т. е. если $A = \text{const}$, то

$$\iint Af(x,y)d\sigma = A\iint f(x,y)d\sigma.$$

2. Двойной интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме двойных интегралов от слагаемых функций. Например, для двух функций

$$\iint\limits_D [f(x,y) + \varphi(x,y)]d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)d\sigma + \iint\limits_D \varphi(x,y)d\sigma.$$

3. Если $f(x,y) \ge \varphi(x,y)$ всюду в области D, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma \ge \iint\limits_D \varphi(x,y)\,d\sigma.$$

4. Если m, M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y)$ в области D, то

$$mS \le \iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma \le MS,$$

где S – площадь области D.

5. Если $f(x,y)$ непрерывна всюду в области D и на её границе, то в области D найдётся по крайней мере одна точка $M(\xi,\eta)$, для которой справедлива формула

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = f(\xi,\eta)\,S.$$

6. Если область D разбита на две части D_1 и D_2, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,d\sigma.$$

Для тройного интеграла свойства формулируются так же, только в свойствах 4 и 5 площадь S области D нужно заменить на объём области V.

5. Вычисление двойного интеграла

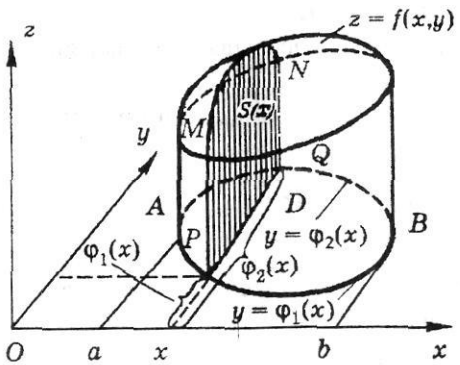

Рис. 3

Пусть в области D на плоскости Oxy задана функция $f(x,y)$ которая принимает положительные значения всюду в области D (рис. 3). Тогда двойной интеграл от этой функции по области D, как мы знаем, равен объёму цилиндрического тела, ограниченного снизу областью D, а сверху

– поверхностью с уравнением $z = f(x,y)$:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = V. \qquad (6)$$

Пусть область D лежит между прямыми $x = a$ и $x = b$, параллельными оси Oy и имеющими общие точки с границей области D. Кривые APB, AQB – части границы области D, заданные соответственно уравнениями $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $a \le x \le b$. Здесь a, b – абсциссы точек A, B границы области D. Будем считать, что функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ однозначны. Это означает, что любая прямая, параллельная Oy и проходящая через точку x интервала $[a,b]$, пересекает линию APB, а также линию AQB только в одной точке, причём $\varphi_1(x)$ – ордината P – точки входа этой прямой в область D, $\varphi_2(x)$ – ордината Q – точки выхода этой прямой из области D. Ясно, что по этой прямой плоскость Oxy пересекает плоскость, перпендикулярную к Ox и проходящую через точку x. Эта плоскость пересекает рассматриваемое цилиндрическое тело по фигуре $PMNQ$, представляющей собой криволинейную трапецию с основанием PQ. Сверху трапеция ограничена кривой MN. Все точки указанной плоскости, следовательно, и кривой MN, имеют одну и ту же абсциссу x. Но так как кривая MN лежит на поверхности $z = f(x,y)$, то координаты точек этой кривой удовлетворяют уравнению $z = f(x,y)$ поверхности. У всех точек кривой MN абсцисса не изменяется, а изменяется ордината y от значения $\varphi_1(x)$ – ординаты точки P, до значения $\varphi_2(x)$ – ординаты точки Q, аппликата $z = f(x,y)$.

Площадь S трапеции $PMNQ$ можем вычислить с помощью определённого интеграла, а именно,

$$S = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy,\ x = \text{const}.$$

Ясно, что для различных фиксированных x из интервала $[a, b]$ эта площадь будет различной, так как будут различаться соответствующие криволинейные трапеции, т. е. эта площадь есть функция от x. Обозначим её $S(x)$. Таким образом,

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy, \tag{7}$$

где $a \le x \le b$.

Объём V рассматриваемого цилиндрического тела выражается с помощью определённого интеграла, взятого от a до b для функции $S(x)$, т. е.

$$V = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right] dx.$$

Но с другой стороны, найденный объём V согласно (6) равен двойному интегралу, поэтому

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right] dx.$$

Выражение в правой части называется *двукратным интегралом*. Последнюю формулу можно записать в более простой форме

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy. \tag{8}$$

6. Замена переменных в двойном интеграле

Даны декартова система координат Oxy на плоскости, область D на ней, ограниченная кривой L, и $P(x, y)$ – некоторая точка этой области. Пусть $O'uv$ – другая декартова система координат, в ней D' – область, ограниченная кривой L', и $P'(u, v)$ – некоторая точка области D'. Пусть заданы две функции:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \tag{9}$$

которые будем считать непрерывными и имеющими непрерывные частные производные первого порядка как по u, так и по v всюду в области D'. Предположим, что функции (9) таковы, что между точками области D, с одной стороны, и точками области D', с другой, установлено взаимнооднозначное соответствие. Образуем определитель из частных производных

$$J = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Он называется *определителем Якоби* для функций (9).

Формула замены переменных в двойном интеграле имеет вид

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \iint_{D'} f\left[\varphi(u, v), \psi(u, v)\right] \cdot |J|\,dudv. \tag{11}$$

7. Переход в двойном интеграле к полярным координатам

Пусть в декартовой системе координат Oxy задана область D, ограниченная кривой L. В плоскости Oxy кроме декартовой введём полярную систему координат, поместив полюс в точку O и направив полярную ось по Ox в положительном направлении (рис. 4). Пусть x, y – декартовы координаты точки M области D, а θ и ρ – полярные координаты этой точки. Как видно из рис. 4,

$$x = \rho\cos\theta; \quad y = \rho\sin\theta. \tag{12}$$

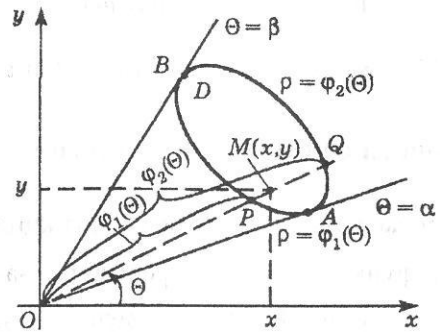

Рис. 4

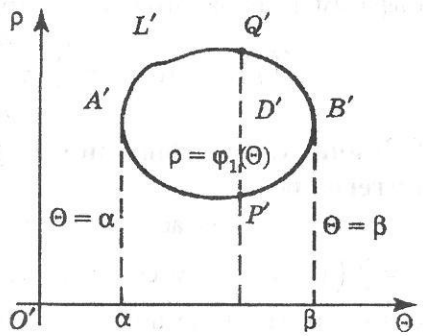

Рис. 5

Пусть граница области D задана уравнениями в полярных координатах, а именно, участок APB кривой L задан уравнением

$\rho = \varphi_1(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, а участок AQB кривой L – уравнением $\rho = \varphi_2(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$. Отметим, что уравнение $\theta = \alpha$ определяет ось OA, а уравнение $\theta = \beta$ – ось OB. Отметим также, что при θ фиксированном $\varphi_1(\theta)$ есть расстояние OP, а $\varphi_2(\theta)$ – расстояние OQ. Введем ещё одну декартову систему $O'\theta\rho$. В этой системе θ, ρ уже декартовы координаты точки плоскости $O'\theta\rho$. По формулам (12) каждой точке области D будет отвечать точка области D' в плоскости $O'\theta\rho$. Уравнения $\theta = \alpha$ и $\theta = \beta$ в плоскости $O'\theta\rho$ определяют прямые, параллельные оси $O'\rho$. Между этими прямыми расположена область D'. Ясно, что участку APB кривой L с уравнением $\rho = \varphi_1(\theta)$ отвечает участок $A'P'B'$ кривой L' с тем же уравнением $\rho = \varphi_1(\theta)$. Кривой AQB отвечает часть $A'Q'B'$ кривой L' с уравнением $\rho = \varphi_2(\theta)$. Для функций (12) вычислим определитель Якоби $J = -\rho$. Таким образом, $|J| = \rho$. Запишем формулу (11) для нашего случая :

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f[\rho\cos\theta, \rho\sin\theta]\cdot\rho\,d\theta\,d\rho. \qquad (13)$$

Выразим двойной интеграл по этой области D' через двукратный

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int\limits_\alpha^\beta d\theta \int\limits_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f[\rho\cos\theta, \rho\sin\theta]\cdot\rho\,d\rho. \qquad (14)$$

8. Вычисление площади поверхности с помощью двойного интеграла

Пусть в области D на плоскости Oxy задана функция $z = f(x, y)$. Будем считать, что эта функция имеет непрерывные частные производные по x и по y в области D. Для определённости предположим, что $f(x, y) > 0$ в D. При этом в пространстве $Oxyz$ функции $z = f(x, y)$ отвечает поверхность, расположенная выше плоскости Oxy (рис. 6). Требуется вычислить площадь S этой поверхности.

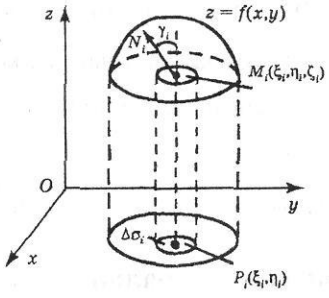

Рис. 6

Разобьём область D на n частей с площадями $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, ..., \Delta\sigma_n$. Внутри части с площадью $\Delta\sigma_i$ возьмём произвольную точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$. В этой точке вычислим значение заданной функции $z = f(x, y)$ и найдём число $z_i = f(\xi_i, \eta_i)$. Это число – аппликата некоторой точки M_i поверхности $z = f(x, y)$. Очевидно, абсцисса и ордината точки M_i и P_i совпадают. В точке M_i проведём касательную плоскость к поверхности $z = f(x, y)$, а через границу области $\Delta\sigma_i$ – цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oz. Эта поверхность отсечет на только что проведённой касательной плоскости фигуру, площадь которой обозначим ΔS_i. Это построение выполним для всех частей, на которые мы разбили область D, и получим фигуру, состоящую из n кусков касательных плоскостей, проведённых к поверхности $z = f(x, y)$ в точках M_1, M_2, ..., M_n. Площадь этой фигуры равна сумме площадей, из которых она состоит, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i$. Пусть $\max d_i$ – наибольший из всех диаметров частичных областей $\Delta\sigma_i$. Число n устремим к бесконечности так, чтобы $\max d_i \to 0$. Тогда все $\Delta\sigma_i$ стягиваются в точки, и фигура, состоящая из кусков касательных плоскостей, приближается к заданной поверхности. Поэтому естественно за площадь поверхности S принять предел площади указанной фигуры (состоящей из кусков касательных плоскостей):

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max d_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i. \qquad (15)$$

Рассматривая вектор $\overline{N_i}$, направленный по нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке M_i, и γ_i – острый угол, образованный этим вектором с осью Oz, можно получить формулу для вычисления площади поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$

$$S = \iint_D \sqrt{f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y) + 1}\, d\sigma,\ d\sigma = dxdy. \qquad (16)$$

9. Вычисление объёмов с помощью двойных интегралов

Найдем объём V тела, показанного на рис. 7, для которого D является проекцией на плоскость Oxy при проектировании параллельно оси Oz. Данное тело ограничено сверху поверхностью $z = \Phi_2(x, y)$ и снизу – поверхностью $z = \Phi_1(x, y)$.

Согласно формуле (4), интеграл

$$\iint_D \Phi_2(x, y)\, d\sigma = V_2$$

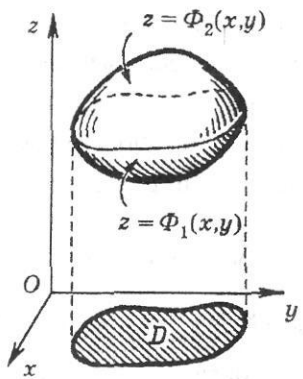

Рис. 7

равен объёму цилиндрического тела, ограниченного снизу областью D, а сверху – поверхностью $z = \Phi_2(x, y)$.

Далее, интеграл

$$\iint_D \Phi_1(x, y)\, d\sigma = V_1$$

равен объёму цилиндрического тела, ограниченного снизу областью D, а сверху – поверхностью $z = \Phi_1(x, y)$.

Ясно, что искомый объём будет равен $V = V_2 - V_1$ или

$$V = \iint_D \left[\Phi_2(x, y) - \Phi_1(x, y)\right] d\sigma,\ d\sigma = dxdy.$$

10. Вычисление тройного интеграла

Пусть в пространстве $Oxyz$ задана область V, в которой определена непрерывная функция $f(x, y, z)$. Пусть D – проекция области V на плоскость Oxy (при проектировании параллельно оси Oz). Чтобы осуществить это проектирование, проведем цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oz, которая касается границы S области V по линии, разделяющей границу S области V на две части: верхнюю и нижнюю. Пусть верхняя часть определяется уравнением $z = \Phi_2(x, y)$, а нижняя – уравнением $z = \Phi_1(x, y)$. Эти функции считаем однозначными всюду в области D. Геометрически это означает, что прямая, проходящая через любую точку $K(x, y)$ области D параллельно оси Oz, пересекает нижнюю и верхнюю части поверхности S в одной точке.

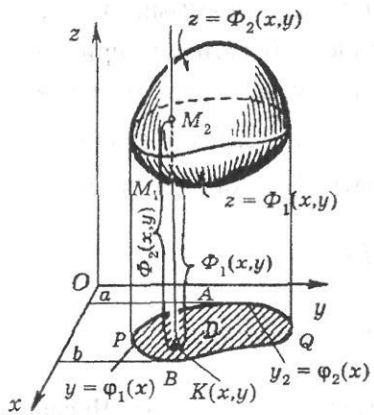

Рис. 8

Пусть M_1 – точка входа указанной прямой, M_2 – точка выхода этой прямой из области V (см. рис. 8). Их аппликаты равны $\Phi_1(x, y)$ и $\Phi_2(x, y)$. Все точки этой прямой имеют одну и ту же абсциссу и одну и ту же ординату, совпадающие с абсциссой и ординатой точки K. Все точки отрезка M_1M_2, лежащего в области V, имеют одни и те же абсциссу x и ординату y, а аппликата z изменяется от значения $\Phi_1(x, y)$ до значения $\Phi_2(x, y)$. Следовательно, на этом отрезке функция $f(x, y, z)$ зависит только от z, т. е. является функцией одной переменной z. От этой функции с аргументом z возьмём интеграл по z в указанных пределах: $\int_{\Phi_1(x,y)}^{\Phi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz$. Ясно, что интеграл, который мы вычислили для точки $K(x, y)$ области D, будет зависеть от координат точки K. Эта функция определена во всех точках области D, поэтому от неё можно взять двойной интеграл по области D, т. е. вычислить

$$\iint\limits_D d\sigma \left\{ \int\limits_{\Phi_1(x,y)}^{\Phi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right\}.$$

Можно показать, что полученное здесь число будет равно тройному интегралу по области V от функции $f(x,y,z)$, т. е.

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iint\limits_D \left\{ \int\limits_{\Phi_1(x,y)}^{\Phi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right\} d\sigma, \qquad (17)$$

$$dV = dxdydz,\ d\sigma = dxdy.$$

Пусть теперь область D расположена между прямыми $x=a$, $x=b$, которые имеют общие точки с границей области D, причём части APB и AQB границы области D заданы уравнениями $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, $a \le x \le b$. Тогда двойной интеграл правой части формулы (17) можно выразить через двукратный, и тогда получим

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\Phi_1(x,y)}^{\Phi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \qquad (18)$$

11. Переход в тройном интеграле к цилиндрическим координатам

Пусть θ, ρ – полярные координаты точки K (рис. 8). Числа θ, ρ, z определяют положение точки M в пространстве. Эти числа – *цилиндрические координаты* точки M в пространстве.

Для перехода к цилиндрическим координатам достаточно в правой части формулы (17) в двойном интеграле перейти от декартовых к полярным координатам, взяв $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, $dxdy=\rho d\theta d\rho$. Тогда формула (17) примет вид

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D'} \rho d\theta d\rho \int\limits_{\Phi_1(\rho\cos\theta,\,\rho\sin\theta)}^{\Phi_2(\rho\cos\theta,\,\rho\sin\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\,dz.$$

II. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Криволинейные интегралы по координатам и их вычисление

Пусть на плоскости Oxy задана кривая AB (см. рис. 1), на которой заданы функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$. Считаем их непрерывными функциями точки $M(x,y)$ кривой AB: $P(x,y)=P(M)$, $Q(x,y)=Q(M)$, т. е. для любой фиксированной точки M_* кривой AB имеют место равенства $\lim\limits_{M\to M_*} P(M)=P(M_*)$, $\lim\limits_{M\to M_*} Q(M)=Q(M_*)$.

На кривой AB положительным будем считать направление движения от точки A к точке B. Кривую AB разобьём на n частей точками $M_1, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_{n-1}$ (A обозначим M_0, а B – M_n). Считаем, что индексы точек деления возрастают при движении от точки A к B. Координаты точек обозначим $M_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$, $M_i(x_i, y_i)$, а разность координат $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$. Здесь Δx_i и Δy_i – проекции направленной дуги $M_{i-1}M_i$ (и вектора $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$) на оси Ox и Oy соответственно.

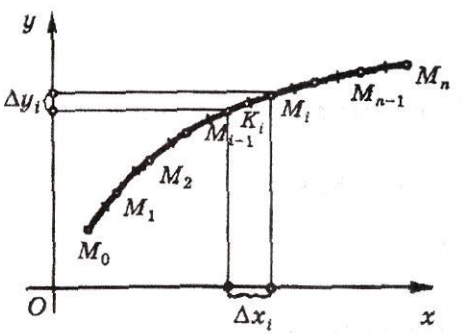

Рис. 1

Пусть $K_i(\xi_i, \eta_i)$ – произвольная точка дуги $M_{i-1}M_i$. Вычислим в ней значение функции $P(K_i)=P(\xi_i,\eta_i)$ и умножим это значение на Δx_i. Вычислим аналогичные произведения для всех дуг кривой и найдем их сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$.

Пусть $\Delta\rho_i$ – длина дуги $M_{i-1}M_i$ кривой AB, $\max\Delta\rho_i$ – наибольшая из всех длин $\Delta\rho_i$, $i=1,2,\dots,n$. Число делений n устремим к бесконечности так, чтобы $\max\Delta\rho_i \to 0$, т. е. чтобы все дуги $M_{i-1}M_i$ стягивались в точки. При

этом для всех i имеем $\Delta x_i \to 0$, $\Delta y_i \to 0$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta\rho_i \to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i$ и он не зависит ни от способа разбиения кривой, ни от выбора точек $K_i(\xi_i, \eta_i)$, то этот предел называется *криволинейным интегралом* по координате x от функции $P(x, y)$ и обозначается $\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx$. Итак,

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta\rho_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i. \qquad (1)$$

Точно так же вводится криволинейный интеграл по координате y:

$$\int_{AB} Q(x, y)\,dy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta\rho_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i. \qquad (2)$$

Сумма двух интегралов по координатам x, y называется составным криволинейным интегралом по координатам x, y и обозначается $\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$, т. е.

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_{AB} P(x, y)\,dx + \int_{AB} Q(x, y)\,dy.$$

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta, \qquad (3)$$

где $t = \alpha$ отвечает точке A, а $t = \beta$ отвечает точке B, то

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \qquad (4)$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ P\left[x(t), y(t)\right] x'(t) + Q\left[x(t), y(t)\right] y'(t) \right\} dt.$$

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dx = -\int_{BA} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

2. Применение криволинейных интегралов к вычислению работы

Пусть на плоскости Oxy задана кривая AB, и в материальной точке $M(x, y)$ этой кривой приложена сила $\vec{F}$ с проекциями на оси координат F_x, F_y. Будем считать, что эта сила, следовательно, и ее проекции, являются переменными и зависят от x, y – координат точки M. Работу $\widetilde{A}$, которую совершает переменная сила $\vec{F}$, когда точка M ее приложения перемещается от начала A до конца B кривой AB, можно найти через криволинейные интегралы:

$$\widetilde{A} = \int_{AB} F_x(x, y)\,dx + \int_{AB} F_y(x, y)\,dy.$$

3. Формула Грина

Теорема Грина. *Пусть D – конечная область, ограниченная замкнутой линией l и расположенная в плоскости Oxy. Пусть функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$, их частные производные $\partial P(x, y)/\partial y$ и $\partial Q(x, y)/\partial x$ заданы и непрерывны всюду в области D и на кривой l. Тогда справедлива следующая формула (называемая* ***формулой Грина****):*

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = \int_l P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \qquad (5)$$

Здесь в правой части криволинейный интеграл по координатам берётся по кривой l, на которой за положительное принято направление обхода против часовой стрелки.

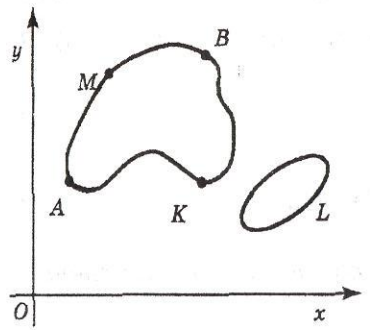

Рис. 2

4. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ заданы всюду на плоскости Oxy и непрерывны в любой конечной части этой плоскости; A, B – произ-

вольные точки, соединенные произвольной дугой (рис. 2). Рассмотрим криволинейный интеграл

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \qquad (6)$$

Если точки A, B соединить кривой AMB, а затем кривой AKB, то интегралы вида (6), взятые по этим кривым, вообще говоря, не будут равны друг другу. Возникает вопрос: когда криволинейный интеграл (6) не будет зависеть от формы кривой, соединяющей любые точки A и B, т. е. когда для всех кривых, соединяющих эти точки, интеграл (6) будет иметь одно и то же значение и, следовательно, будет зависеть только от положения начала A и конца B кривой AB.

Чтобы ответить на этот вопрос, возьмем на плоскости Oxy произвольный замкнутый контур L с направлением обхода против часовой стрелки и криволинейный интеграл по этой кривой

$$\int_{L} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \qquad (7)$$

Теорема 1. *Если криволинейный интеграл (6) для любых точек A, B не зависит от линии интегрирования, то криволинейный интеграл (7) по любой замкнутой кривой L равен нулю и, наоборот, если криволинейный интеграл (7) по любой замкнутой кривой L равен нулю, то криволинейный интеграл (6) для любых точек A, B не зависит от линии интегрирования.*

Теорема 2. *Пусть функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и их частные производные $\partial P(x, y)/\partial y$, $\partial Q(x, y)/\partial x$ непрерывны в любой конечной части плоскости Oxy. Тогда, если во всех точках плоскости Oxy выполняется соотношение*

$$\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x, \qquad (8)$$

то криволинейный интеграл

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \qquad (9)$$

для любых двух точек A, B плоскости Oxy не зависит от линии интегрирования.

Доказательство. Возьмём на плоскости Oxy произвольный замкнутый контур L, область внутри L обозначим через D и для нее запишем формулу Грина

$$\iint_{D} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dxdy = \int_{L} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \qquad (10)$$

В силу равенства (8) подинтегральное выражение в левой части формулы (10) равно нулю, следовательно, и вся левая часть равна нулю, поэтому равен нулю и криволинейный интеграл в правой части формулы (10). Итак, $\int_{L} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0.$

Таким образом, последний криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру L равен нулю. Тогда, согласно теореме 1, интеграл (9) от линии интегрирования не зависит.

Справедлива и обратная

Теорема 3. *Если функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и их частные производные $\partial P(x, y)/\partial y$, $\partial Q(x, y)/\partial x$ непрерывны в любой конечной части плоскости Oxy и для любых двух точек A и B криволинейный интеграл (9) не зависит от линии интегрирования, то соотношение (8) имеет место во всех точках плоскости Oxy.*

5. Криволинейный интеграл по длине

Пусть на плоскости Oxy задана кривая AB (рис. 3). На ней, в отличие от случая криволинейных интегралов по координатам, направление устанавливать не будем. Пусть на этой кривой задана функция $f(x, y)$, которую считаем непрерывной функцией точки $M(x, y)$ кривой AB: $f(x, y) = f(M)$.

Разобьем кривую AB на n частей точками $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$. Обозначим точки A, B соответственно через M_0 и M_n, а длину дуги $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ кривой AB – через ΔS_i ($\Delta S_i > 0$). На этой дуге возьмём произвольную точку $K_i(\xi_i, \eta_i)$, вычислим в ней значение заданной функ-

ции $f(x,y)$, т. е. вычислим $f(\xi_i,\eta_i)$. Найдем произведение $f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$. Подобную операцию проделаем со всеми частями кривой AB.

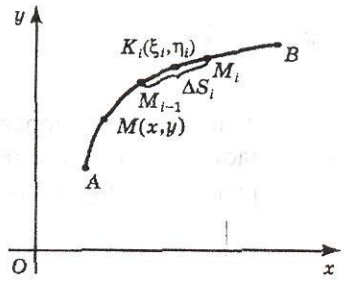

Рис. 3

Пусть $\max \Delta S_i$ – наибольшая из всех длин $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$. Пусть число делений $n \to \infty$ так, что $\max \Delta S_i \to 0$, т. е. все части кривой AB стягиваются в точки. Если при этом независимо от способа разбиения кривой и от выбора точек K_i сумма $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$ имеет конечный предел, то он называется *криволинейным интегралом по длине кривой* AB и обозначается $\int_{AB} f(x,y)dS$. Итак,

$$\int_{AB} f(x,y)dS = \lim_{\substack{\max \Delta S_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i.$$

По аналогии с криволинейным интегралом по координатам можно получить формулу для вычисления криволинейного интеграла по длине, когда кривая AB задана параметрическими уравнениями:

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ \alpha \le t \le \beta,$$

$$\int_{AB} f(x,y)dS = \int_{\alpha}^{\beta} f\left[x(t),y(t)\right]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt,$$

где $\alpha < \beta$. Если $\alpha > \beta$, то перед интегралом в правой части нужно взять знак «-».

6. Криволинейные интегралы по пространственным кривым

Поступая, как в случае плоской кривой, введём понятие криволинейного интеграла по координате x от функции $P(x,y,z)$ по кривой AB. Затем – понятие криволинейного интеграла по координате y от

функции $Q(x,y,z)$ по кривой AB и, наконец, понятие криволинейного интеграла по координате z от функции $R(x,y,z)$ по кривой AB. Обозначения этих интегралов аналогичны обозначениям предыдущих:

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx;\ \ \int_{AB} Q(x,y,z)dy;\ \ \int_{AB} R(x,y,z)dz.$$

Сумма этих интегралов называется *составным интегралом* по координатам, по кривой AB и обозначается

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

7. Применение кратных и криволинейных интегралов к вычислению координат центра тяжести тел

Пусть в пространстве $Oxyz$ задано тело, занимающее область V, и $\gamma(x,y,z)$ есть плотность тела в точке $M(x,y,z)$, причём вещество в области V распределено неравномерно. Будем считать, что всюду в области V задана непрерывная функция $\gamma(x,y,z)$, характеризующая распределение плотности вещества по всему телу. Координаты центра тяжести C рассматриваемого тела – x_c, y_c, z_c можно найти по формулам:

$$x_c = \iiint_V x_i\gamma(x,y,z)dV \Big/ \iiint_V \gamma(x,y,z)dV,\ \ dV = dxdydz,$$

y_c, z_c определяются аналогичными выражениями.

Если в пространстве $Oxyz$ задана кривая AB, $M(x,y,z)$ – произвольная ее точка, и $\gamma(x,y,z)$ – плотность вещества в точке $M(x,y,z)$, то координаты центра тяжести кривой AB – $C(x_c,y_c,z_c)$ определяются по формулам:

$$x_c = \frac{\int_{AB} x\gamma(x,y,z)dS}{\int_{AB} \gamma(x,y,z)dS},\ \ y_c = \frac{\int_{AB} y\gamma(x,y,z)dS}{\int_{AB} \gamma(x,y,z)dS},\ \ z_c = \frac{\int_{AB} z\gamma(x,y,z)dS}{\int_{AB} \gamma(x,y,z)dS}.$$

III. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Общие понятия

Определение. *Дифференциальным уравнением* называется соотношение, которое связывает независимую переменную x, искомую функцию $y=\varphi(x)$ и её производные $y', y'', \ldots$.

Символически дифференциальное уравнение записывается так:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right)=0, \qquad (1)$$

где левая часть есть известное выражение, содержащее x, y, y', y'', $\ldots$, $y^{(n)}$.

Если в дифференциальном уравнении искомая функция зависит от одного аргумента, то оно называется *обыкновенным уравнением*.

Порядком дифференциального уравнения называется *порядок наивысшей производной искомой функции*, входящей в это уравнение.

Решением дифференциального уравнения называется всякая функция $y=\varphi(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение, превращает его в тождество.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Как видно из формулы (1), обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка символически записываются так:

$$F\left(x, y, y'\right)=0, \qquad (2)$$

Если уравнение (2) удаётся разрешить относительно производной y', запишем его в виде $y'=f(x, y)$, где правая часть $f(x, y)$ – известное выражение, содержащее x, y, т. е. функция с аргументами x, y. Пусть $y=\varphi(x)$ – решение уравнения (2). Этой функции на плоскости Oxy отвечает кривая – график этой функции.

Иногда ищут такое решение $y=\varphi(x)$ уравнения (2), график которого проходит через заданную точку (x_0, y_0), т. е. выполняется равенство $y_0=\varphi(x_0)$. Это условие называют *начальным условием*, кото-

рому удовлетворяет решение $y=\varphi(x)$ уравнения (2). Обычно начальное условие записывают в виде

$$y\big|_{x=x_0}=y_0. \qquad (3)$$

Теорема (существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка). *Если в дифференциальном уравнении $y'=f(x, y)$ правая часть $f(x, y)$ и её производная $\partial f(x, y)/\partial y$ непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy, причём эта область содержит внутри себя точку (x_0, y_0), то существует единственное решение $y=\varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{x=x_0}=y_0$ (график которого проходит через точку (x_0, y_0)).*

Из этой теоремы вытекает, что дифференциальное уравнение первого порядка имеет бесконечное число решений, т.к. при различных y_0 получаем различные решения.

Определение. *Общим решением дифференциального уравнения (2) называется функция $y=\varphi(x, c)$, содержащая произвольную постоянную c, если:*

- *эта функция при любых значениях постоянной c удовлетворяет уравнению (2);*
- *для любого начального условия $y\big|_{x=x_0}=y_0$ можно найти такое значение постоянной $c=c_0$, при котором $y=\varphi(x, c_0)$ будет удовлетворять этому начальному условию (здесь мы предполагаем, что точка (x_0, y_0) лежит в области D, указанной в условии теоремы).*

Иногда общее решение уравнения (2) получается в форме, не разрешённой относительно y, т. е. в виде $\Phi(x, y, c)=0$. Это соотношение называют *общим интегралом* уравнения (2).

Частным решением уравнения (2) называется решение $y=\varphi(x, c_0)$, получаемое из общего решения $y=\varphi(x, c)$ при кон-

кретном значении $c = c_0$. Соотношение $\Phi(x, y, c_0) = 0$ называется *частным интегралом* уравнения (2).

График частного решения на плоскости Oxy называется *интегральной кривой* для дифференциального уравнения (2). Общему решению $y = \varphi(x, c)$ этого уравнения на плоскости Oxy отвечает семейство интегральных кривых, так как при разных значениях постоянной c получаем разные кривые на плоскости Oxy.

3. Геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка

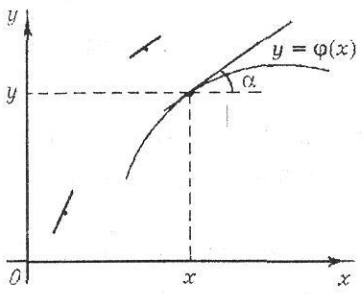

Рис 1

Дано уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y), \qquad (4)$$

где $f(x, y)$ – заданная функция от аргументов x, y. Для простоты будем считать, что эта функция определена на всей плоскости Oxy.

Возьмем на плоскости произвольную точку (x, y) с известными координатами x, y и вычислим в ней значение заданной функции $f(x, y)$. По этому числу найдем угол α, для которого $\operatorname{tg}\alpha = f(x, y) = y'$. Иначе говоря, зная $\operatorname{tg}\alpha$, вычислим угол α в точке (x, y) и в этой точке проведём направление, образующее с осью Ox угол α (рис. 1). Это построение можем выполнить с помощью уравнения (4) в любой точке (x, y) плоскости Oxy. Таким образом, по дифференциальному уравнению (4) на плоскости Oxy для каждой её точки определим некоторое направление. В таком случае говорят, что дифференциальному уравнению на плоскости Oxy *отвечает поле направлений.*

Пусть $y = \varphi(x)$ есть решение уравнения (4), график которого (интегральная кривая уравнения) проходит через точку (x, y). Мы знаем, что значение производной $y' = \varphi'(x)$, вычисленное для значения x (абсциссы точки (x, y)), равно $\operatorname{tg}\widetilde{\alpha}$ – тангенсу угла $\widetilde{\alpha}$, образованного с осью Ox касательной к кривой $y = \varphi(x)$ в её точке (x, y) с абсциссой x. Но функция $y = \varphi(x)$ есть решение уравнения (4), т. е. она вместе со своей производной удовлетворяет уравнению (4). Таким образом, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\widetilde{\alpha}$ и $\alpha = \widetilde{\alpha}$, поэтому направление касательной к кривой $y = \varphi(x)$ в её точке (x, y) совпадает с направлением поля в этой точке, определенным по дифференциальному уравнению (4).

4. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

Возьмём соотношение

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \qquad (5)$$

где $y = \varphi(x)$ – искомая функция от x, $M(x)$, $N(y)$ – заданные функции аргументов соответственно x, y. Кроме того, dx – дифференциал аргумента x, dy – дифференциал искомой функции. По определению дифференциал искомой функции

$$dy = y'_x dx. \qquad (6)$$

Выражение для дифференциала dy подставим в (5) и полученное соотношение поделим на dx. Будем иметь

$$M(x) + N(y)y'_x = 0. \qquad (7)$$

Но соотношение (7) есть дифференциальное уравнение первого порядка, поэтому равносильное ему соотношение (5) также является дифференциальным уравнением первого порядка. Его называют *уравнением с разделёнными переменными.* Чтобы его решить, перейдем с помощью формулы (6) к соотношению (7), в котором левая часть есть функция от x, так как y есть искомая функция от x. Учитывая это, от обеих частей соотношения (7) возьмём неопределённый интеграл по x, прини-

мая во внимание, что интеграл от левой части будет равен сумме интегралов слагаемых, поэтому

$$\int M(x)dx + \int N(y)\,y'_x dx = \int 0dx. \qquad (8)$$

Во втором интеграле левой части учтём соотношение (6), интеграл справа равен произвольной постоянной, следовательно,

$$\int M(x)dx + \int N(y)\,dy = c.$$

Взяв первый интеграл по x, получим некоторую функцию $F_1(x)$, взяв второй интеграл по y, получим функцию $F_2(y)$. Теперь исходное соотношение примет вид $F_1(x)+F_2(y)=c$. Это и есть общий интеграл уравнения (5).

Дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными называются уравнения вида

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \qquad (9)$$

где $M_1(x), M_2(x)$ – заданные функции от x, $N_1(y)$, $N_2(y)$ – заданные функции от y и $y=\varphi(x)$ – искомая функция.

Соотношение (9) почленно умножим на $[N_1(y)M_2(x)]^{-1}$, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_1(y)}{N_2(y)}dy = 0.$$

Это уравнение решается, как указано выше.

5. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Однородными называются дифференциальные уравнения первого порядка $y'_x = f(x,y)$ с искомой функцией $y=\varphi(x)$, в которых правую часть $f(x,y)$ можно представить в виде функции одного аргумента, равного отношению y/x, т. е. в виде функции $F(y/x)$. Такое дифференциальное уравнение можно привести к виду

$$y'_x = F(y/x). \qquad (10)$$

Чтобы решить это уравнение, положим $U = y/x$, считая, что $U = U(x)$ – новая искомая функция от x. Имеем $y = x\cdot U$. Продифференцировав последнее соотношение по x, получим $y'_x = U + x\cdot U'_x$. Это выражение и U подставим в уравнение (10), поэтому $U'_x x + U = F(U)$. Получили дифференциальное уравнение первого порядка для функции $U(x)$. Запишем его иначе: $x\cdot\dfrac{dU}{dx} = F(U)-U$, или $x\cdot dU - (F(U)-U)dx = 0$. Но это есть дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными вида (9), поэтому $\dfrac{dU}{F(U)-U} - \dfrac{dx}{x} = 0$. Общий интеграл последнего уравнения имеет вид $\int\dfrac{dU}{F(U)-U} - \int\dfrac{dx}{x} = c$. Учитывая, что первый интеграл в левой части равен некоторой функции $\Phi(U)$, имеем $\Phi(U) - \ln x = c$. Заменив U на y/x, результате получим $\Phi(y/x) - \ln x = c$.

6. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейными дифференциальными уравнениями первого порядка называются уравнения вида

$$y'_x + p(x)y = q(x), \qquad (11)$$

где $y=\varphi(x)$ – искомая функция, а $p(x)$ и $q(x)$ – заданные функции от x, которые считаем непрерывными в рассматриваемом интервале изменения x.

Будем искать решение $y(x)$ этого уравнения в виде $y=UV$, т.е. произведения двух функций $U=U(x)$ и $V=V(x)$. Найдём производную $y'_x = U'_x V + UV'_x$. Подставим ее и выражение $y=UV$ в уравнение (11): $U'_x V + UV'_x + p(x)UV = q(x)$ или

$$U'_x V + U(V'_x + p(x)V) = q(x). \qquad (12)$$

Выберем функцию $V(x)$ так, чтобы $V'_x + p(x)V = 0$ или $dV/dx + p(x)V = 0$. Решив последнее уравнение, как уравнение с разделяющимися переменными, найдем $\int\frac{dV}{V} + \int p(x)dx = c_1$, где c_1 – произвольная постоянная. Воспользовавшись произволом в выборе функции $V(x)$, возьмём постоянную $c_1 = 0$ и получим $\int V^{-1}dV + \int p(x)dx = 0$. Окончательно имеем $\ln V + \int p(x)dx = 0$, или $\ln V = -\int p(x)dx$. Отсюда легко получить искомую функцию $V(x)$:

$$V(x) = \exp[-\int p(x)dx]. \qquad (13)$$

Вернёмся к соотношению (12). Подставим в него вместо V найдённую функцию $V(x)$ из формулы (13). Получаем соотношение $U'_x V(x) = q(x)$. Найдём из данного соотношения производную $U'_x = q(x)/V(x)$ и после интегрирования получим

$$U(x) = \int\frac{q(x)}{V(x)}dx + c.$$

Подставим эту функцию и функцию (13) в формулу $y = U(x)V(x)$:

$$y = \left[\int\frac{q(x)}{V(x)}dx + c\right]\cdot V(x).$$

7. Дифференциальные уравнения высших порядков

Дифференциальное уравнение высшего порядка имеет вид $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$. Если это уравнение удастся разрешить относительно производной $y^{(n)}$, то получим уравнение вида

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right). \qquad (14)$$

Здесь f – известное выражение, содержащее $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, а $y = \varphi(x)$ есть искомая функция. Для последнего уравнения без доказательства приведем теорему существования и единственности его решения.

Теорема. *Если в уравнении (14) функция* $f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ *и её частные производные по переменным* $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ *непрерывны в некоторой области* $(n+1)$*-мерного пространства, причём эта область содержит точку с координатами*

$$x = x_0,\ y = y_0,\ y' = y'_0,\ y'' = y''_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)},$$

то существует единственное решение $y = \varphi(x)$ *этого уравнения, удовлетворяющее условиям:*

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y'_0,\ y''\big|_{x=x_0} = y''_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}, \qquad (15)$$

где $x_0, y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ *суть заданные числа.*

Условия (15) называют *начальными условиями* для решения уравнения (14). Из теоремы вытекает, что дифференциальное уравнение (14) имеет бесчисленное множество решений, так как в начальных условиях (15) числа, стоящие в правой части, можно изменять и тем самым получать различные решения.

Общим решением уравнения (14) называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, содержащая n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, если:

- эта функция при любых значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ удовлетворяет уравнению (14);
- для любых начальных условий (15) можно подобрать такие значения постоянных $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, \ldots, C_n = C_n^0$, при которых указанная функция удовлетворяет этим начальным условиям.

Если общее решение уравнения (14) находится в неявном виде, т. е. в виде соотношения $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, то это соотношение называется *общим интегралом уравнения (14).*

Решение, получаемое из общего при конкретных значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, называется *частным решением уравнения (14).*

График частного решения уравнения (14) называется *интегральной кривой этого уравнения.*

8. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

1. Пусть уравнение имеет вид $y''_{xx} = f(x)$. Запишем уравнение в виде $(y'_x)'_x = f(x)$. Отсюда видно, что y'_x есть первообразная для $f(x)$, поэтому $y'_x = \int f(x)dx + c_1$, следовательно,

$$y = \int\left[\int f(x)dx + c_1\right]dx + c_2,$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

2. Пусть дифференциальное уравнение имеет вид $y''_{xx} = f(x, y'_x)$. Положим $y'_x = z$, считая z функцией от x. Поскольку $y''_{xx} = z'_x(x)$, то исходное уравнение примет вид $z'_x = f(x, z)$, представляющий собой дифференциальное уравнение первого порядка для искомой функции $z = z(x)$. Решив последнее уравнение, найдём $z = \psi(x, c_1)$, и, следовательно, $y'_x = \psi(x, c_1)$. Отсюда найдем общее решение исходного уравнения $y = \int\psi(x, c_1)dx + c_2$.

3. Пусть дифференциальное уравнение имеет вид $y''_{xx} = f(y, y'_x)$. Здесь положим $y'_x = p$, считая p функцией от y. Так как аргумент у последней функции есть искомая функция от x: $y = \varphi(x)$, то из соотношения $y'_x = p$ получаем $y''_{xx} = p'_y y'_x$, поэтому $y''_{xx} = p'_y p$. Теперь исходное уравнение запишется так: $p'_y p = f(y, p)$. Мы пришли к дифференциальному уравнению первого порядка с искомой функцией $p = p(y)$. Решив его, найдём $p = \psi(y, c_1)$ и получим соотношение $y'_x = \psi(y, c_1)$ или $dy = \psi(y, c_1)dx$, представляющее собой дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Его общий интеграл имеет вид $\int\frac{dy}{\psi(y, c_1)} = x + c_2$ и является общим интегралом исходного уравнения.

9. Линейные однородные уравнения второго порядка

Линейные однородные уравнения второго порядка имеют вид

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \qquad (16)$$

Здесь a_1, a_2 – заданные непрерывные функции от x и $y = \varphi(x)$ – искомая функция.

Говорят, что частные решения $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ уравнения (16) образуют *фундаментальную систему* в некотором интервале, если всюду в этом интервале отличен от нуля определитель Вронского (вронскиан), обозначаемый $W(y_1, y_2)$ и равный

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Теорема. *Если $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ суть частные решения уравнения (16), образующие фундаментальную систему в некотором интервале изменения x, то в этом интервале общее решение уравнения (16) определяется формулой*

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (17)$$

в котором p, q – действительные числа. Общее решение уравнения (17) определяется формулой $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, где c_1, c_2 – произвольные постоянные; $y_1(x), y_2(x)$ – частные решения уравнения (17), которые будем искать в виде

$$y = e^{kx}, \qquad (18)$$

где k – постоянная величина. Возьмём производные от функции (18): $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Подставим функцию (18) в (17) и потребуем, чтобы оно выполнилось, т. е.

$$e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0. \tag{19}$$

Но $e^{kx} \neq 0$ всюду на действительной оси, поэтому на эту величину уравнение (19) можно сократить, и мы получим

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{20}$$

Уравнение (20) называется *характеристическим* уравнением по отношению к дифференциальному уравнению (17).

Найдём корни характеристического уравнения (20):

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \tag{21}$$

Далее будем различать три случая.

Случай 1. Корни (21) характеристического уравнения (20) действительные и различные, т. е. $k_1 \neq k_2$. Общее решение уравнения (17) имеет вид

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}. \tag{22}$$

Случай 2. Корни характеристического уравнения (20) действительны и равны $(k_1 = k_2)$. Общее решение уравнения (17) будет иметь вид

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x}.$$

Случай 3. Корни характеристического уравнения (20) – комплексные числа $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$. Общее решение уравнения (17) имеет вид

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

10. Линейные неоднородные уравнения второго порядка

Линейное неоднородное уравнение второго порядка имеет вид

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \tag{23}$$

Здесь a_1, a_2, $f(x)$ - заданные непрерывные функции, а $y = \varphi(x)$ – искомая функция. Запишем соответствующее однородное уравнение

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \tag{24}$$

Известно, что общее решение $\tilde{y}$ этого уравнения определяется формулой

$$\tilde{y} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \tag{25}$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные, а $y_1(x), y_2(x)$ – частные решения однородного уравнения, образующие фундаментальную систему в рассматриваемом интервале изменения x, в котором ищется решение. Это означает, что в указанном интервале для этих частных решений всюду отличен от нуля определитель Вронского $W(y_1, y_2) \neq 0$.

Теорема. *Общее решение y неоднородного уравнения (23) представляется в виде суммы какого-либо частного решения $y^* = y^*(x)$ этого уравнения и общего решения $\tilde{y}$ соответствующего однородного уравнения (24), т. е.*

$$y = y^* + \tilde{y}, \tag{26}$$

или, согласно (25),

$$y = y^*(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x). \tag{27}$$

11. Метод вариации произвольных постоянных для нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения второго порядка

Согласно предыдущей теореме для нахождения общего решения уравнения (23) достаточно знать какое-либо частное решение этого уравнения, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения (24). Рассмотрим один из методов построения этого частного решения.

Будем считать, что общее решение соответствующего однородного уравнения найдено и определяется формулой (25), т. е. нам известны частные решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ однородного уравнения (24), образующие фундаментальную систему в некотором интервале. Частное решение y^* неоднородного уравнения (23) также будем искать в виде суммы (25), только теперь, в отличие от предыдущего, будем считать, что c_1, c_2 являются не постоянными, а искомыми функциями от x. Таким образом, y^* будем искать в виде

$$y^* = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x), \tag{28}$$

где $c_1(x), c_2(x)$ - новые искомые функции. Одну из них можно выбрать произвольно или наложить на нее дополнительное требование по нашему усмотрению. Вторую функцию нужно выбрать так, чтобы функция (28) была решением неоднородного уравнения (23).

Возьмём производную от функции (28) и учтём, что в правой части стоят произведения: $y^{*\prime} = c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_1y_1' + c_2y_2'$. Потребуем, чтобы c_1', c_2' удовлетворяли соотношению

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0. \qquad (29)$$

Тогда предыдущее выражение примет вид

$$y^{*\prime} = c_1y_1' + c_2y_2'. \qquad (30)$$

Возьмём ещё раз производную по x:

$$y^{*\prime\prime} = c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_1y_1'' + c_2y_2''. \qquad (31)$$

Теперь потребуем, чтобы функция y^*, определяемая формулой (28), была решением неоднородного уравнения (23). Подставим в (23) вместо y, y', y'' выражения (28), (30), (31) соответственно:

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_1\left(y'' + a_1y_1' + a_2y_1\right) + c_2\left(y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2\right) = f(x).$$

Поскольку в левой части суммы в скобках обращаются в нуль, так как y_1 и y_2 – решения однородного уравнения (24), то $c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x)$. Запишем это соотношение вместе с условием (30) и получим

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0, \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x). \end{cases} \qquad (32)$$

Здесь, как уже отмечалось, y_1, y_2 – известные функции. Соотношение (32) представляет собой систему двух линейных алгебраических уравнений для нахождения двух неизвестных c_1', c_2'. Определитель этой системы есть определитель Вронского, и он отличен от нуля. Значит, система (32) имеет единственное решение. Решив её, найдём $c_1' = \varphi_1(x)$, $c_2' = \varphi_2(x)$. С помощью интегрирования получим:

$$c_1(x) = \int \varphi_1(x)\,dx + \tilde{c}_1, \qquad c_2(x) = \int \varphi_2(x)\,dx + \tilde{c}_2,$$

где $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ - произвольные постоянные. Так как ищем частное решение y^*, то постоянные можно выбрать произвольно. Впредь всегда будем считать их равными нулю. Подставив найденные выражения $c_1(x)$ и $c_2(x)$ в формулу (28), найдём искомое частное решение y^* неоднородного уравнения (23).

IV. ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ

1. Определение и свойства интеграла по поверхности

В пространстве $Oxyz$ задана поверхность, на ней задана функция $f(x,y,z)$. Это означает, что в каждой точке $M(x,y,z)$ поверхности известно значение этой функции $f(x,y,z) = f(M)$. Будем считать, что эта функция непрерывна, т. е. для любой фиксированной точки M_0 поверхности S $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$. По-

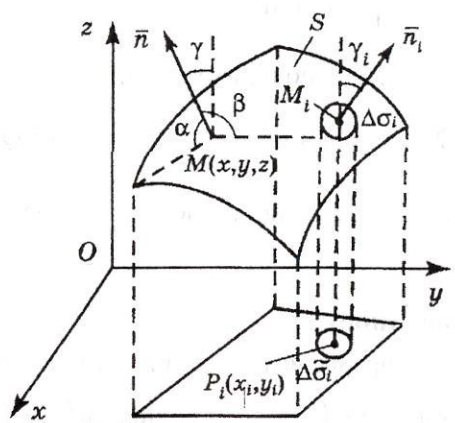

Рис. 1

верхность S разобьём на n частей с площадями $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, ..., $\Delta\sigma_n$ (см. рис. 1). Внутри i-й части с площадью $\Delta\sigma_i$ возьмём произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ поверхности S, вычислим значение $f(M_i)$, т. е. найдём $f(x_i, y_i, z_i)$, затем умножим его на площадь $\Delta\sigma_i$. Проделаем аналогичные действия со всеми частями, на которые разбили S, и, сложив, получим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i. \qquad (1)$$

Назовём ее *интегральной суммой для функции* $f(x,y,z)$ *и поверхности* S, на которой функция задана. Пусть $\max d_i$ – наибольший из всех диаметров частей, на которые мы разбили S. Число делений n устремим к бесконечности так, чтобы $\max d_i$ стремился к нулю и все $\Delta\sigma_i$ стягивались в точку. Если при этом предел суммы (1) не зависит ни от способа разбиения S, ни от выбора точек M_i, то этот предел называется *интегралом по поверхности* S *от функции* $f(x,y,z)=f(M)$ и обозначается

$$\iint\limits_S f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_S f(M)d\sigma.$$

Таким образом, по определению интеграл по поверхности

$$\iint\limits_S f(M)d\sigma = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max d_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta\sigma_i. \qquad (2)$$

Свойства интеграла по поверхности аналогичны свойствам кратных интегралов.

2. Вычисление интеграла по поверхности

Пусть на поверхности S задана непрерывная функция $f(x,y,z)$ и поверхность S задана уравнением $z=\varphi(x,y)$, функция $\varphi(x,y)$ определена и однозначна в области D_{xy} – проекции поверхности S на плоскость Oxy при проектировании параллельно оси Oz. Поверхность S разобьем на n частей с площадями $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, ..., $\Delta\sigma_n$. Внутри части $\Delta\sigma_i$ возьмём произвольную точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$. В ней вычислим значения заданной функции, т. е. найдём $f(x_i,y_i,z_i)$. Это значение умножим на $\Delta\sigma_i$. Проделаем аналогичную операцию со всеми частями, на которые разбили поверхность S, и, сложив, образуем интегральную сумму (1). Тогда интеграл по поверхности S от функции $f(x,y,z)$ определяется формулой (2).

Можно показать, что

$$\iint\limits_S f(x,y,z)d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} f\left(x,y,\varphi(x,y)\right)\sqrt{\left[\varphi_x'(x,y)\right]^2+\left[\varphi_y'(x,y)\right]^2+1}\,dxdy.$$

Эта формула позволяет выразить интеграл по поверхности S через двойной интеграл.

3. Применение интеграла по поверхности к решению физических задач

К понятию интеграла по поверхности приводит большое число задач физики и механики. Рассмотрим задачу о нахождении объёма (количества) жидкости, проходящего через данную поверхность за единицу времени.

Пусть в пространстве задана поверхность S, через которую протекает жидкость (рис. 2). Пусть скорость частицы в произвольной точке $M(x,y,z)$ поверхности S равна $\bar{V}$. Проекции на оси координат этой скорости $\bar{V}=(P,Q,R)$. Так как в каждой точке $M(x,y,z)$ поверхности S скорость своя, то ясно, что проекции P, Q, R являются функциями координат x,y,z точки M поверхности S. Обозначим эти функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ и будем считать, что они заданы на всей поверхности S. Это означает, что в каждой точке поверхности S известна скорость $\bar{V}$ частицы жидкости. Количество жидкости K (объём жидкости), проходящей через S за единицу времени, можно найти через поверхностный интеграл

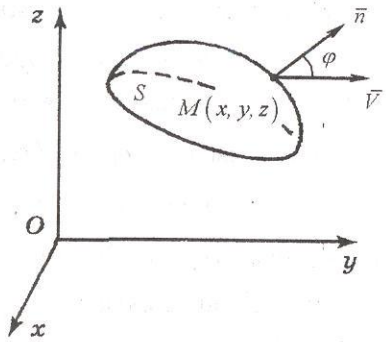

Рис. 2

$$K = \iint\limits_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)d\sigma = \iint\limits_S \left(\overline{V},\overline{n}\right)d\sigma, \qquad (3)$$

где $\overline{n} = \left(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\right)$ – единичный вектор, направленный по нормали к поверхности S в её произвольной точке $M\left(x, y, z\right)$; α, β, γ – углы, образованные этим вектором с осями Ox, Oy, Oz. Угол между этим вектором и скоростью $\overline{V}$ обозначим через φ. Формула (3) дана для случая, когда $\cos\varphi > 0$ всюду на S. Если вектор $\overline{n}$ имеет направление, обратное указанному на рис. 2, т. е. всюду на поверхности $\cos\varphi < 0$, то, в правой части (3) появляется знак минус.

4. Формула Остроградского

Теорема 1. *Пусть V – конечная область в пространстве $Oxyz$, ограниченная замкнутой поверхностью S, и $\overline{n}$ есть единичный вектор нормали к S в её произвольной точке $\left(x, y, z\right)$, причём вектор направлен во внешнюю сторону по отношению к области V и $\overline{n} = \left(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\right)$, где α, β, γ – углы, образованные вектором $\overline{n}$ соответственно с осями Ox, Oy, Oz.*

Если функции $P\left(x, y, z\right)$, $Q\left(x, y, z\right)$, $R\left(x, y, z\right)$ и их частные производные $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$, $\partial R/\partial z$ непрерывны в области V и на её границе S, то справедлива формула, называемая формулой Остроградского:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz =$$

$$= \iint\limits_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)d\sigma.$$

5. Формула Стокса. Условия независимости криволинейного интеграла по пространственной кривой от линии интегрирования

Пусть в пространстве $Oxyz$ задана поверхность S, ограниченная

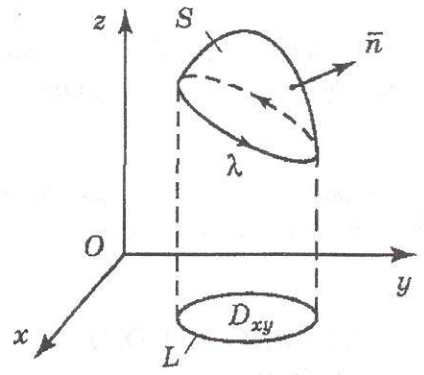

Рис. 3

кривой λ (рис. 3). Пусть $\overline{n} = \left(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\right)$ – единичный вектор, направленный по нормали к поверхности S в её произвольной точке $\left(x, y, z\right)$; α, β, γ – углы, образованные этим вектором с осями Ox, Oy, Oz. Пусть на поверхности S заданы функции $P\left(x, y, z\right)$, $Q\left(x, y, z\right)$, $R\left(x, y, z\right)$, непрерывные вместе со всеми своими частными производными. На кривой λ за положительные возьмем направление обхода против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\overline{n}$. Тогда справедлива *формула Стокса:*

$$\int\limits_\lambda P dx + Q dy + R dz =$$

$$= \iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]d\sigma.$$

Она связывает интеграл по поверхности S с криволинейным интегралом по кривой λ – границе поверхности S.

Использовав формулу Стокса, можно получить условия **независимости криволинейного интеграла по координатам по пространственной кривой от формы линии интегрирования.**

Теорема 2. *Если всюду в пространстве $Oxyz$ заданы функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, непрерывные вместе со своими частными производными, и выполняются соотношения*

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \qquad (3)$$

то криволинейный интеграл

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz, \qquad (4)$$

где A, B – произвольные точки пространства, не зависит от линии интегрирования. Иначе говоря, этот интеграл зависит только от положения A и B – начала и конца кривой.

Справедлива и обратная

Теорема 3. *Если криволинейный интеграл (4) для любых точек A, B не зависит от линии интегрирования, то всюду в пространстве выполняются соотношения (3).*

V. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

1. Понятия векторного поля и векторной линии

Векторное поле – пространство, в каждой точке которого задана некоторая векторная величина. Пример векторного поля – гравитационное поле Земли. В каждой точке вблизи Земли на материальную частицу действует определённая сила, направленная к центру Земли, а величина её зависит от расстояния частицы до центра Земли. Другой пример – поле скоростей частиц потока жидкости. Здесь каждая частица потока имеет скорость со своими величиной и направлением.

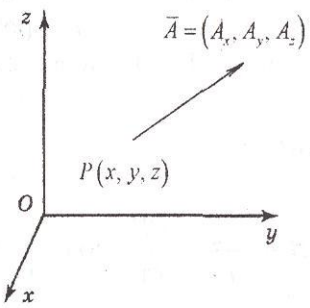

Рис. 1

Рассмотрим векторное поле, в котором введена декартова система координат $Oxyz$ (рис. 1).

Пусть в каждой точке $P(x,y,z)$ задан вектор $\bar{A}=(A_x, A_y, A_z)$. Его проекции A_x, A_y, A_z на оси координат являются функциями координат (x,y,z) точки P. Таким образом,

$$\bar{A} = A_x(x,y,z)\bar{i} + A_y(x,y,z)\bar{j} + A_z(x,y,z)\bar{k}. \qquad (1)$$

Задание векторного поля в пространстве $Oxyz$ равносильно заданию $\bar{A}$, т. е. заданию трёх функций $A_x(x,y,z)$, $A_y(x,y,z)$, $A_z(x,y,z)$. В

дальнейшем будем считать, что эти функции непрерывны вместе с частными производными по их аргументам.

Пусть векторное поле таково, что всюду $A_z = 0$, т. е. всюду вектор $\bar{A}$ ортогонален оси Oz, кроме того, проекции A_x, A_y рассматриваемого вектора не зависят от z. При этом (1) примет вид $\bar{A} = A_x(x,y)\bar{i} + A_y(x,y)\bar{j}$. Во всех плоскостях, перпендикулярных к оси Oz, картина векторного поля будет одинакова. Такое поле называют *плоским векторным полем*.

Векторной называется линия в векторном поле, в каждой точке которой вектор поля направлен по касательной к этой линии. Примером векторной линии служит линия тока в поле скоростей, т. е. линия, по которой двигаются частицы жидкости. Так как эта линия является траекторией движения частиц, то скорость частицы направлена по касательной к траектории.

2. Поток вектора через поверхность

Пусть в пространстве $Oxyz$ задано векторное поле

$$\bar{A} = A_x(x,y,z)\bar{i} + A_y(x,y,z)\bar{j} + A_z(x,y,z)\bar{k}. \qquad (2)$$

В этом поле возьмём поверхность S. Пусть $P(x,y,z)$ – произвольная точки поверхности S. Построим вектор $\bar{A}$ в точке P (рис. 2).

Пусть $\bar{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ есть единичный вектор, направленный по нормали к поверхности S в точке P. Здесь α, β, γ – углы, образованные вектором $\bar{n}$ с осями Ox, Oy, Oz. Обозначим через φ, угол между векторами $\bar{n}$ и $\bar{A}$. Запишем скалярное произведение только что построенных векторов для точки $P(x,y,z)$ поверхности S. Имеем $(\bar{A},\bar{n}) = A_x\cos\alpha + A_y\cos\beta + A_z\cos\gamma$. Это произведение найдём в каждой точке P поверхности S, тогда оно будет определено на всей поверхности S, поэтому от указанного произведения можно взять интеграл по поверхности S:

$$\iint_S \left(\bar{A},\bar{n}\right)d\sigma = \iint_S \left(A_x\cos\alpha + A_y\cos\beta + A_z\cos\gamma\right)d\sigma. \qquad (3)$$

Этот интеграл называется *потоком вектора* $\bar{A}$ *(векторного поля) через поверхность* S.

Пусть векторное поле есть поле скоростей частиц потока жидкости, тогда согласно разделу IV для интеграла (3) имеет место равенство

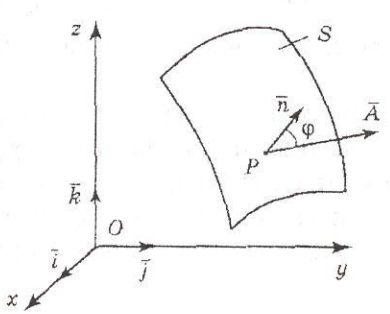

Рис. 2

$$\iint_S \left(\bar{A},\bar{n}\right)d\sigma = K,$$

где K – количество жидкости, проходящей через поверхность S за единицу времени, когда $\cos\varphi > 0$ всюду на поверхности S. Если же $\cos\varphi < 0$ всюду на S, то

$$\iint_S \left(\bar{A},\bar{n}\right)d\sigma = -K.$$

3. Дивергенция векторного поля

Пусть векторное поле задано формулой (2). Возьмем в нем замкнутую поверхность S, ограничивающую область $\tilde{V}$ объёма V. Пусть $\bar{n} = \left(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right)$ есть единичный вектор, направленный по нормали к поверхности S в её произвольной точке во внешнюю сторону по отношению к $\tilde{V}$. Внутри S возьмём произвольную точку $P\left(x,y,z\right)$ и рассмотрим предел

$$\operatorname{div}\bar{A} = \lim_{\substack{V\to 0,\\ S\to P}}\left[\iint_S \left(\bar{A},\bar{n}\right)d\sigma / V\right], \qquad (4)$$

который назовём *дивергенцией векторного поля точке* P и обозначим $\operatorname{div}\bar{A}$. Ясно, что в каждой точке $P\left(x,y,z\right)$ предел формулы (4) будет свой, т .е. он является функцией от координат произвольной точки P векторного поля. Предел (4) представляет собой мощность источника или стока в точке P, если заданное векторное поле представляет собой

поле скоростей частиц потока жидкости, т.е. отнесенное к единице объема количество жидкости,возникающей или исчезающей в точке P за единицу времени (согласно формулам п.2). Это определяет физический смысл $\operatorname{div}\bar{A}$.

Для вычисления дивергенции применяют формулу

$$\operatorname{div}\bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \qquad (5)$$

получаемую на основании формулы Остроградского. Здесь правая часть есть сумма, вычисленная для точки $P\left(x,y,z\right)$. Эта формула позволяет вычислить $\operatorname{div}\bar{A}$ в произвольной точке $P\left(x,y,z\right)$ векторного поля, когда это векторное поле задано формулой (2). С учётом (5) формулу Остроградского теперь можно коротко записать так:

$$\iiint_V \operatorname{div}\bar{A}\,dxdydz = \iint_S \left(\bar{A},\bar{n}\right)d\sigma.$$

4. Циркуляция, ротор (вихрь) векторного поля

Пусть в системе координат $Oxyz$ задано векторное поле формулой (2). В векторном поле возьмём замкнутый контур λ, на нём выберем положительное направление. По контуру возьмём криволинейный интеграл по координатам

$$\int_\lambda A_x dx + A_y dy + A_z dz. \qquad (6)$$

Введём символический вектор $d\bar{r}$, его проекции на оси координат обозначим dx, dy, dz, т. е. $d\bar{r} = dx\,\bar{i} + dy\,\bar{j} + dz\,\bar{k}$. Ясно, что подынтегральное выражение в (6) представляет собой скалярное произведение векторов $\bar{A}$ и $d\bar{r}$. Теперь интеграл (6) можем записать в виде

$$\int_\lambda A_x dx + A_y dy + A_z dz = \int_\lambda \left(\bar{A}, d\bar{r}\right).$$

Он называется *циркуляцией вектора* $\bar{A}$ *по замкнутому контуру* λ.

Чтобы выяснить физический смысл циркуляции, запишем ее для частного случая, когда векторное поле – плоское векторное поле скоростей частиц жидкости, которая вращается как твёрдое тело вокруг оси

Oz с угловой скоростью ω против хода часовой стрелки, если смотреть навстречу Oz. Векторное поле при этом определяется формулой

$$\overline{A} = -\omega y\overline{i} + \omega x\overline{j}, \qquad (7)$$

т. е. $A_x = -\omega y$, $A_y = \omega x$. Это плоское поле достаточно рассмотреть на плоскости Oxy. На этой плоскости возьмём произвольный замкнутый контур λ, на нём установим положительное направление против хода часовой стрелки, если смотреть навстречу Oz. Область внутри λ обозначим через D, площадь ее равна S. Можно показать, что

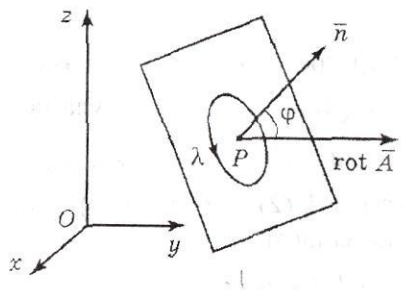

Рис.3

$$\int_\lambda \left(\overline{A}, d\overline{r}\right)/S = 2\omega. \qquad (8)$$

То есть, отношение циркуляции по контуру λ к площади S, заключенной внутри λ, стоящее в левой части этой формулы, характеризует вращение фигуры D с площадью S вокруг оси Oz.

Теперь перейдём к общему случаю. В векторном поле возьмём произвольную плоскость, проходящую через некоторую точку P (рис. 3). Пусть $\overline{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – единичный вектор, направленный по нормали к этой плоскости. Расположим этот вектор с началом в точке P. На указанной плоскости возьмём произвольный замкнутый контур λ, внутри которого находится точка P. Выберем положительное направление – против хода часовой стрелки, если смотреть с конца $\overline{n}$. По этому замкнутому контуру найдём циркуляцию $\overline{A}$, т. е. $\int_\lambda \left(\overline{A}, d\overline{r}\right)$. Поделим ее на S – площадь фигуры, лежащей внутри λ. Получим $\int_\lambda \left(\overline{A}, d\overline{r}\right)/S$. Это отношение характеризует, как видно из (8), вращение фигуры S вокруг вектора $\overline{n}$, перпендикулярного к S. Рассмотрим

$$\lim_{S\to 0,\ \lambda\to P}\left[\int_\lambda \left(\overline{A}, d\overline{r}\right)/S\right].$$

Этот предел характеризует вращение частицы, расположенной в точке P, вокруг вектора $\overline{n}$, перпендикулярного к S. С помощью формулы Стокса можно получить, что

$$\lim_{S\to 0,\ \lambda\to P}\left[\int_\lambda \left(\overline{A}, d\overline{r}\right)/S\right] =$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos\gamma, \qquad (9)$$

где правая часть – выражение, вычисленное в точке $P(x, y, z)$.

Рассмотрим вектор с началом в точке P, проекции которого на оси координат равны разностям правой части формулы (9), этот вектор назовём *ротором (вихрем) векторного поля в точке* P и обозначим

$$\operatorname{rot}\overline{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\overline{k}. \qquad (10)$$

Тогда правая часть (9) – скалярное произведение $\operatorname{rot}\overline{A}$ и вектора $\overline{n}$. Отсюда $\lim_{S\to 0,\ \lambda\to P}\left[\int_\lambda \left(\overline{A}, d\overline{r}\right)/S\right] = \left(\overline{n}, \operatorname{rot}\overline{A}\right)$. Скалярное произведение правой части запишем через длины векторов и $\cos\varphi$, где φ – угол между векторами $\overline{n}$ и $\operatorname{rot}\overline{A}$, и получим

$$\lim_{\substack{S\to 0,\\ \lambda\to P}}\left[\int_\lambda \left(\overline{A}, d\overline{r}\right)/S\right] = \left|\operatorname{rot}\overline{A}\right|\cos\varphi. \qquad (11)$$

Пусть P – фиксированная точка, тогда $\left|\operatorname{rot}\overline{A}\right|$ – фиксированный модуль. Будем изменять φ, тогда в (11) изменится величина слева, которая характеризует вращение частицы P вокруг $\overline{n}$. Из всех направлений (из всех углов φ) эта величина будет наибольшей, когда $\cos\varphi = 1$, т. е. $\varphi = 0$. Следовательно, $\operatorname{rot}\overline{A}$ указывает направление, вокруг которого вращение частицы P будет наибольшим. При $\varphi = \pi/2$, когда

векторы $\bar{n}$ и $\operatorname{rot}\bar{A}$ ортогональны, это число равно нулю. Для векторного поля, определяемого формулой (7), согласно (10) имеем $\operatorname{rot}\bar{A} = 2\cdot\omega\cdot\bar{k}$. С учётом (10) формулу Стокса можно записать в виде:

$$\int_{\lambda}\left(\bar{A}, d\bar{r}\right) = \iint_{S}\left(\bar{n}, rot\bar{A}\right)d\sigma.$$

5. Оператор Гамильтона. Оператор Лапласа

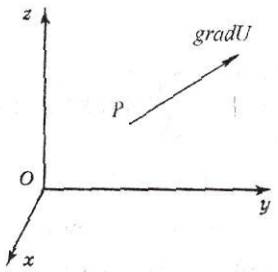

Рис. 4

Пусть в пространстве $Oxyz$ задана функция $U(x,y,z)$. Найдём ее частные производные $\partial U/\partial x$, $\partial U/\partial y$, $\partial U/\partial z$ и вычислим их значения в точке $P(x,y,z)$. Построим вектор с началом в точке P, проекции которого на оси координат равны этим числам (рис. 4). Этот вектор, как известно, есть $\operatorname{grad}U$ в точке P:

$$\operatorname{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k}. \qquad (12)$$

Введём в рассмотрение символический вектор, называемый *оператором Гамильтона,* который обозначается ∇ и называется *набла-вектором,* а его проекции на оси координат представляют собой символы частных производных, т. е.

$$\nabla = \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}. \qquad (13)$$

Под произведением символа частной производной и функции U будем понимать взятие частной производной, например, $\frac{\partial}{\partial x}U = \frac{\partial U}{\partial x}$. Умножим (13) на заданную функцию и получим $\nabla U = \bar{i}\frac{\partial}{\partial x}U + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y}U + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}U$. Произведения справа представляют собой частные производные, поэтому $\nabla U = \bar{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial U}{\partial z}$. Сравнив с (12), придем к формуле $\nabla U = \operatorname{grad}U$.

Пусть в пространстве $Oxyz$ задано векторное поле $\bar{A} = A_x\bar{i} + A_y\bar{j} + A_z\bar{k}$, где $A_x(x,y,z)$, $A_y(x,y,z)$, $A_z(x,y,z)$ – заданные функции от x, y, z, имеющие непрерывные частные производные. Возьмём скалярное произведение набла-вектора (13) и вектора $\bar{A}$: $(\nabla,\bar{A}) = \frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y + \frac{\partial}{\partial z}A_z = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$. Сравнив с (5), получим $(\nabla,\bar{A}) = \operatorname{div}\bar{A}$. Запишем векторное произведение набла-вектора и вектора $\bar{A}$:

$$\left[\nabla,\bar{A}\right] = \bar{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \bar{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \bar{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right).$$

С учетом (10) будем иметь $\left[\nabla,\bar{A}\right] = \operatorname{rot}\bar{A}$. Теперь положим $\bar{A} = \operatorname{grad}U$, тогда согласно (12) $A_x = \frac{\partial U}{\partial x}$, $A_y = \frac{\partial U}{\partial y}$, $A_z = \frac{\partial U}{\partial z}$. Отсюда $\operatorname{div}\operatorname{grad}U = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)$. Справа здесь стоят частные производные второго порядка, поэтому

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \qquad (14)$$

Сумма в правой части обозначается ΔU и называется *оператором Лапласа,* $\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$. Таким образом, (14) примет вид

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}U = \Delta U. \qquad (15)$$

6. Простейшие векторные поля

Пусть задано векторное поле $\bar{A} = A_x(x,y,z)\bar{i} + A_y(x,y,z)\bar{j} + A_z(x,y,z)\bar{k}$, где все функции справа непрерывны вместе со своими частными производными.

1. Трубчатое (соленоидальное) векторное поле. Векторное поле называется *трубчатым,* если всюду $\operatorname{div}\bar{A} = 0$. Если это векторное по-

ле является полем скоростей частиц в потоке жидкости, то условие $\operatorname{div}\overline{A}=0$ всюду означает, что в потоке отсутствуют источники и стоки, в которых жидкость либо возникает, либо исчезает.

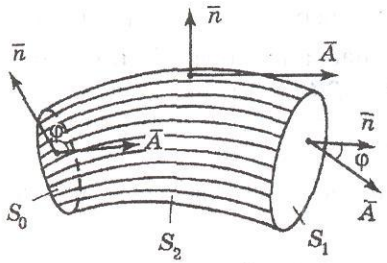

Рис. 5

Для простоты рассмотрим векторное поле скоростей частиц жидкости. В потоке жидкости возьмём плоскую фигуру S_0. Через каждую точку границы этой фигуры проведём *линию тока, т. е. линию, по* которой двигаются частицы жидкости, и получим поверхность, состоящую из линий тока. Жидкость течёт вдоль этой поверхности, не перетекая через неё. Эта поверхность называется *векторной трубкой, трубкой тока* в нашем случае (см. рис. 5).

Пусть S_1 – сечение трубки тока, отличное от S_0, а V – область, заключённая внутри векторной трубки между сечениями S_0, S_1. Границу этой области обозначим S, она состоит из трёх частей: S_0, S_1 и S_2 – части векторной трубки, заключённой между S_0 и S_1. Пусть $\overline{n}$ – единичный вектор, направленный по нормали к поверхности S в её произвольной точке во внешнюю сторону по отношению к области V и φ – угол между векторами $\overline{n}$ и $\overline{A}$. Всюду на S_1 $\cos\varphi>0$ (как видно из рис. 5), на S_0 $\cos\varphi<0$, на S_2 $\cos\varphi=0$ (так как $\varphi=90^\circ$). Для области V с границей S запишем формулу Остроградского: $\iiint\limits_V \operatorname{div}\overline{A}dxdydz=\iint\limits_S\left(\overline{A},\overline{n}\right)d\sigma$. Поскольку $\operatorname{div}\overline{A}=0$ всюду в векторном поле, следовательно, и в области V, левая часть последней формулы обращается в нуль, значит, правая часть тоже есть нуль. Интеграл правой части запишем в виде суммы трёх интегралов, учитывая, что S состоит из S_1, S_2, S_0, получим

$$\iint\limits_{S_0}\left(\overline{A},\overline{n}\right)d\sigma+\iint\limits_{S_1}\left(\overline{A},\overline{n}\right)d\sigma+\iint\limits_{S_2}\left(\overline{A},\overline{n}\right)d\sigma=0.$$

Здесь последний интеграл обращается в нуль, так как всюду на S_2 $\cos\varphi=0$, следовательно,

$$\iint\limits_{S_0}\left(\overline{A},\overline{n}\right)d\sigma+\iint\limits_{S_1}\left(\overline{A},\overline{n}\right)d\sigma=0. \qquad (16)$$

Так как $\cos\varphi>0$ всюду на S_1 и $\cos\varphi<0$ всюду на S_0, то $\iint\limits_{S_1}\left(\overline{A},\overline{n}\right)d\sigma=K_{S_1}$, $\iint\limits_{S_0}\left(\overline{A},\overline{n}\right)d\sigma=-K_{S_0}$, где K_{S_1} и K_{S_0} – количество жидкости, проходящее через S_1 и S_0 соответственно за единицу времени. Эти числа подставим в (16) вместо интегралов и получим $K_{S_0}-K_{S_1}=0$, значит, $K_{S_0}=K_{S_1}$.

Таким образом, в трубчатом поле через любые два сечения в трубке тока – векторной трубке – проходит одинаковое количество жидкости за единицу времени.

2. Потенциальное (безвихревое) векторное поле. Векторное поле называется *потенциальным (безвихревым)*, если всюду в векторном поле $\operatorname{rot}\overline{A}=0$. Значит, согласно (10) в этом поле всюду

$$\frac{\partial A_z}{\partial y}=\frac{\partial A_y}{\partial z},\quad \frac{\partial A_x}{\partial z}=\frac{\partial A_z}{\partial x},\quad \frac{\partial A_y}{\partial x}=\frac{\partial A_x}{\partial y}. \qquad (17)$$

В векторном поле возьмём криволинейный интеграл $\int\limits_{AB}A_xdx+A_ydy+A_zdz$. Будем считать, что A – фиксированная точка с заданными координатами $\left(x_0,y_0,z_0\right)$, B – переменная точка с координатами $\left(x,y,z\right)$. По теореме 2 раздела IV этот интеграл для любых точек A,B в силу соотношения (17) не зависит от линии интегрирования, т. е. он зависит только от положения точки B (так как точка A фиксирована). Таким образом, указанный интеграл является функцией координат $\left(x,y,z\right)$ точки B. Эту функцию обозначим $U\left(x,y,z\right)$. Итак,

$$U\left(x,y,z\right)=\int\limits_{AB}A_xdx+A_ydy+A_zdz. \qquad (18)$$

По формулам предыдущего раздела $\frac{\partial U}{\partial x} = A_x$, $\frac{\partial U}{\partial y} = A_y$, $\frac{\partial U}{\partial z} = A_z$.

Отсюда $\overline{A} = \frac{\partial U}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\overline{k}$, т. е.

$$\overline{A} = \operatorname{grad} U. \qquad (19)$$

Последнее соотношение является характерным для потенциального векторного поля. Оно показывает, что вектор этого поля в любой точке представляется как $\operatorname{grad} U$, где U определяется в (18). Функция U называется *потенциальной функцией или потенциалом.*

3. Гармоническое поле. Векторное поле называется *гармоническим*, если оно одновременно является и трубчатым и потенциальным. Так как поле является потенциальным, то согласно (19) $\overline{A} = \operatorname{grad} U$. Кроме того, поле является трубчатым, следовательно, $\operatorname{div} \overline{A} = 0$. Значит, $\operatorname{div} \operatorname{grad} U = 0$. С учётом (15) получим $\Delta U = 0$. Функция U, удовлетворяющая последнему уравнению, называется *гармонической.*

Более подробное изложение материала и доказательства теорем можно найти, к примеру, в следующих литературных источниках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Салимов Р.Б., Славутин М.Л. Математика для инженеров и технологов. – Казань: Изд-во КМО, 2005. – 589 с.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 2 часть. – М.: Айрис-пресс, 2004.– 256 с.

СОДЕРЖАНИЕ

I. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ....3
1. Объём цилиндрического тела....3
2. Двойной интеграл и его геометрический смысл....4
3. Тройной интеграл и его механический смысл....6
4. Свойства двойного (тройного) интеграла....7
5. Вычисление двойного интеграла....8
6. Замена переменных в двойном интеграле....10
7. Переход в двойном интеграле к полярным координатам....11
8. Вычисление площади поверхности с помощью двойного интеграла....12
9. Вычисление объёмов с помощью двойных интегралов....14
10. Вычисление тройного интеграла....14
11. Переход в тройном интеграле к цилиндрическим координатам....16

II. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ....16
1. Криволинейные интегралы по координатам и их вычисление....16
2. Применение криволинейных интегралов к вычислению работы....19
3. Формула Грина....19
4. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования....19
5. Криволинейный интеграл по длине....21
6. Криволинейные интегралы по пространственным кривым....22
7. Применение кратных и криволинейных интегралов к вычислению координат центра тяжести тел....23

III. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ....24
1. Общие понятия....24
2. Дифференциальные уравнения первого порядка....24
3. Геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка....26
4. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными....27
5. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка....28
6. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка....29
7. Дифференциальные уравнения высших порядков....30