МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Т.В. Белавина, Я.Д. Золотоносов

ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА

КУРС НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебно-методическое пособие

Казань
2014

УДК 515
ББК 22.151.3
Б43

Белавина Т.В., Золотоносов Я.Д.
Б43 Инженерная графика. Курс начертательной геометрии: учеб.-метод. пособие / Т.В. Белавина, Я.Д. Золотоносов. – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитект.-строит. ун-та, 2014. – 98 с.

ISBN 978-5-7829-0414-2

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Учебно-методическое пособие написано на основе рабочей программы кафедры начертательной геометрии и графики КГАСУ, разработанной согласно новым Федеральным государственным образовательным стандартам (ФГОС-3), и является дополнением к учебникам по курсу начертательной геометрии. В пособии излагаются теоретические основы методов изображения геометрических тел. Рассмотрены способы преобразования комплексного чертежа, решения метрических и позиционных задач, построения разверток поверхностей. Каждый раздел сопровождается иллюстрациями и примерами решения типовых задач, которые наглядно демонстрируют применение основных приемов и способов решения задач по начертательной геометрии. В пособие включены вопросы для самопроверки проработанного материала.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов направления 270800.62 «Строительство».

Рецензенты:
Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Общеинженерные дисциплины» Казанского ГАУ
Ф.А. Шамсутдинов
Главный специалист ГУП «Татинвестгражданпроект»
В.Р. Мустакимов

УДК 515
ББК 22.151.3

© Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 2014
© Белавина Т.В., Золотоносов Я.Д., 2014

ISBN 978-5-7829-0414-2

ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия является разделом геометрии, в котором изучаются методы изображения пространственных геометрических объектов на плоском чертеже. Один из создателей начертательной геометрии французский ученый Гаспар Монж (1746–1818 гг.) определил ее как «искусство представлять на листе бумаги, имеющем только два измерения, предметы, имеющие три размера, которые подчинены точному определению». Профессор В.И. Курдюмов (1853–1904 гг.) писал: «Если чертеж является языком техники, одинаково понятным всем народам, то начертательная геометрия служит грамматикой этого языка...».

Начертательная геометрия занимается графическим решением пространственных геометрических задач на плоском чертеже. Чертеж дает возможность определить пространственную форму изображаемого предмета, взаимное расположение отдельных его элементов и выявить их истинные размеры. Среди требований, предъявляемых к чертежам, наиболее существенными являются:

- **наглядность** – давать пространственное представление об изображаемом предмете;
- **обратимость** – возможность по чертежу однозначно воспроизвести форму и размеры изображенного предмета;
- **точность** – графические операции, выполненные на чертеже, должны давать достаточно точные результаты;
- **простота** – изображение должно быть простым по построению и должно допускать однозначное описание объекта в виде последовательности графических операций.

Перед начертательной геометрией стоят следующие основные задачи:

1) изучение и разработка способов построения чертежей пространственных предметов на плоскости;

2) изучение приемов решения и исследования пространственных задач при помощи чертежей;

3) способы решения конструктивных, позиционных и метрических задач.

Дисциплина включает следующие разделы: начертательную геометрию, строительное черчение (инженерную графику) и основы компьютерной графики.

Нужно отметить, что начертательная геометрия и инженерная графика входят в число фундаментальных дисциплин, составляющих основу инженерного образования.

ГЛАВА 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРОЕЦИРОВАНИЯ

В основу построения на чертеже изображения любого предмета положен метод *проецирования* (от латинского слова *projicere* – бросать вперед). *Проекцией* геометрической фигуры на плоскость называют ее изображение, полученное на этой плоскости с помощью воображаемых проецирующих лучей.

Чтобы получить проекцию какой-либо точки ***A*** на некоторой плоскости **П** (рис.1), необходимо через точку ***A*** провести прямую до пересечения ее с этой плоскостью.

Точка ***A′*** пересечения прямой с плоскостью **П** и представляет собой *проекцию точки A* на данной плоскости (рис.1). Прямая, проведенная через точку ***A***, называется *проецирующим лучом*, а плоскость **П**, на которую ведется проецирование, – *плоскостью проекций*.

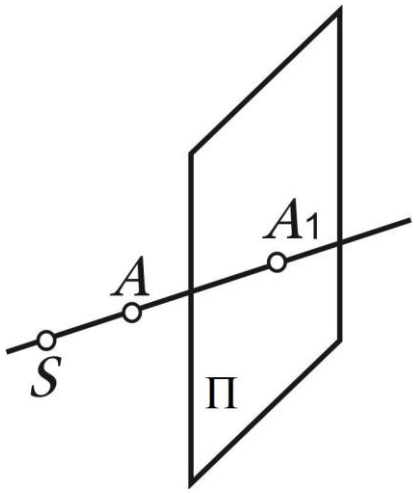


Рис. 1

При проецировании какого-либо предмета необходимо, чтобы направление всех воображаемых проецирующих лучей, проецирующих отдельные точки предмета, было подчинено определенному условию. В связи с этим различают два основных способа образования проекций:

1) центральное проецирование;

2) параллельное проецирование.

1.1. Центральное проецирование

Центральной проекцией точки называется точка пересечения с плоскостью проекций **П** проецирующего луча, проходящего через центр проецирования ***S*** (***S*** ∉ **П**) и данную точку. Точка ***S*** называется конечной (несобственной) точкой.

Чтобы получить центральную проекцию точки ***A*** (рис. 2), через центр проецирования ***S*** и заданную точку проводится проецирующий луч ***SA*** до пересечения с плоскостью проекций **П.**

Если точка ***B*** принадлежит плоскости проекций ***П***, то ее проекция совпадает с самой точкой ***B′***=***B*** (рис. 2).

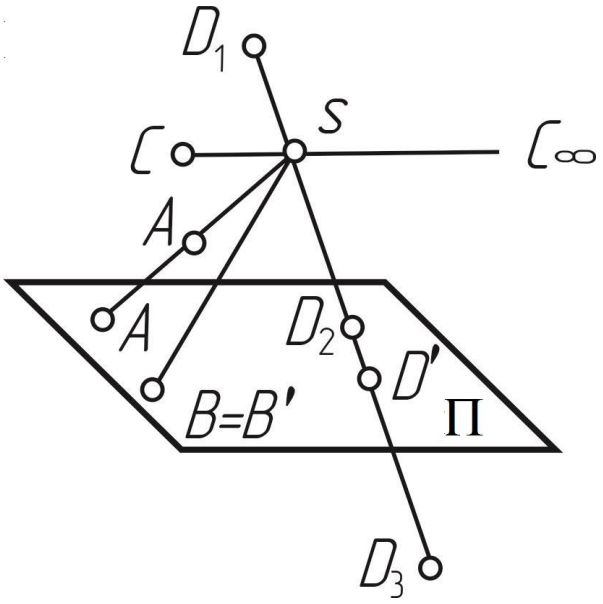


Рис. 2

Если проецирующий луч, проходящий через точку ***C*** (рис. 2), параллелен плоскости проекций, то принято считать, что они пересекаются в бесконечно удаленной точке $\mathbf{C}^{\infty}$. Эту точку называют *несобственной.*

По одной проекции точки нельзя однозначно определить положение самой точки в пространстве. Так, точки $\boldsymbol{D_1}$, $\boldsymbol{D_2}$, $\boldsymbol{D_3}$ (рис. 2), лежащие на проецирующем луче ***SD***, имеют одну и ту же проекцию ***D′***.

Проекцию линии *m* можно построить, проецируя ряд принадлежащих ей точек (рис. 3).

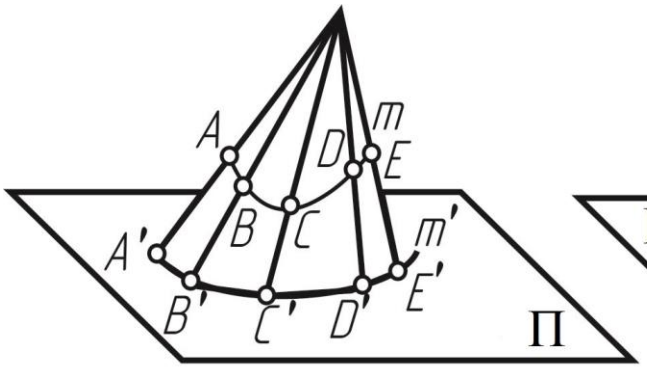


Рис. 3

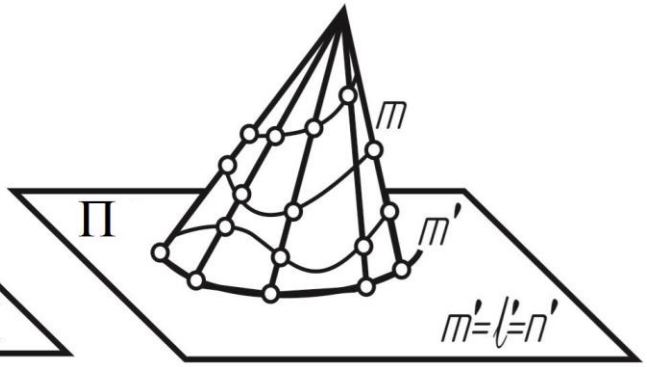


Рис. 4

При этом проецирующие лучи образуют коническую поверхность. Как видно из рис. 4, одна проекция линии *m* не определяет ее положение в пространстве, так как на конической поверхности можно разместить ряд линий ***(m, n, l),*** проекции которых совпадают ***(m′≡n′≡l′).***

1.2. Параллельное проецирование

Параллельное проецирование является частным случаем центрального проецирования, когда центр проецирования находится в бесконечно удаленной (несобственной) точке.

Параллельной проекцией точки называется точка пересечения с плоскостью проекций **П** проходящего через данную точку проецирующего луча, параллельного направлению проецирования (вектор ***S***).

При параллельном проецировании все проецирующие лучи параллельны направлению проецирования. В зависимости от угла ***α*** между проецирующими лучами и плоскостью проекций (рис. 5) параллельные проекции делятся на *косоугольные* (*α*≠90°) и *прямоугольные (ортогональные)* (α=90°).

Чтобы построить параллельную проекцию точки ***A*** (рис. 5), через нее параллельно направлению проецирования ***S*** проводится проецирующий луч до пересечения с плоскостью проекций.

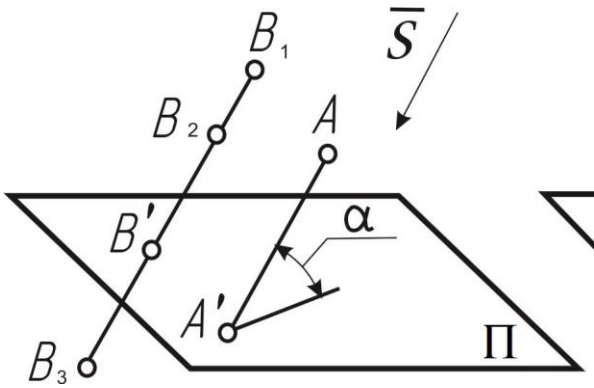


Рис. 5

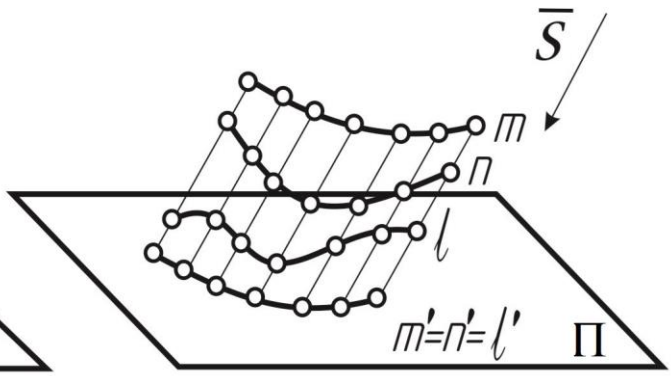


Рис. 6

При параллельном проецировании, как и при центральном, любая точка пространства имеет одну вполне определенную проекцию. Обратное утверждение неверно. Например, точки ***B*₁, *B*₂, *B*₃** имеют одну и ту же проекцию ***B′.***

Чтобы получить параллельную проекцию ***m′*** линии ***m*** (рис. 6), необходимо соединить проекции принадлежащих ей точек. Проецирующие лучи, проходящие через эти точки, в своей совокупности образуют цилиндрическую поверхность. Этой поверхности может принадлежать ряд линий, все они будут иметь одну и ту же проекцию (рис. 6).

Каждый из рассматриваемых способов проецирования имеет свои преимущества и недостатки. В зависимости от того, для какой цели выполняется чертеж, используется тот или иной способ.

Для выполнения чертежа, по которому изготовляется изображаемый предмет, используется ортогональное проецирование.

Косоугольное, параллельное проецирование используется, в основном, для получения аксонометрических изображений, центральное – для построения перспективных изображений.

1.3. Основные инвариантные свойства параллельного проецирования

В общем случае геометрические фигуры проецируются на плоскость проекций с искажениями. Характер искажения проекций по сравнению с фигурой-оригиналом зависит от аппарата проецирования и положения фигуры относительно плоскости проекций.

Наряду с этим между фигурой-оригиналом и ее проекцией существует связь, заключающаяся в том, что некоторые свойства фигуры сохраняются и на ее проекции. Эти свойства называют *инвариантными* (независимыми) относительно способа проецирования. Перечислим основные инвариантные свойства параллельного проецирования.

1. Проекция точки на плоскость есть точка.
2. Проекция прямой на плоскость в общем случае есть прямая. Она вырождается в точку, если прямая параллельна направлению проецирования.
3. Если точка принадлежит линии, то проекция точки принадлежит проекции этой линии.
4. Если отрезок прямой линии делится точкой в каком-либо отношении, то и проекция отрезка делится проекцией точки в том же отношении.
5. Точка пересечения линий проецируется в точку пересечения их проекций.
6. Проекции отрезков параллельных прямых параллельны.

ГЛАВА 2. ТОЧКА

В изучаемом курсе основное внимание будет уделено ортогональному проецированию.

2.1. Проекции точки (прямоугольные проекции или метод Монжа)

Проецирование на одну плоскость проекций дает изображение, которое не позволяет однозначно определить форму и размеры изображенного предмета. Проекция точки A (рис. 7) не определяет положение самой точки в пространстве, так как неизвестно, на какое расстояние она удалена от плоскости проекций Π_1.

Наличие одной проекции создает неопределенность изображения. В таких случаях говорят о необратимости чертежа, так как по такому чертежу невозможно воспроизвести оригинал геометрического образа. Чертеж должен быть «обратимым», т.е. вполне определяющим проецируемые геометрические образы (объекты).

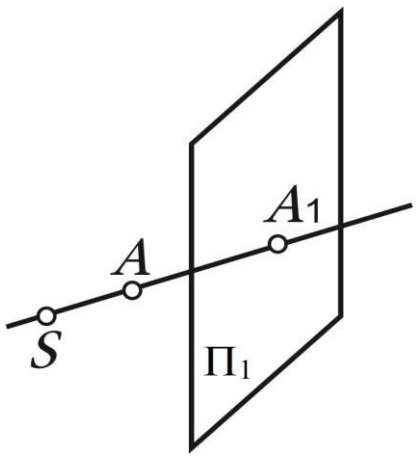


Рис. 7

Для исключения неопределенности изображения создадим еще одну плоскость проекций Π_2 ($\Pi_2 \perp \Pi_1$) и еще один центр проецирования S_2 ($S_2 \perp \Pi_2$) (рис. 8). Пересечение проецирующих лучей с плоскостями Π_1 и Π_2 определяют проекции точки A (A_1 и A_2). Полученная пара точек A_1 и A_2 является *моделью точки* A в пространстве (или изображением). В этом случае чертеж является обратимым, и можно определить положение точки A в пространстве.

Итак, *сущность метода ортогонального проецирования* заключается в том, что предмет проецируется на две взаимно перпендикулярные плоскости лучами, ортогональными (перпендикулярными) к этим плоскостям.

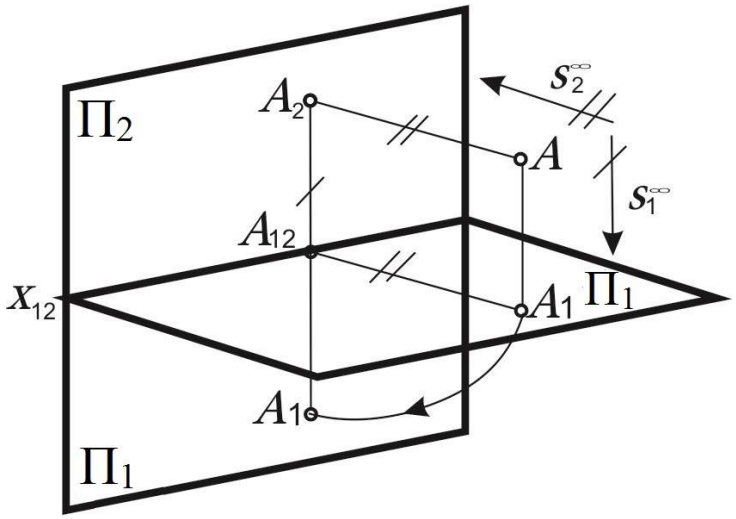


Рис. 8

Чтобы получить плоский чертеж (эпюр Монжа), состоящий из указанных выше проекций, плоскость **П₁** совмещают вращением вокруг оси **X₁₂** с плоскостью **П₂** (рис. 8). Проекционный чертеж, на котором плоскости проекций со всеми изображениями на них, совмещены определенным образом одна с другой, называется *эпюром (от франц. epure – чертеж*) (рис. 9).

Комплексный чертеж (эпюр) – плоский чертеж, составленный из двух или трех связанных между собой ортогональных проекций геометрического объекта.

При таком способе совмещения плоскостей **П₁** и **П₂,** проекции ***A₁*** и ***A₂*** окажутся расположенными на одном перпендикуляре к оси **X₁₂**. Прямые линии, соединяющие разноименные проекции точки на эпюре, называются *линиями проекционной связи*, которые всегда должны быть перпендикулярны к оси.

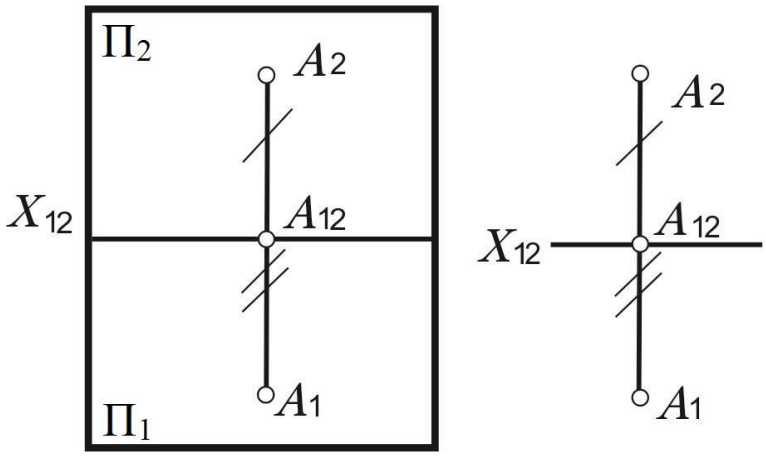


Рис. 9

2.2. Частные случаи расположения точек в пространстве

Точка ***A***, расположенная в пространстве, называется *точкой оригинала*. На эпюре она отсутствует, но, если точка принадлежит к какой-либо плоскости проекций, то в этом случае точка-оригинал совпадает со своей проекцией (рис. 10).

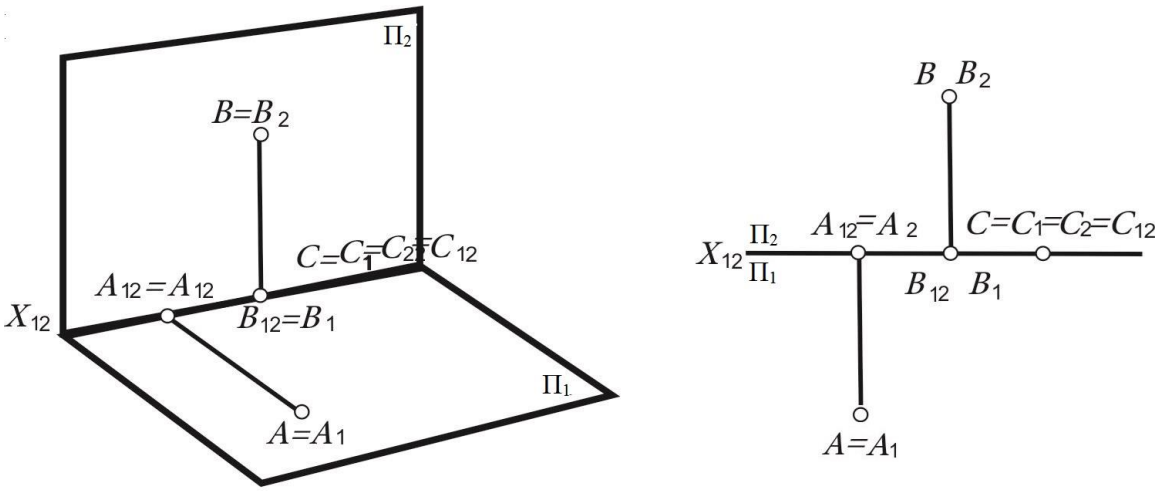
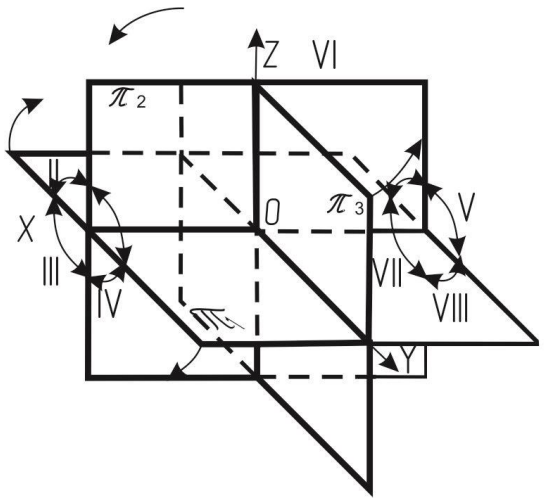


Рис. 10

2.3. Построение дополнительной профильной плоскости проекций

Наиболее удобной для определения положения геометрического объекта в пространстве и выявления его формы по ортогональным проекциям является система из трех взаимно перпендикулярных плоскостей проекций (рис. 11). Плоскости проекций называются: **$П_1$** – *горизонтальная плоскость проекций;* **$П_2$** – *фронтальная плоскость проекций;* **$П_3$** – *профильная плоскость проекций.*



	Знаки координат		
	X	Y	Z
I	+	+	+
II	+	–	+
III	+	–	–
IV	+	+	–
V	–	+	+
VI	–	–	+
VII	–	–	–
VIII	–	+	–

Рис. 11

Плоскости проекций попарно пересекаются по трем взаимно перпендикулярным прямым, которые образуют оси координат. Оси делят каждую из плоскостей проекций на *полы (полуплоскости)*. Координатные оси обозначают: ***X*** – ось абсцисс*;* ***Y*** – ось ординат*;* ***Z*** – ось аппликат. В точке пересечения осей находится начало координат **0**. Положительное направление осей показано стрелками.

Три плоскости проекций делят пространство на восемь частей – *октантов.* Нумерация октантов и распределение знаков по октантам показано на рис. 11.

На пространственном макете построим ортогональные проекции точки ***A*** на три плоскости проекций (рис. 12). Для этого через точку ***A*** перпендикулярно к плоскостям **$П_1$, $П_2$, $П_3$** проведем проецирующие лучи. В точках пересечения этих лучей с плоскостями проекций получим ортогональные проекции точки ***A:*** A_1 – горизонтальную проекцию; A_2 – фронтальную проекцию; A_3 – профильную проекцию.

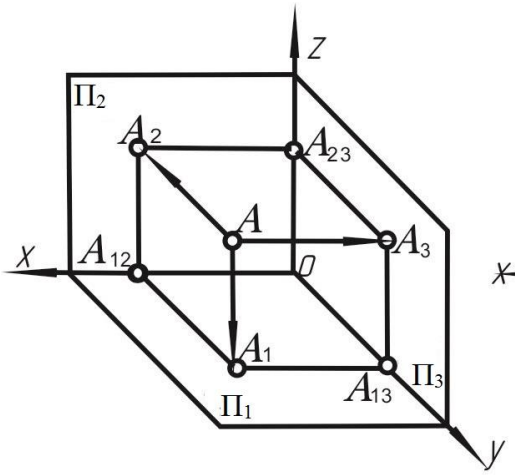


Рис. 12

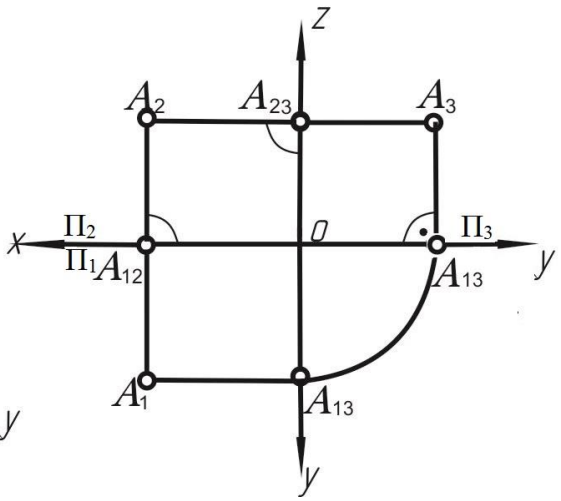


Рис. 13

На рис. 13 показано преобразование пространственного макета точки ***A*** (рис. 12) в ее комплексный чертеж.

Положение точки ***A*** (рис. 12, 13) в пространстве определяют три ее координаты: X_A, Y_A, Z_A.

Координата точки – число, абсолютная величина которого равна расстоянию от точки до соответствующей плоскости проекций.

Координата X_A (*широта* точки ***A***) определяет величину расстояния от точки ***A*** до профильной плоскости проекций $П_3$: $X_A=AA_3=OA_{12}=A_1A_{13}=A_2A_{23}$.

Координата Y_A (*глубина* точки ***A***) определяет величину расстояния от точки ***A*** до фронтальной плоскости проекций $П_2$: $Y_A=AA_2=OA_{13}=A_1A_{12}=A_3A_{23}$.

Координата Z_A (*высота* точки A) определяет величину расстояния от точки A до горизонтальной плоскости проекций Π_1: $Z_A=AA_1=OA_{23}=A_2A_{12}=A_3A_{13}$.

Пусть дана точка $A(60,25,15)$. Эта запись означает, что координата X_A= 60 мм, Y_A = 25 мм, Z_A = 15 мм.

Независимо от положения точки в пространстве на комплексном чертеже ее горизонтальная и фронтальная проекции соединяются *линией связи* – прямой, перпендикулярной оси X, фронтальная и профильная проекции соединяются другой линией связи – прямой, перпендикулярной оси Z. Точка может принадлежать одной из плоскостей проекций или находиться в одном из восьми октантов.

Зная две любые проекции точки, можно определить ее третью проекцию.

Если известны горизонтальная (A_1) и фронтальная (A_2) проекции точки (A) (рис. 14), то для определения ее профильной проекции (A_3) необходимо из фронтальной проекции точки (A_2) провести прямую, перпендикулярную к оси Z. На этой прямой от точки ее пересечения с осью $Z(A_{23})$ отложить отрезок, равный по величине координате Y точки (Y_A). Откладываем вправо, если координата Y точки положительна, и влево, если отрицательна.

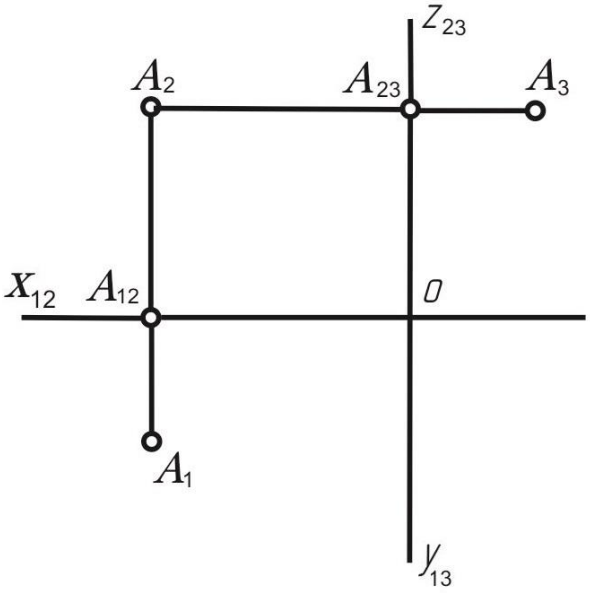


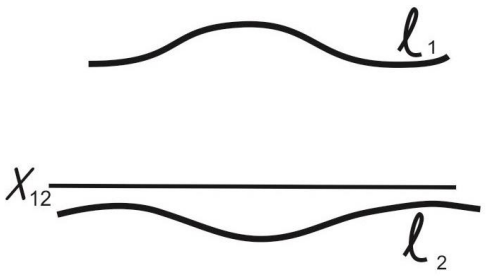
Рис. 14

ГЛАВА 3. ПРЯМАЯ

Простейшим геометрическим образом является линия. В начертательной геометрии приняты 2 способа образования линии.

1. Кинематический, т.е. линия рассматривается как траектория точки, непрерывно перемещающейся в пространстве.
2. Линия – это пересечение 2-х поверхностей.

На эпюре Монжа линия изображается двумя проекциями (рис. 15).



ℓ_1 – горизонтальная проекция;
ℓ_2 – фронтальная проекция.

Рис. 15

Линии бывают плоские и пространственные.

Плоские линии – такие, все точки которых лежат в одной плоскости (окружность, эллипс, гипербола, парабола и т.п.).

Пространственные – это линии, все точки которых не лежат в одной плоскости (например, винтовая линия).

Для кривой линии вводится такая характеристика, как порядок кривой. Порядок плоской кривой определяется числом точек пересечения ее прямой линией. Например, кривые II порядка: окружность, эллипс, гипербола.

На комплексном чертеже линия задается проекциями элементов своего определителя. *Определителем линии* называется совокупность геометрических элементов, однозначно задающих положение линии в пространстве: $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{S}^{\infty})$, где $\boldsymbol{A}$ – точка в пространстве; $\boldsymbol{S}^{\infty}$ – направление движения заданной точки.

3.1. Проекции прямой линии

Частным случаем плоской линии является прямая линия. Определитель прямой – пара точек: $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ (рис. 16).

Для определения проекций прямой линии достаточно задать проекции двух несовпадающих точек, принадлежащих этой прямой. Соединив прямыми одноименные проекции этих точек, получим проекции отрезка прямой. Проекции прямой обозначают строчными буквами латинского алфавита.

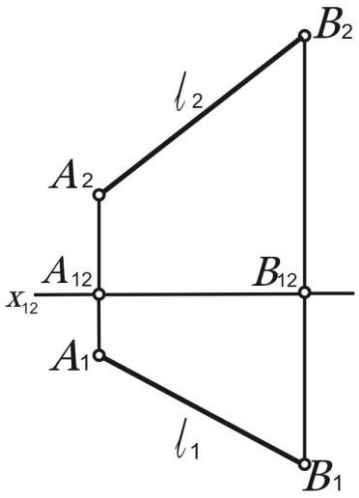


Рис. 16

В зависимости от положения прямых относительно плоскостей проекций различают:

- прямые общего положения;
- прямые частного положения.

3.2. Прямые общего положения

Прямые общего положения – прямые, не параллельные ни одной из плоскостей проекций (рис. 17).

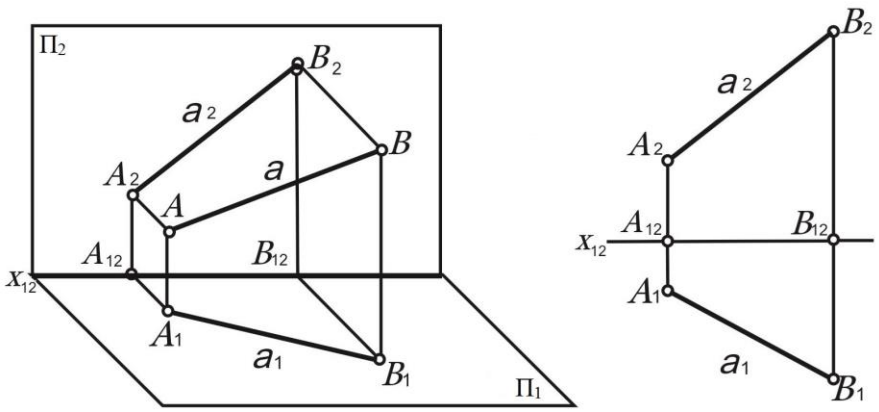


Рис. 17

3.3. Прямые частного положения

Прямые частного положения – это прямые, параллельные или перпендикулярные какой-либо плоскости проекций. Существуют 6 прямых частного положения, которые, в свою очередь, делятся на две группы:

- прямые уровня;
- проецирующие прямые

3.3.1. Прямые уровня

Прямые уровня – прямые, параллельные одной из плоскостей проекций.

Горизонталь – прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций. Горизонталь обозначается буквой ***h***. Горизонталь ***h*** и углы ***α*** и ***γ*** наклона ее соответственно к плоскостям **П₂** и **П₃** проецируются на плоскость **П₁** без искажения (рис. 18).

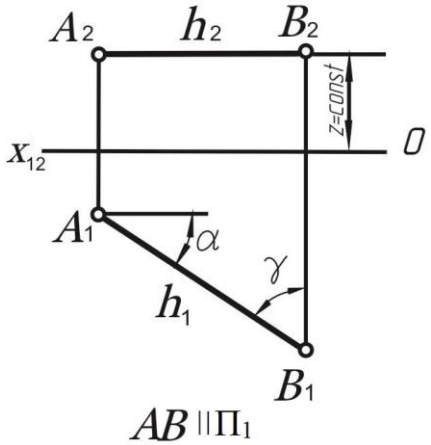


Рис. 18

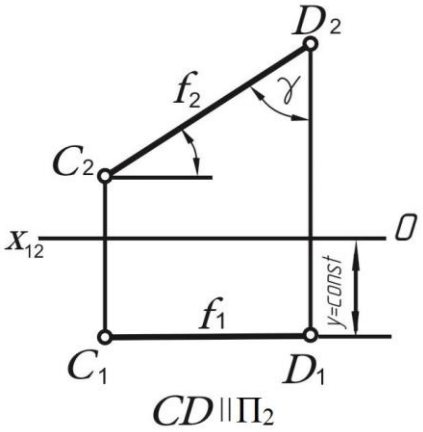


Рис. 19

Фронталь – прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций. Фронталь обозначается буквой ***f***. Фронталь ***f*** и углы ***β*** и ***γ*** ее наклона к плоскостям **П₁** и **П₃** соответственно наклона ее проецируются на плоскость **П₂** без искажения (рис. 19).

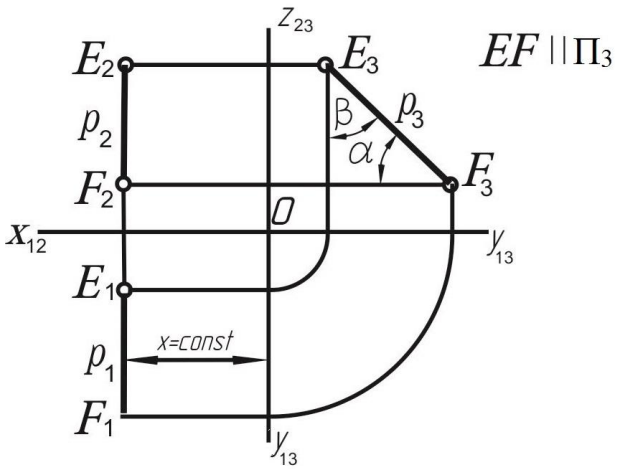


Рис. 20

Профильная прямая – прямая, параллельная профильной плоскости проекций. Профильная прямая обозначается буквой ***p***. Профильная прямая ***p*** и углы ***α*** и ***β*** наклона ее соответственно к плоскостям $\mathbf{П_1}$ и $\mathbf{П_2}$ проецируются на плоскость $\mathbf{П_3}$ без искажения (рис. 20).

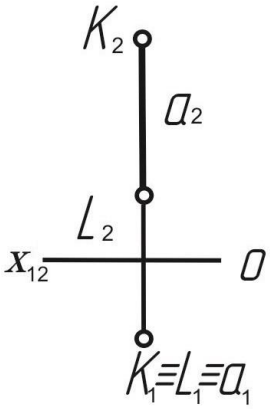
Фронтальная и горизонтальная проекции профильной прямой располагаются параллельно оси ***Z*** или, что то же, перпендикулярно к оси ***X***.

3.3.2. Проецирующие прямые

Проецирующие прямые – прямые, перпендикулярные одной из плоскостей проекций.

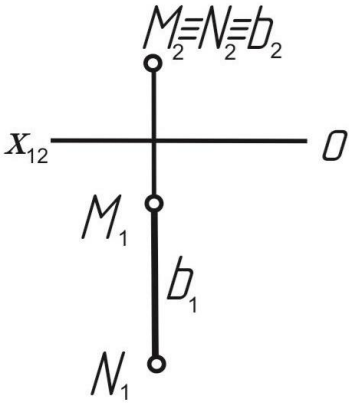
Горизонтально проецирующая прямая – прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций. Горизонтальная проекция этой прямой вырождается в точку (рис. 21). Так как горизонтально проецирующая прямая параллельна одновременно плоскостям $\mathbf{П_2}$ и $\mathbf{П_3}$, то на них она проецируется без искажения.

Эта прямая одновременно является фронталью и профильной прямой.



$KL \perp П_1$

Рис. 21



$MN \perp П_2$

Рис. 22

Фронтально проецирующая прямая – прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций. Фронтальная проекция прямой вырождается в точку, а на плоскости $\mathbf{П_1}$ и $\mathbf{П_3}$ она проецируется без искажения (рис. 22).

Эта прямая одновременно является горизонталью и профильной прямой.

Профильно проецирующая прямая – прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекции. Профильная проекция прямой вырождается в точку, а на плоскости $\mathbf{П_1}$ и $\mathbf{П_2}$ она проецируется без искажения (рис. 23).

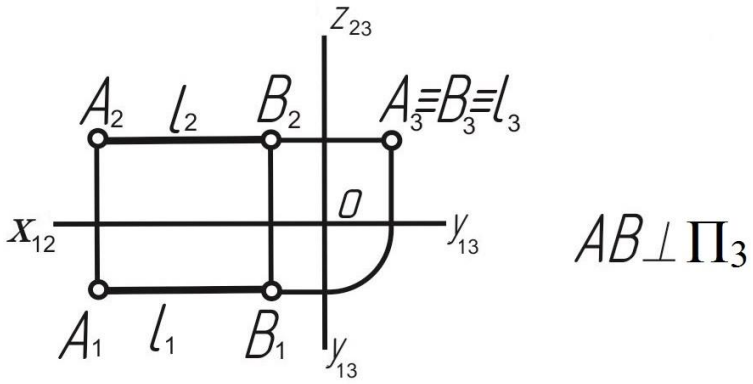


Рис. 23

Эта прямая одновременно является горизонталью и фронталью.

3.4. Следы прямой

Следом прямой называется точка пересечения прямой с плоскостью проекций. Следы прямой являются точками, в которых прямая переходит из одного октанта в другой. В общем случае прямая, например ***l***, может пересекать все три плоскости проекций и иметь три следа: *горизонтальный след* ***H*** – точка пересечения прямой ***l*** с плоскостью Π_1, ее координата $Z_H = 0$; *фронтальный след* ***F*** – точка пересечения прямой ***l*** с плоскостью Π_2 $(Y_F=0)$; *профильный след* ***W*** – точка пересечения прямой ***l*** с плоскостью Π_3 $(Y_F=0)$. Прямая не имеет следа на плоскости проекций, если она параллельна этой плоскости. Каждый след, являясь точкой, одновременно принадлежащей и данной прямой и одной из плоскостей проекций, совпадает с одноименной своей проекцией ($H = H_1, F = F_2, W = W_3$).

Пусть имеется прямая общего положения ***l***, заданная двумя точками ***A*** и ***B***. В системе плоскостей проекций Π_1 — Π_2 построим наглядное изображение этой прямой (рис. 24).

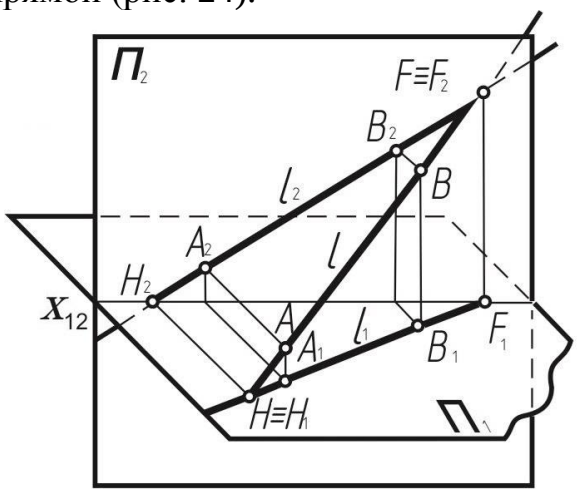


Рис. 24

В пересечении прямой ***l*** с плоскостями проекций $\mathbf{П_1}$ и $\mathbf{П_2}$ определим соответственно ее следы: ***H*** – горизонтальный; ***F*** – фронтальный. Фронтальная проекция горизонтального следа $\boldsymbol{H_2}$ и горизонтальная проекция фронтального следа $\boldsymbol{F_1}$ лежат на оси *X*.

Отмеченные особенности позволяют сформулировать *правила построения следов прямой на комплексном чертеже*.

1. Для построения горизонтального следа прямой ***l*** необходимо в пересечении ее фронтальной проекции с осью *X* найти $\boldsymbol{H_2}$ – фронтальную проекцию горизонтального следа прямой. Затем по линии связи на горизонтальной проекции прямой найти горизонтальный след и его горизонтальную проекцию ($\boldsymbol{H = H_1}$).

2. Для построения фронтального следа прямой ***l*** необходимо в пересечении ее горизонтальной проекции с осью *X* найти $\boldsymbol{F_1}$ – горизонтальную проекцию фронтального следа прямой. Затем по линии связи на фронтальной проекции прямой найти фронтальный след и его фронтальную проекцию ($\boldsymbol{F = F_2}$).

Построение следов прямой ***l*** на комплексном чертеже показано на рис. 25.

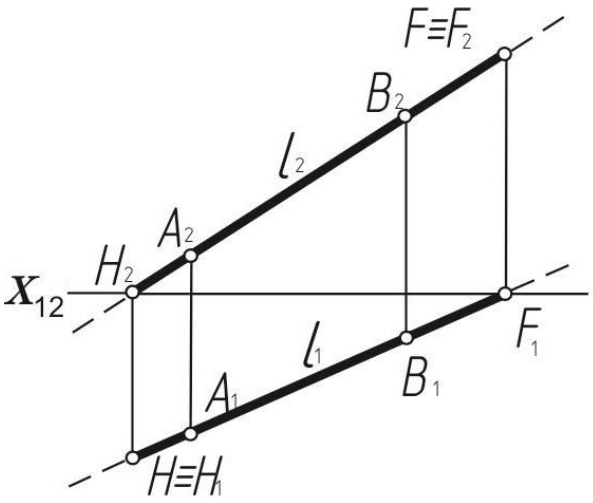


Рис. 25

3.5. Взаимное положение двух прямых

Две прямые могут быть пересекающимися, параллельными, скрещивающимися.

Пересекающиеся прямые – две прямые, лежащие в одной плоскости и пересекающиеся в собственной точке. Точки пересечения их одноименных проекций находятся на одной линии связи (рис. 26).

Параллельные прямые – две прямые, лежащие в одной плоскости и пересекающиеся в несобственной точке. Одноименные проекции отрезков параллельных прямых параллельны, и их длины находятся в таком же отношении, как и длины проецируемых отрезков (рис. 27).

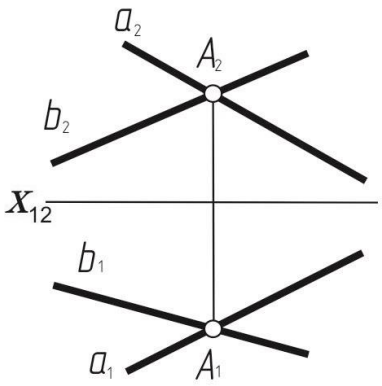


Рис. 26

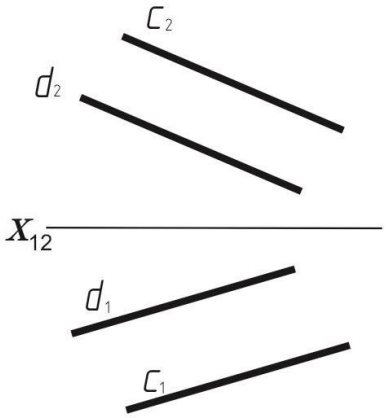


Рис. 27

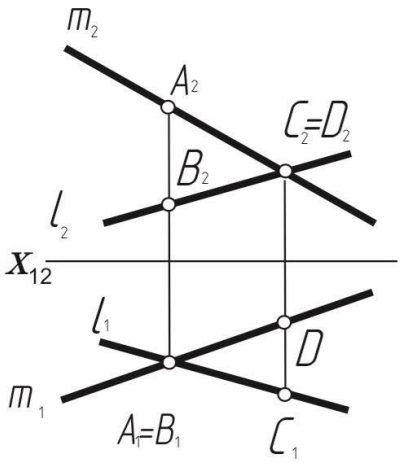


Рис. 28

Скрещивающиеся прямые – две прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости. Точки пересечения одноименных проекций скрещивающихся прямых не лежат на одной линии связи. Каждая точка пересечения одноименных проекций скрещивающихся прямых представляет собой проекции двух точек, одна из которых принадлежит первой прямой, а другая – второй (рис. 28).

3.6. Определение видимости геометрических элементов

Для определения взаимной видимости геометрических элементов (точек, линий, плоскостей) используют конкурирующие точки.

Конкурирующими называют точки, принадлежащие разным геометрическим объектам и расположенные на одной проецирующей прямой.

Пусть точки, принадлежащие разным геометрическим объектам, расположены на общей для них проецирующей прямой. Тогда на данной плоскости проекций видимой будет проекция только той точки, которая находится ближе к наблюдателю, т.е. дальше от этой плоскости проекций. Так, видимой будет:

а) на плоскости $\mathbf{П_1}$ – проекция точки, наиболее удаленной от $\mathbf{П_1}$;

б) на плоскости $\mathbf{П_2}$ – проекция точки, наиболее удаленной от $\mathbf{П_2}$;

в) на плоскости $\mathbf{П_3}$ – проекция точки, наиболее удаленной от $\mathbf{П_3}$.

Возьмем на горизонтально проецирующей прямой две конкурирующие точки ***A*** и ***B*** (рис. 29, 30).

На плоскости $\mathbf{П_2}$ будут видимыми проекции обеих точек. На плоскости $\mathbf{П_1}$ будет видимой проекция точки ***A***, а проекция точки ***B*** – невидимой, так как точка ***A*** более удалена от $\mathbf{П_1}$, чем точка ***B*** ($Z_A > Z_B$). Невидимую проекцию точки заключаем в скобки.

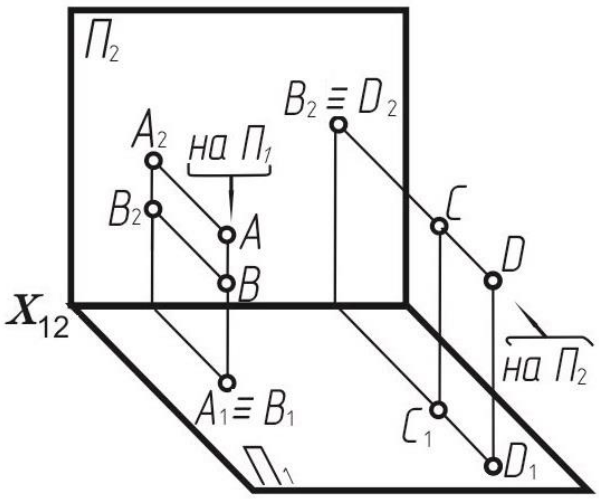


Рис. 29

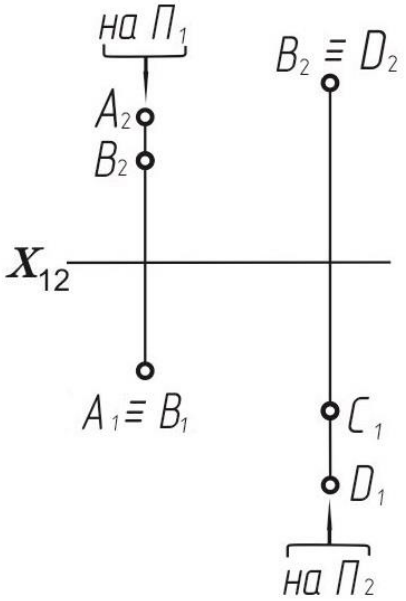


Рис. 30

На плоскости Π_2 будут видимыми проекции обеих точек. На плоскости Π_1 будет видимой проекция точки A, а проекция точки B – невидимой, так как точка A более удалена от Π_1, чем точка B ($Z_A > Z_B$). Невидимую проекцию точки заключаем в скобки.

На фронтально проецирующей прямой возьмем две другие конкурирующие точки C и D. Если смотреть по направлению стрелки, то на плоскости Π_2 будет видимой проекция точки D, а проекция точки C – невидимой, так как точка D более удалена от Π_2, чем точка C ($Y_D > Y_C$).

ГЛАВА 4. ПЛОСКОСТЬ

Плоскость является простейшей поверхностью.

4.1. Способы задания плоскости на комплексном чертеже

На комплексном чертеже плоскость может быть задана проекциями элементов своего определителя.

Определителем плоскости ∑(Г,А) называется совокупность геометрических элементов Г, А, однозначно задающих закон образования плоскости в пространстве.

Плоскости могут быть заданы следующими определителями.

1. Проекциями трех точек, не лежащих на одной прямой ∑(A,B,C) (рис. 31).
2. Проекциями прямой и не принадлежащей ей точки ∑(*l*,A) (рис. 32).
3. Проекциями двух параллельных прямых ∑ (a||b) (рис. 33).

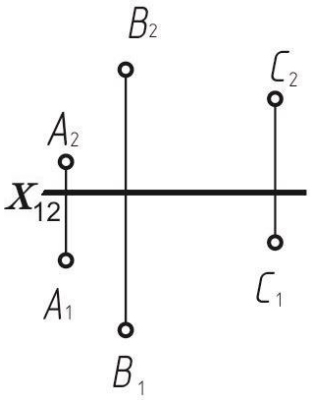


Рис. 31

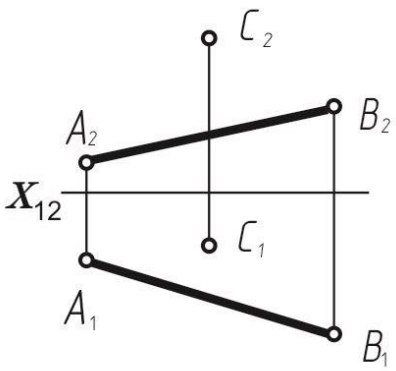


Рис. 32

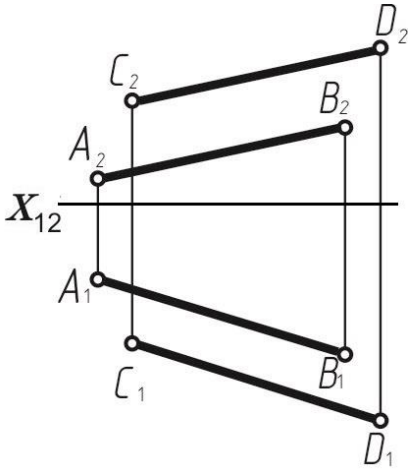


Рис. 33

4. Проекциями двух пересекающихся прямых ∑ (a∩b) (рис. 34).
5. Проекциями плоской фигуры, например треугольника ∑ (ΔABC) (рис. 35).

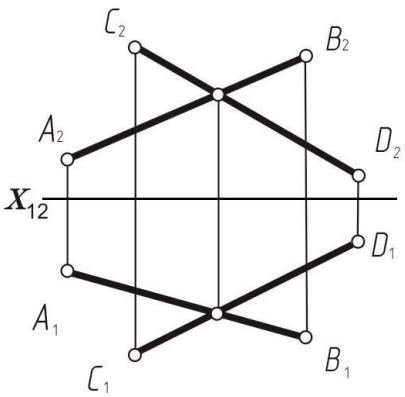


Рис. 34

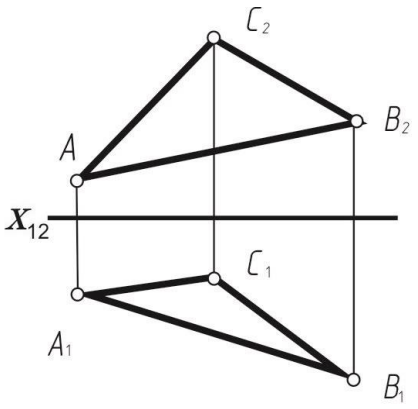


Рис. 35

6. Следами плоскости $\sum(\Sigma_{П1}, \Sigma_{П2})$. *Следом плоскости называется прямая пересечения плоскости с плоскостью проекций.* След плоскости является геометрическим местом одноименных с ним следов прямых, принадлежащих плоскости.

Всегда можно перейти от одного способа задания плоскости к другому.

Каждый след плоскости совпадает со своей одноименной проекцией, а две другие его проекции лежат на координатных осях. Например, горизонтальный след плоскости совпадает со своей горизонтальной проекцией, его фронтальная проекция находится на оси ***X***, а профильная – на оси ***Y*** (рис. 36).

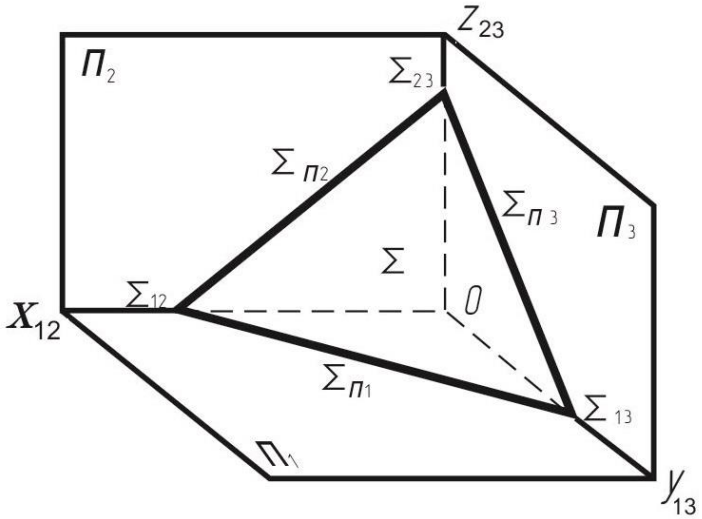


Рис. 36

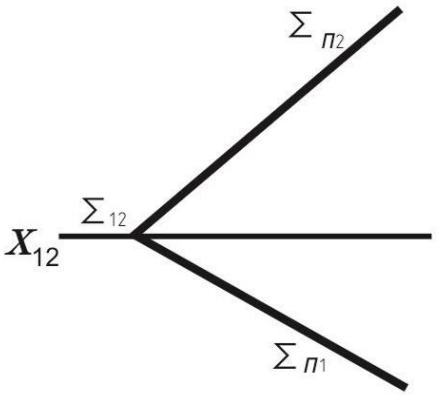


Рис. 37

На комплексном чертеже (рис. 37) плоскость $\sum$ задана проекциями ее следов. Следы плоскости Σ обозначают: $\Sigma_{П1}$ – горизонтальный след; $\Sigma_{П2}$ – фронтальный след; $\Sigma_{П3}$ – профильный след.

Точками схода следов называют точки Σ_{12}, Σ_{23}, Σ_{13}, в которых пересекаются два следа. Точки схода следов всегда располагаются на соответствующих координатных осях.

Пример 1. Построить следы плоскости $\sum$, заданной двумя пересекающимися прямыми ***a*** и ***b***.

Решение. Для построения фронтального следа плоскости $\Sigma_{П2}$ достаточно найти две принадлежащие ему точки F_a и F_b – два одноименных с ним следа прямых ***a*** и ***b***. Проведя через эти точки прямую, получаем след плоскости $\Sigma_{П2}$ и точку схода следов Σ_{12} (рис. 38). Одной точкой, принадлежащей горизонтальному следу плоскости $\Sigma_{П1}$, будет являться точка схода следов плоскости Σ_{12}, другой точкой – горизонтальный след одной из прямых, например H_b.

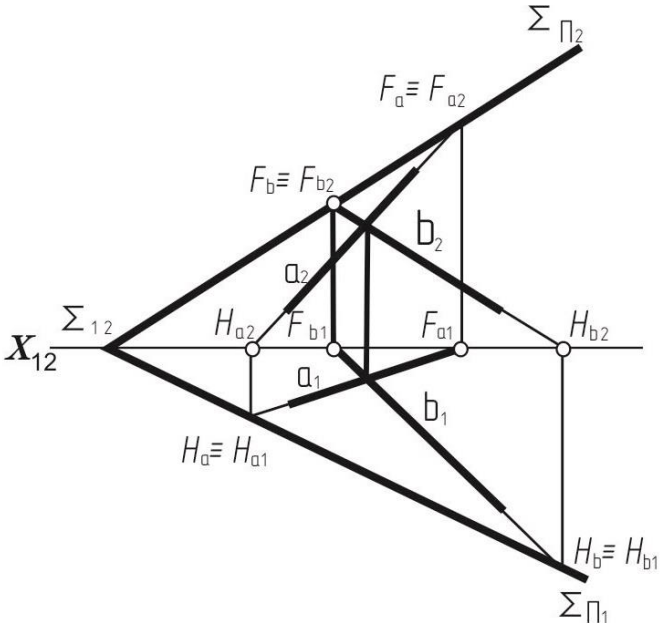


Рис. 38

4.2. Положения плоскости в пространстве

В зависимости от положения плоскости относительно плоскостей проекций различают:

- плоскости общего положения;
- проецирующие плоскости;
- плоскости уровня.

4.2.1. Плоскости общего положения

Плоскости общего положения – плоскости, не перпендикулярные ни к одной из плоскостей проекций (рис. 39).

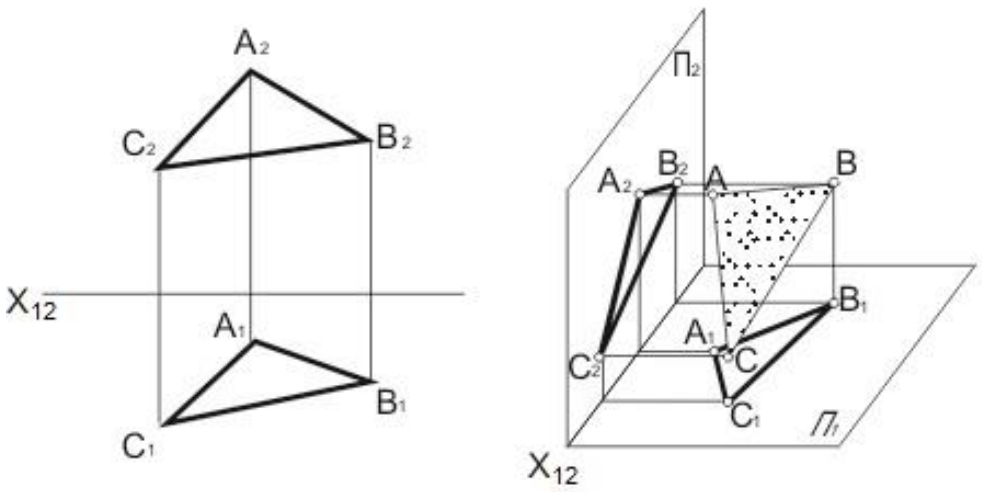


Рис. 39

4.2.2. Плоскости уровня

Плоскости уровня – плоскости, параллельные одной из плоскостей проекций. Характерной особенностью плоскости уровня является то, что любые геометрические фигуры, лежащие в ней, проецируются на параллельную ей плоскость проекций без искажения, а на перпендикулярные ей плоскости проекций – отрезками прямой линии.

Горизонтальная плоскость – плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций **Π_1**(рис. 40, 41).

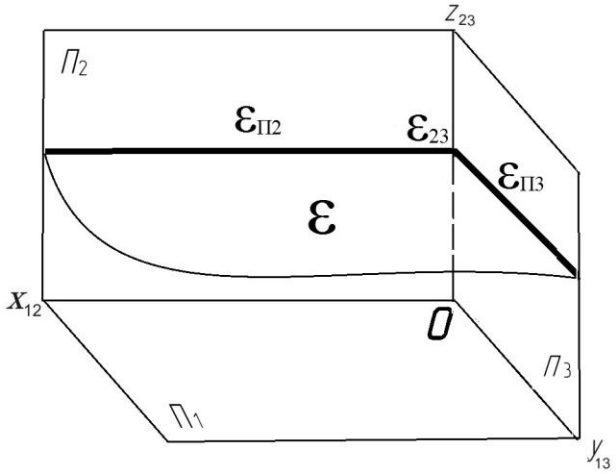


Рис. 40

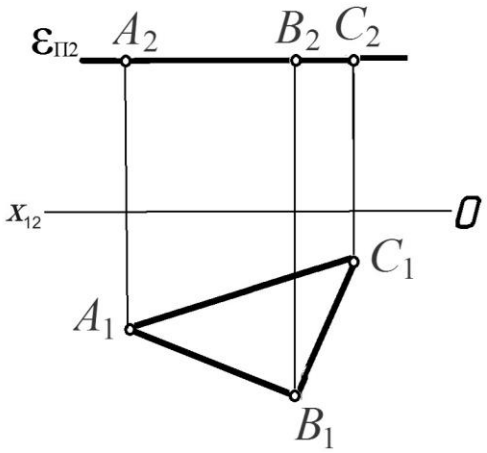


Рис. 41

Фронтальная плоскость – плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций **Π_2**(рис. 42 ,43).

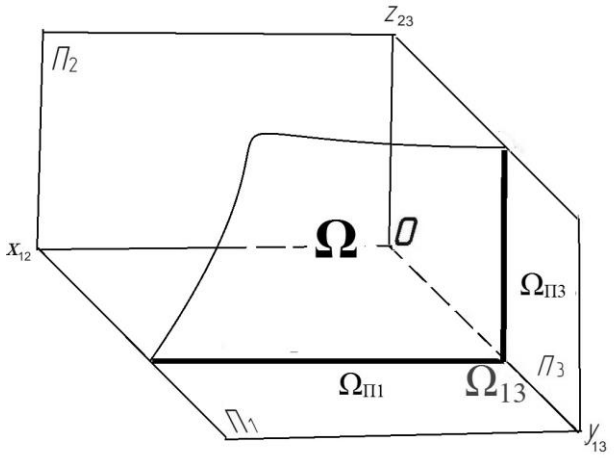


Рис. 42

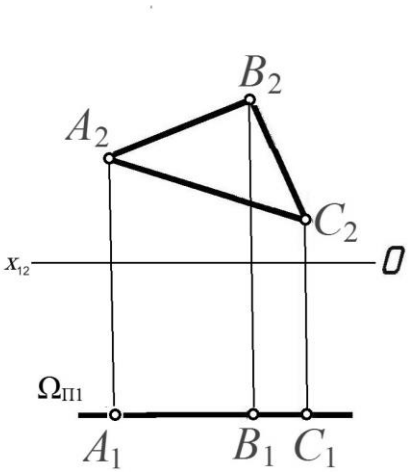


Рис. 43

Профильная плоскость – плоскость, параллельная профильной плоскости проекций **Π_3**(рис. 44, 45).

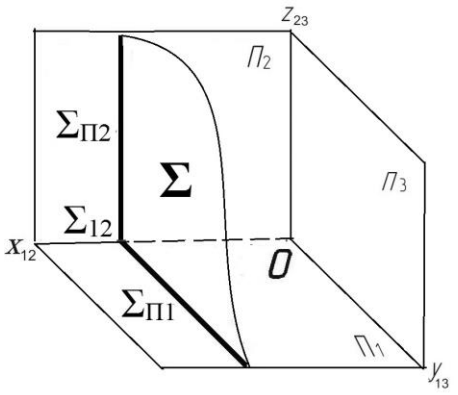


Рис. 44

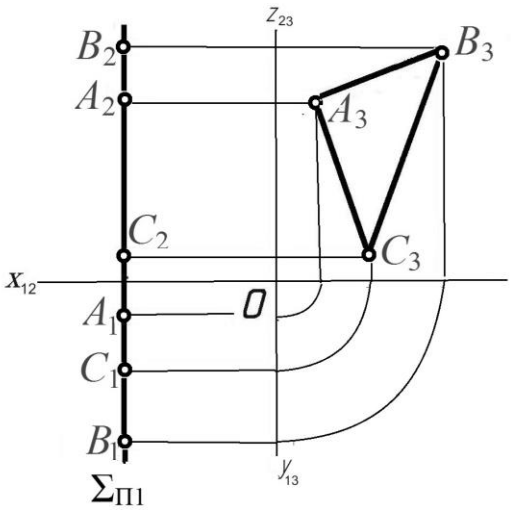


Рис. 45

4.2.3. Проецирующие плоскости

Проецирующие плоскости – плоскости, перпендикулярные лишь к одной из плоскостей проекций. Характерной особенностью проецирующей плоскости является то, что любые геометрические фигуры, лежащие в ней, проецируются на перпендикулярную ей плоскость проекций в виде прямых линий (рис. 46–51).

Угол φ между проецирующей плоскостью и каждой из двух не перпендикулярных к ней плоскостей проекций проецируется на перпендикулярную к ней плоскость проекций без искажения.

Горизонтально проецирующая плоскость – плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций $\mathbf{П_1}$ (рис. 45, 46).

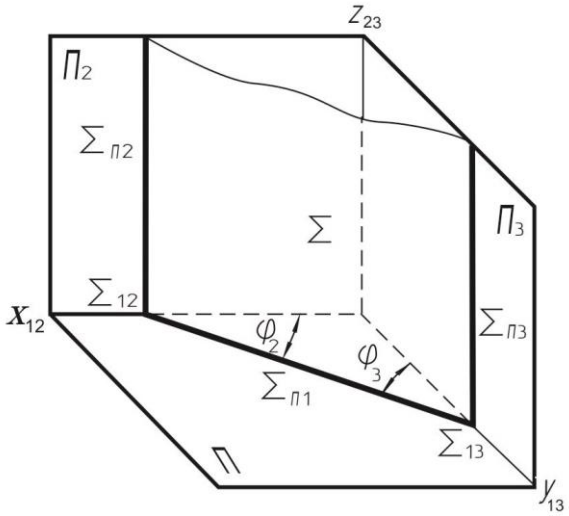


Рис. 46

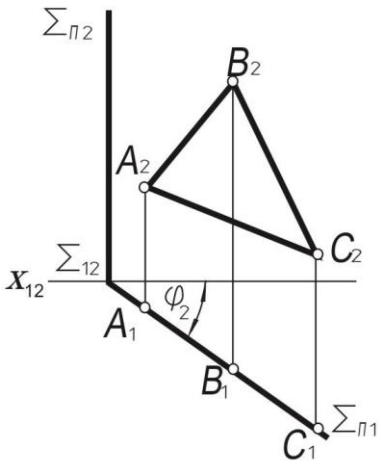


Рис. 47

Фронтально проецирующая плоскость – плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций $\mathbf{П_2}$ (рис. 48, 49).

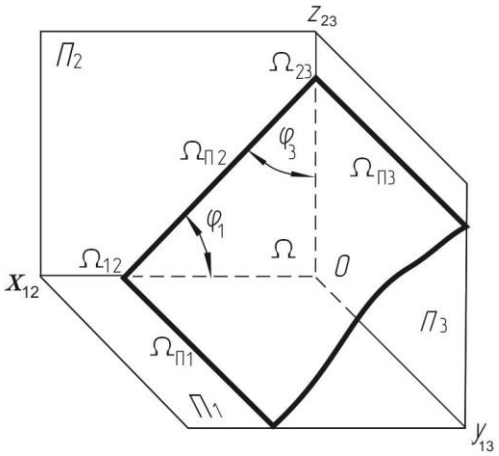


Рис. 48

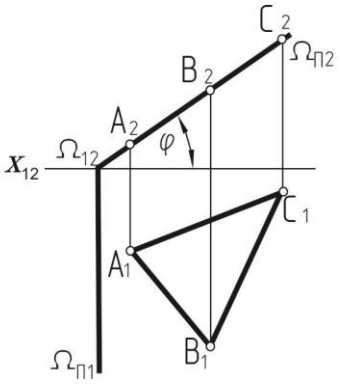


Рис. 49

Профильно проецирующая плоскость – плоскость, перпендикулярная профильной плоскости проекций $\mathbf{П_3}$(рис. 50, 51).

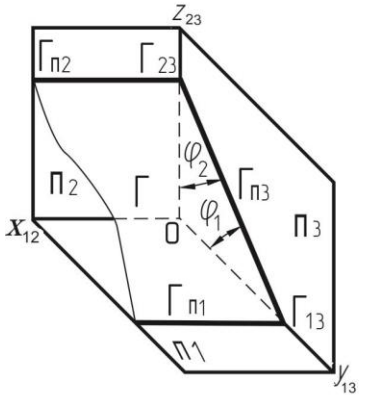


Рис. 50

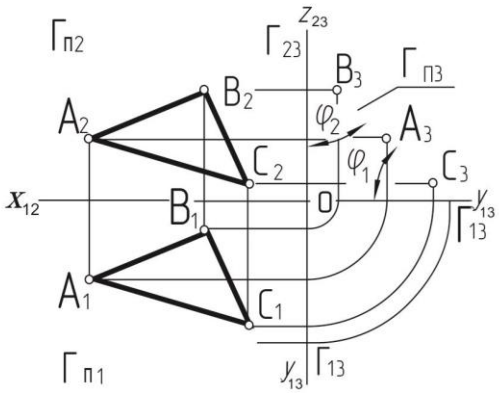


Рис. 51

4.3. Прямая и точка в плоскости

Точка принадлежит плоскости, если ее проекции принадлежат одноименным проекциям прямой этой плоскости. В плоскости через точку можно провести множество прямых.

Построение прямой, принадлежащей данной плоскости, основано на известных положениях геометрии.

1. Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки, принадлежащие данной плоскости (рис. 52).

2. Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через точку, принадлежащую данной плоскости, и параллельна прямой, лежащей в этой плоскости или ей параллельной (рис. 53).

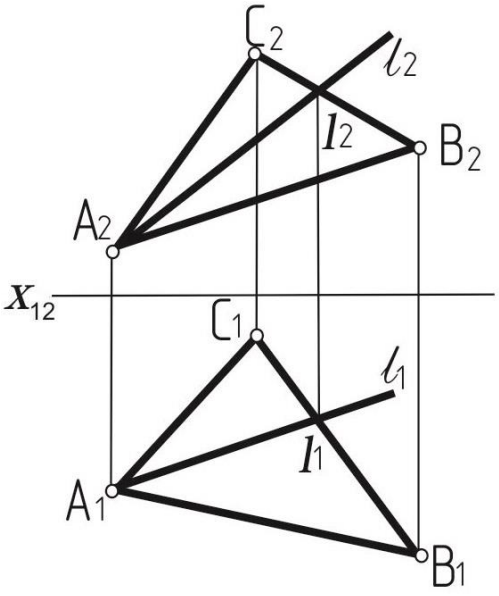


Рис. 52

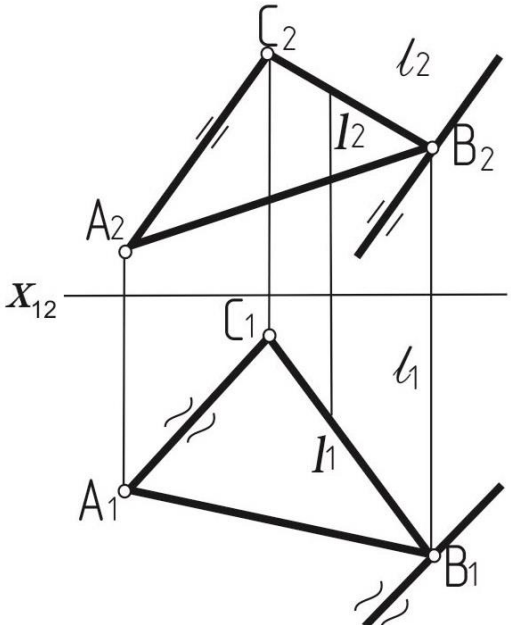


Рис. 53

4.4. Главные линии плоскости

К главным линиям плоскости относятся:

- горизонталь;
- фронталь;
- линия наибольшего ската;
- линия наибольшего наклона.

Горизонталь плоскости – прямая, лежащая в плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций **П₁** (рис. 54).

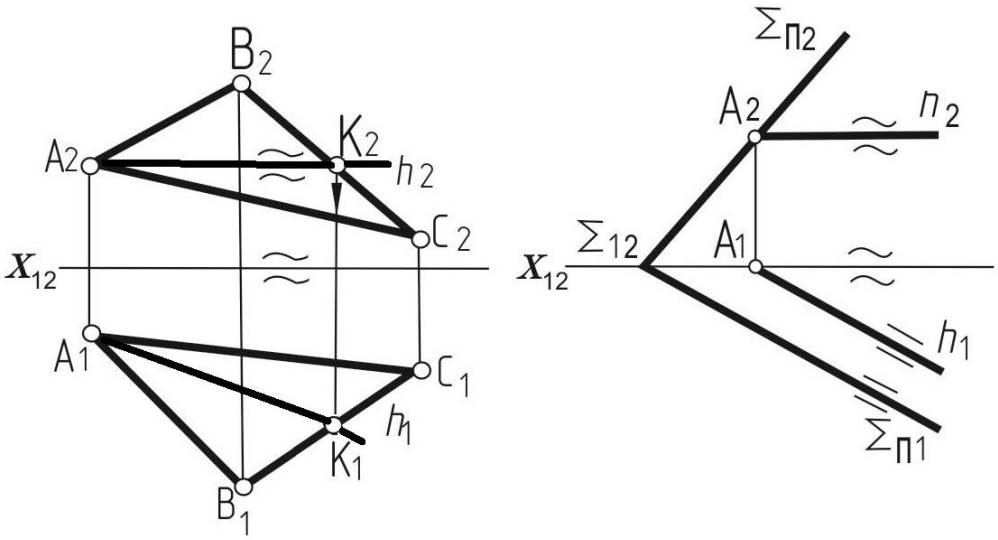


Рис. 54

Фронталь плоскости – прямая, лежащая в плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций $\mathbf{П_2}$ (рис. 55).

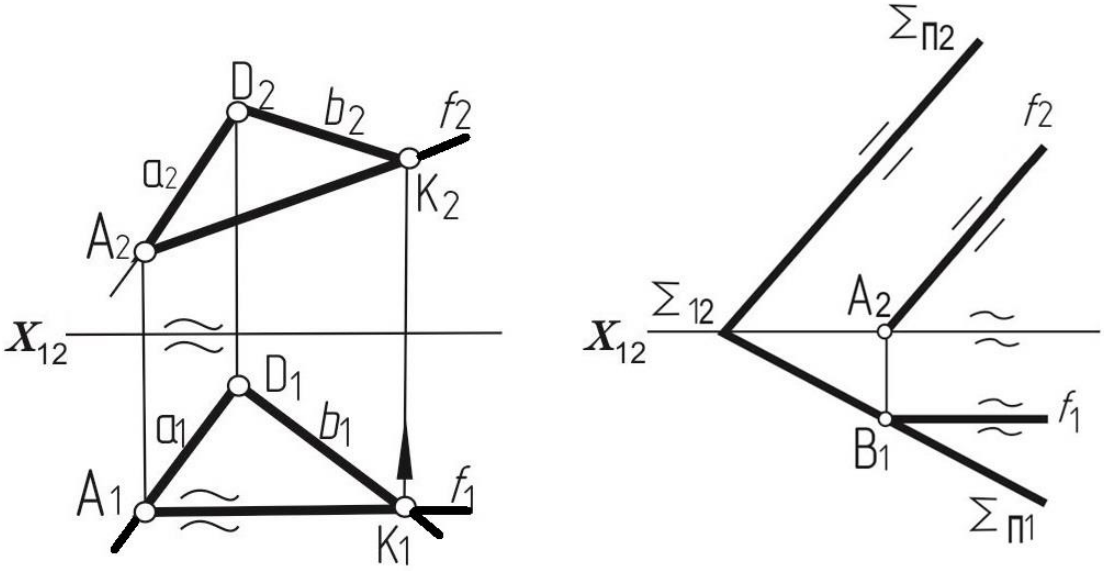


Рис. 55

Все горизонтали плоскости параллельны между собой, все фронтали плоскости также параллельны друг другу.

Линия наибольшего ската (ЛНС) – это прямая, перпендикулярная к горизонтали плоскости и составляющая максимальный угол с плоскостью $\mathbf{П_1}$ (рис. 56).

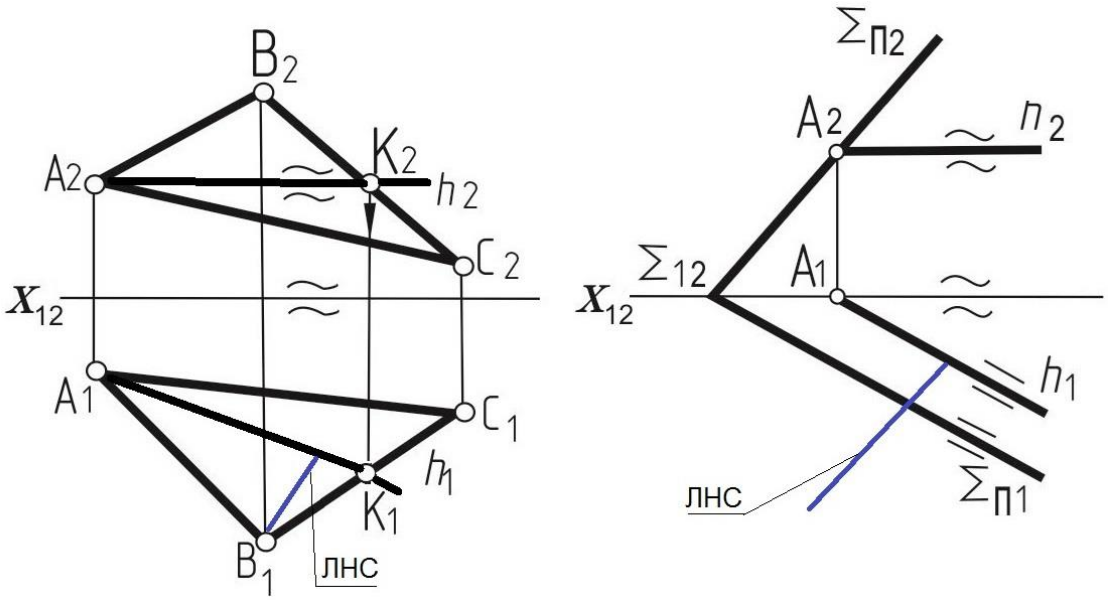


Рис. 56

Линия наибольшего наклона (ЛНН) – это прямая, перпендикулярная к фронтали плоскости и составляющая максимальный угол с плоскостью $\mathbf{П_2}$ (рис. 57).

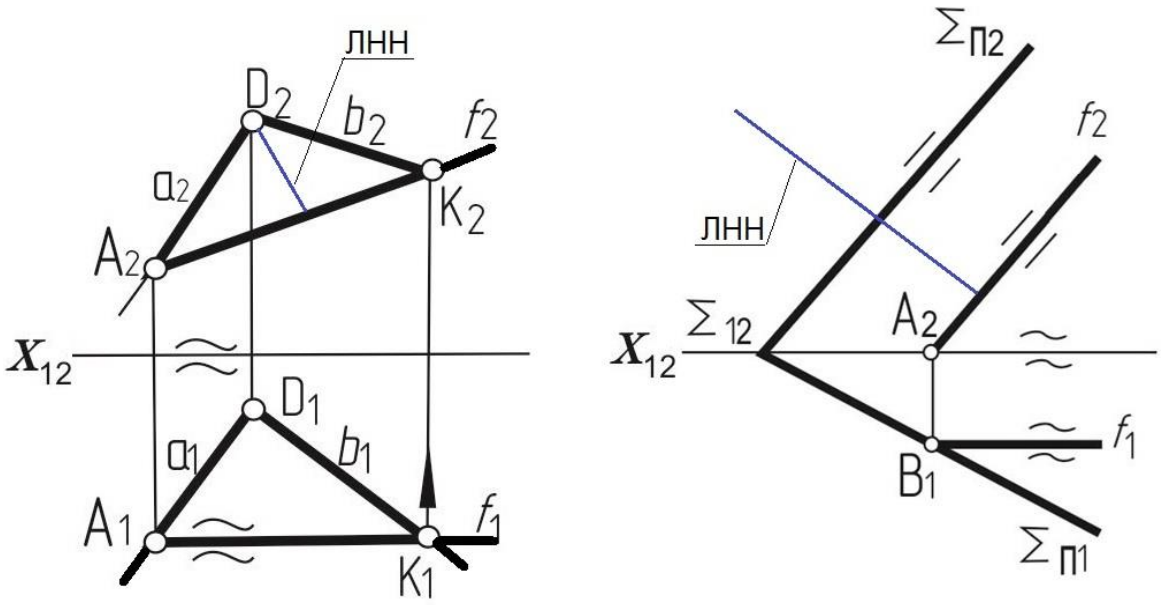


Рис. 57

ГЛАВА 5. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА

Решение задач начертательной геометрии значительно упрощается в случае частного положения геометрических объектов относительно плоскости проекций. Например, наиболее выгодным частным положением прямой линии и плоской фигуры следует считать:

а) положение, перпендикулярное к плоскости проекций;

б) положение, параллельное плоскости проекций.

Перевод геометрического объекта из общего положения в частное можно осуществлять изменением взаимного положения объекта и плоскостей проекций. Это достигается:

– перемещением в пространстве плоскостей проекций относительно неподвижного геометрического объекта;

– перемещением в пространстве геометрического объекта относительно неподвижных плоскостей проекций.

При решении задач начертательной геометрии используются разные способы преобразования комплексного чертежа. Из них рассмотрим способ замены плоскостей проекций и способ вращения.

5.1. Способ замены плоскостей проекций

Сущность способа замены плоскостей проекций заключается в том, что одну из заданных плоскостей проекций заменяют на новую, которая в совокупности с незаменяемой плоскостью образует новую ортогональную систему плоскостей проекций. При этом положение заданного геометрического объекта в пространстве не меняется. Новую плоскость вводят так, чтобы относительно нее один из элементов геометрического объекта занял частное положение.

При решении задач выполняют одну или последовательно две замены плоскостей проекций.

5.1.1. Замена одной плоскости проекций

Преобразование проекций геометрического объекта, выполняемое способом замены плоскостей проекций, связано с преобразованием проекций принадлежащих ей точек. Поэтому рассмотрим, как изменяются проекции отдельной точки при переходе от одной системы ортогональных проекций к другой.

Пусть в системе плоскостей проекций $\mathbf{П_1}$ — $\mathbf{П_2}$ дана точка A и указаны ее проекции A_1 и A_2 (рис. 58). В произвольном месте введем новую плоскость проекций $\mathbf{П_4}$, перпендикулярную горизонтальной плоскости проекций и

пересекающую ее по оси X_{14}. В системе плоскостей проекций $П_1$ — $П_4$ горизонтальная проекция точки A (A_1) осталась неизменной. Из рис. 58 видно, что на одинаковом расстоянии от $П_1$ находятся точка A и ее проекции на плоскости $П_2$ (A_2) и $П_4$ (A_4): $AA_1=A_2A_{12}=A_4A_{14}$.

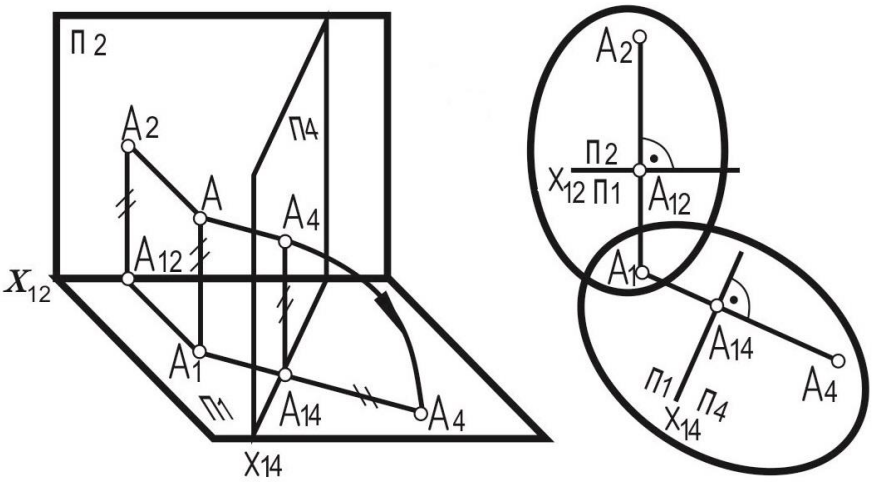


Рис. 58

Это условие позволяет просто найти фронтальную проекцию точки A_4 в системе плоскостей $П_1$ — $П_4$. Для этого через горизонтальную проекцию точки A_1 проводим линию связи, перпендикулярную новой оси X_{14}, и от точки пересечения ее с осью откладываем отрезок A_4A_{14}, равный расстоянию от проекции A_2 точки до оси X (рис. 58).

Пример 1. Определить натуральную величину отрезка AB и φ – угол его наклона к горизонтальной плоскости проекций (рис. 59).

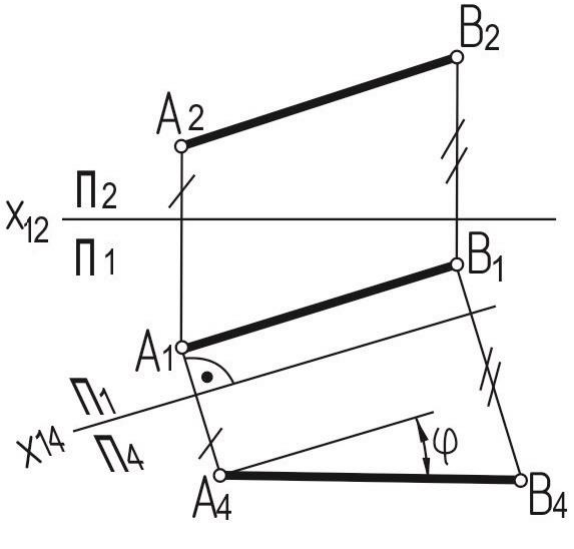


Рис. 59

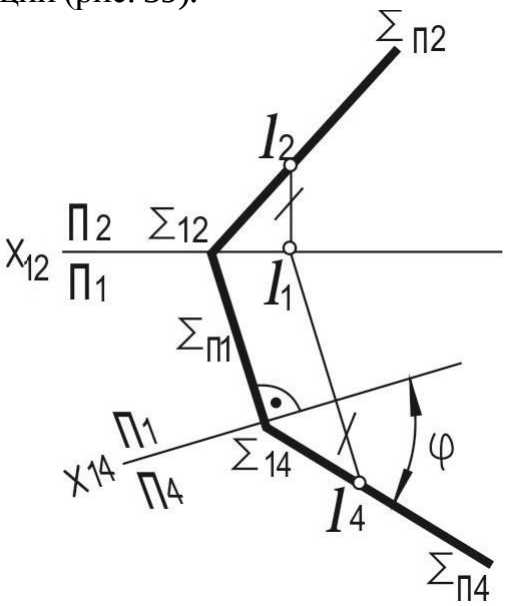


Рис. 60

Р е ш е н и е . Если прямая параллельна плоскости проекций, то она проецируется на нее без искажения. Поэтому новую плоскость Π_4 расположим параллельно отрезку прямой AB и перпендикулярно плоскости Π_1. В системе плоскостей Π_1 — Π_4 проекция A_4B_4 определит натуральную величину отрезка AB, а угол φ – угол наклона отрезка AB к горизонтальной плоскости проекций.

Пример 2. Определить угол φ наклона плоскости Σ к горизонтальной плоскости проекций (рис. 60).

Р е ш е н и е . Введем новую плоскость Π_4 так, чтобы в системе плоскостей Π_1 — Π_4 плоскость Σ стала фронтально проецирующей. Плоскость Π_4 расположим перпендикулярно к плоскостям Σ и Π_1. В плоскости Σ на ее фронтальном следе возьмем точку 1. В системе плоскостей Π_1 — Π_4 сначала найдем новую фронтальную проекцию точки 1_4, а потом и сам след $\Sigma_{\Pi 4}$. Угол φ определяет угол наклона плоскости Σ к горизонтальной плоскости проекций.

5.1.2. Замена двух плоскостей проекций

Изменение проекций точки A в процессе последовательной замены двух плоскостей проекций показано на рис. 61.

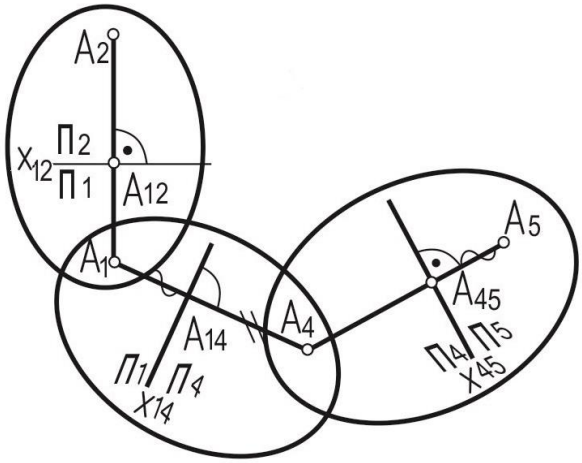


Рис. 61

Сначала заменяем плоскость проекций Π_2 на Π_4 – образуем систему плоскостей Π_1 — Π_4, затем заменяем плоскость проекций Π_1 на Π_4 – образуем систему плоскостей Π_4 — Π_5. Положение осей X_{14} и X_{45} выбрано произвольно.

Из анализа построений, выполненных на рис. 61, видно, что:

а) новая плоскость проекций перпендикулярна оставшейся плоскости проекций;

б) расстояние от новой проекции точки до новой оси координат равно расстоянию от заменяемой проекции точки до предыдущей оси координат.

Пример 3. Преобразовать чертеж так, чтобы отрезок ***AB*** прямой общего положения в новой системе плоскостей проекций стал проецирующим (рис. 62).

Р е ш е н и е. Требуется введение двух новых плоскостей проекций: первой $\mathbf{П_5}$ – параллельно отрезку ***AB***, второй $\mathbf{П_6}$ – перпендикулярно ему. В системе плоскостей $\mathbf{П_5}$ — $\mathbf{П_6}$ отрезок ***AB*** параллелен плоскости $\mathbf{П_5}$, поэтому на нее проецируется без искажения отрезок и угол его наклона к фронтальной плоскости проекций.

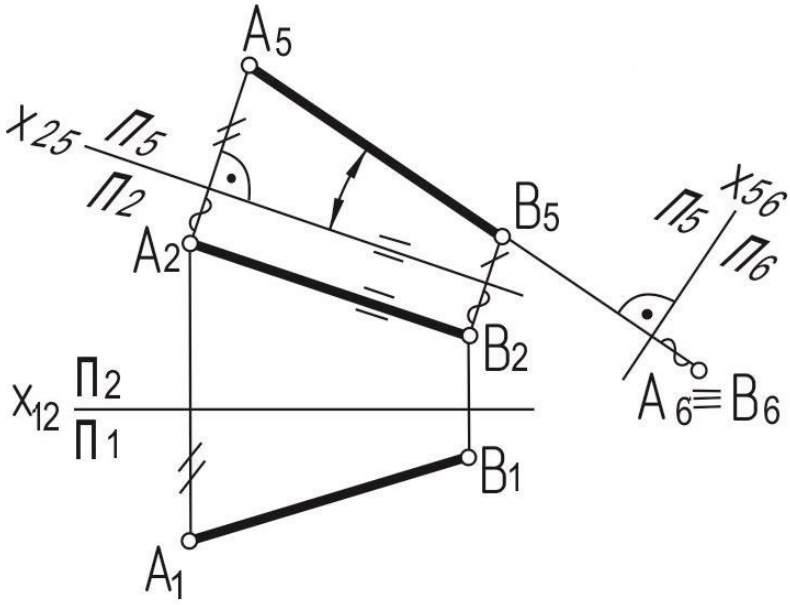


Рис. 62

В системе плоскостей $\mathbf{П_5}$ — $\mathbf{П_6}$ отрезок ***AB*** стал проецирующим относительно плоскости $\mathbf{П_6}$.

Пример 4. Определить натуральную величину треугольника ***ABC*** (рис. 63).

Р е ш е н и е. Необходимо преобразовать чертеж так, чтобы плоскость треугольника стала параллельна одной из плоскостей проекций. Тогда треугольник проецируется на нее без искажения. Для этого необходимо последовательно сделать две замены плоскостей проекций.

Первая замена. Переведем плоскость треугольника ***ABC*** в проецирующее положение. Введем плоскость проекций $\mathbf{П_4}$, перпендикулярную плоскости проекций $\mathbf{П_1}$ и плоскости треугольника ***ABC.*** Новую ось $\boldsymbol{X_{14}}$ строим перпендикулярно горизонтали плоскости треугольника ***ABC.*** В системе плоскостей $\mathbf{П_1}$ — $\mathbf{П_4}$ находим проекции вершин треугольника $\boldsymbol{A_4}$, $\boldsymbol{B_4}$, $\boldsymbol{C_4}$. Плоскость треугольника ***ABC*** проецируется на плоскость $\mathbf{П_4}$ в виде прямой

линии. Угол φ определяет угол наклона плоскости треугольника к горизонтальной плоскости проекций.

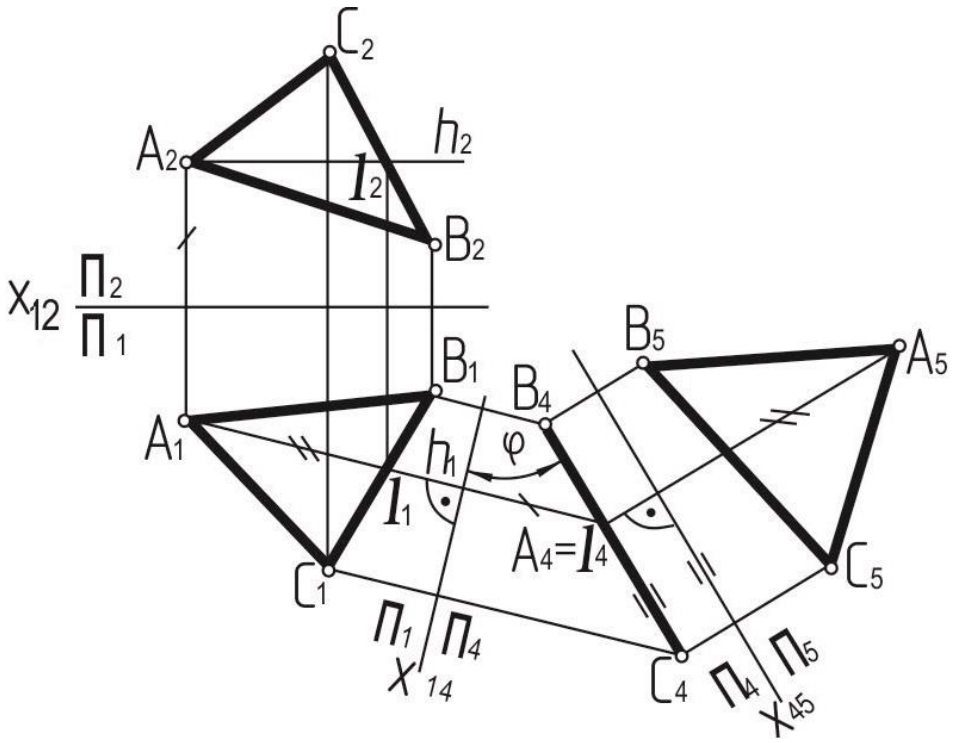


Рис. 63

Вторая замена. Переведем плоскость треугольника ***ABC*** из проецирующего положения в положение плоскости уровня. Для этого введем дополнительную плоскость проекций $\mathbf{П_5}$, параллельную плоскости треугольника ***ABC*** и перпендикулярную плоскости $\boldsymbol{П_4}$. Новую ось $\boldsymbol{X_{45}}$ строим параллельно плоскости треугольника ($\boldsymbol{X_{45}} \| \boldsymbol{B_4C_4}$). В системе плоскостей $\mathbf{П_4}$ — $\mathbf{П_5}$ треугольник ***ABC*** проецируется на плоскость проекций $\mathbf{П_5}$ в натуральную величину.

5.2. Способ вращения

Сущность способа вращения заключается в том, что геометрический объект приводится в частное положение относительно неизменной системы основных плоскостей проекций путем вращения вокруг некоторой оси.

5.2.1. Способ вращения вокруг линии уровня

Способ вращения вокруг линии уровня удобно использовать для определения натуральной величины плоской фигуры. Сущность этого способа в том, что плоскую фигуру вращают вокруг ее линии уровня (горизонтали или фронтали) до положения, параллельного соответствующей плоскости проекций. При этом плоская фигура на эту плоскость проекций проецируется без искажения.

Пример 5. Определить натуральный вид треугольника ***ABC*** способом вращения вокруг линии уровня (рис. 64).

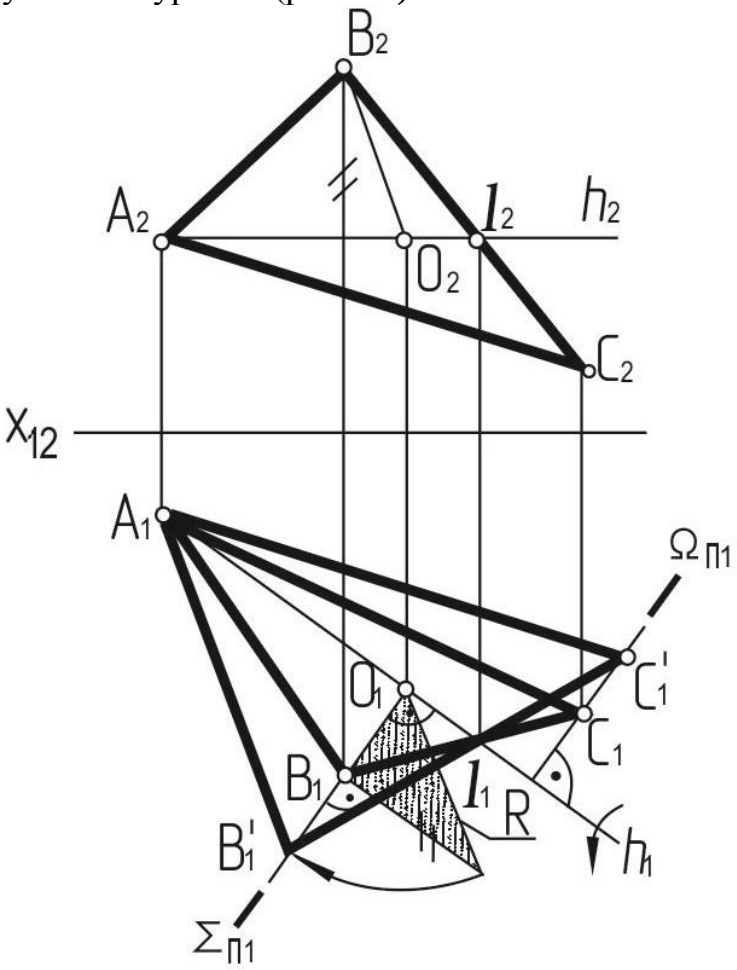


Рис. 64

Р е ш е н и е . Повернем плоскость треугольника вокруг принадлежащей ей горизонтали ***h*** так, чтобы плоскость заняла положение, параллельное горизонтальной плоскости проекций. В этом случае треугольник проецируется на горизонтальную плоскость проекций без искажения, а на фронтальную – в виде прямой, совпадающей с проекцией горизонтали h_2.

Точки ***A*** и ***1*** принадлежат оси вращения ***h***, поэтому при вращении треугольника они не меняют своего положения. Точки ***B*** и ***C*** будут вращаться соответственно в горизонтально проецирующих плоскостях **Σ** и **Ω**, перпендикулярных к оси вращения ***h***. Точку ***O*** – центр вращения точки ***B*** найдем в пересечении оси вращения ***h*** с плоскостью вращения **Σ**. Натуральную величину радиуса вращения *R* точки *B* определим способом прямоугольного треугольника.

Новую горизонтальную проекцию точки B'_1 найдем в пересечении дуги окружности радиуса *R*, проведенной из центра O_1 и горизонтального следа плоскости $\Sigma_{П1}$. Точка C'_1 одновременно принадлежит и прямой $B'_1 1'$ и следу плоскости $\Omega_{П1}$, т.е. находится в точке их пересечения.

5.2.2. Способ вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций

При вращении геометрической фигуры вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций, каждая ее точка перемещается по дуге окружности, плоскость которой является соответствующей плоскостью уровня. При этом одна проекция точки перемещается по дуге окружности, другая – по прямой, параллельной оси **X**.

Пример 6. Определить натуральную величину отрезка ***AB*** и угол его наклона к горизонтальной плоскости проекций (рис. 65).

Р е ш е н и е . Вращая отрезок ***AB*** вокруг оси ***i***, перпендикулярной плоскости $\mathbf{П_1}$, переведем его в положение, параллельное плоскости $\boldsymbol{П_2}$. При этом на плоскость $\mathbf{П_2}$ проецируется без искажения отрезок ***AB*** и угол $\boldsymbol{\varphi}$ – угол наклона отрезка к горизонтальной плоскости проекций. Для упрощения геометрических построений ось вращения ***i*** проведем через одну из концевых точек отрезка, например через точку ***A***.

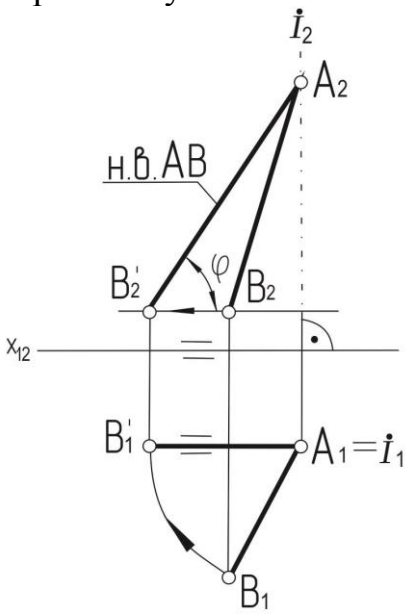


Рис. 65

При вращении отрезка ***AB*** точка ***A*** не меняет своего положения, так как принадлежит оси вращения ***i***. Точку ***B*** перемещаем по дуге окружности так, чтобы отрезок ***AB*** стал параллелен плоскости $\boldsymbol{П_2}$. Для этого точку $\boldsymbol{B_1}$ повернем вокруг оси ***i*** так, чтобы проекция отрезка $\boldsymbol{A_1B_1'}$ заняла положение, параллельное оси ***X***. Фронтальную проекцию $\boldsymbol{B_2'}$ найдем в пересечении следа плоскости ее вращения и линии связи, проведенной из точки $\boldsymbol{B_1'}$.

Пример 7. Вращением вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций, перевести плоскость треугольника ***ABC*** во фронтально проецирующее положение (рис. 66).

Р е ш е н и е . Если плоскость треугольника ***ABC*** занимает фронтально проецирующее положение, то треугольник проецируется на фронтальную плоскость проекций в виде прямой линии. Горизонталь фронтально проецирующей плоскости проецируется на плоскость Π_1 без искажения. Горизонтальная проекция горизонтали перпендикулярна к оси ***X***, а ее фронтальная проекция вырождается в точку.

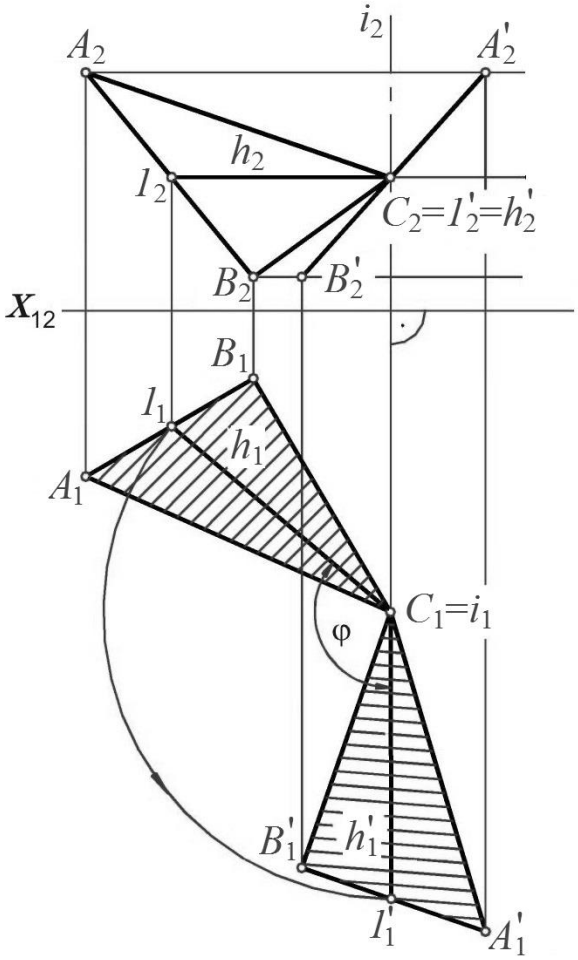


Рис. 66

В плоскости треугольника построим горизонталь ***h*** и пересекающую ее ось вращения ***i*** (***i***$\perp\Pi_1$). Вращением на угол ***φ*** вокруг оси ***i*** переведем горизонталь ***h*** в положение, перпендикулярное плоскости Π_2 (***h***$\perp\Pi_2$). На тот же угол ***φ*** повернем точки A_1' и B_1' . Точка ***C*** не изменяет своего положения в пространстве, так как принадлежит оси вращения. При вращении горизонтальная проекция треугольника ***ABC*** сохраняет свой вид и величину, изменяется лишь ее положение.

Фронтальную проекцию треугольника $A_2'B_2'C_2$ найдем, зная, что при вращении треугольника вокруг оси ***i*** принадлежащие ему точки вращаются в горизонтальных плоскостях уровня. Поэтому фронтальные проекции точек перемещаются по прямой, параллельной оси ***X***.

ГЛАВА 6. ПОВЕРХНОСТЬ

Поверхности являются самым сложным геометрическим объектом, изучаемым начертательной геометрией и инженерной графикой. Мир поверхностей безграничен. Он простирается от простейшей плоскости до причудливых поверхностей, используемых в архитектуре и скульптуре, от элементарного цилиндра до сложнейших по форме деталей авиадвигателя.

6.1. Основные понятия и определения

Поверхность как объект инженерного исследования может быть задана следующими основными способами: а) уравнением; б) каркасом; в) определителем; г) очерком.

Составлением уравнений поверхностей занимается аналитическая геометрия; она рассматривает поверхность как множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению вида $F(x,y,z) = 0$.

В начертательной геометрии поверхность на чертеже задается каркасом, определителем, очерком.

Каркасом поверхности называется совокупность некоторого количества линий, принадлежащих поверхности. В качестве линий, образующих каркас, как правило, берут семейство линий, получающихся при пересечении поверхности рядом параллельных плоскостей. Этот способ используется при проектировании кузовов автомобилей, в самолето- и судостроении, в топографии и т.п.

Поверхность, образованная движущейся в пространстве линией, на чертеже может быть задана определителем поверхности.

Определителем поверхности называется совокупность геометрических объектов и связей между ними, позволяющих однозначно образовать поверхность в пространстве и задать ее на чертеже.

Способ образования поверхности движущейся в пространстве линией называют *кинематическим*.

Линию, образующую при своем движении в пространстве данную поверхность, называют *образующей (производящей)*. Образующая при своем движении может изменять свою форму или оставаться неизменной. Закон перемещения образующей можно, в частности, задать неподвижными линиями, на которые при своем движении опирается образующая. Эти линии называются *направляющими*.

На чертеже при задании поверхности ее определителем строятся проекции направляющих линий, указывается, как находятся проекции образующей линии. Построив ряд положений образующей линии, получим каркас поверхности. Пример образования поверхности кинематическим способом показан на рис. 67.

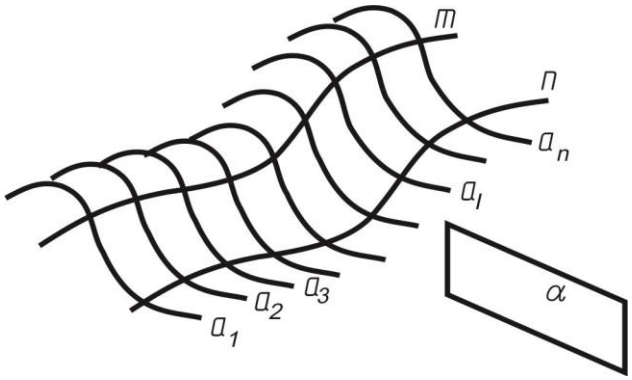


Рис. 67

В качестве образующей ***а*** этой поверхности взята плоская кривая. Закон перемещения образующей задан двумя направляющими ***m*** и ***n*** и плоскостью ***α***. Образующая ***а*** скользит по направляющим, все время оставаясь параллельной плоскости ***α***.

Определитель имеет следующую форму записи ***Ф(Г)***, где ***Ф*** – обозначение поверхности; ***(Г)*** – геометрическая часть определителя, в ней перечисляются все геометрические элементы, участвующие в образовании поверхности и задании ее на чертеже.

Определитель поверхности выявляется путем анализа способов образования поверхности или ее основных свойств. В общем случае одна и та же поверхность может быть образована несколькими способами, поэтому может иметь несколько определителей. Обычно из всех способов образования поверхности выбирают простейший.

Задание поверхности на чертеже каркасом или определителем не всегда обеспечивает наглядность ее изображения. В некоторых случаях поверхность целесообразнее задавать ее очерком. *Очерком поверхности* называется проекция проецирующей цилиндрической поверхности, огибающей заданную поверхность.

По известному уравнению поверхности или ее определителю, или очерку всегда можно построить каркас поверхности. Для поверхностей, образованных кинематическим способом, в основу систематизации положен их определитель.

В зависимости от вида образующей поверхности разделяются на два класса:

класс 1 – поверхности *линейчатые* (образующая – прямая линия);

класс 2 – поверхности *нелинейчатые* (образующая – кривая линия).

Условно все поверхности в начертательной геометрии разделены на 5 групп:

1) линейчатые поверхности;

2) винтовые поверхности;

3) поверхности вращения;

4) циклические поверхности;
5) графические поверхности.

6.2. Поверхности линейчатые

Линейчатые поверхности образуются движением прямой (образующей) по некоторой направляющей, которая может быть прямой, ломаной или кривой линией.

6.2.1. Линейчатые поверхности с одной направляющей

Данные поверхности образуются движением прямой образующей, один конец которой проходит через неподвижную точку ***S***, а второй – перемещается по направляющей ***m***. В зависимости от того, какой линией является направляющая, образуется тот или иной вид поверхности.

Определитель такой поверхности имеет вид: **Σ (*S*, *m*)**, где ***S*** – конечная точка; ***m*** – направляющая.

К ним относятся следующие поверхности.

1. *Поверхность с ребром возврата.* Эта поверхность образуется движением прямолинейной образующей, во всех своих положениях касательной к пространственной кривой, называемой ребром возврата.

2. *Коническая поверхность.* Эта поверхность образуется движением прямолинейной образующей, скользящей по кривой, направляющей ***m*** и проходящей во всех своих положениях через одну и ту же неподвижную точку ***S*** (рис. 68).

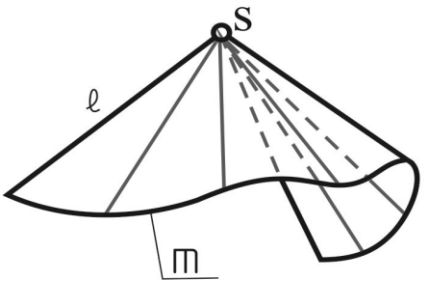


Рис. 68

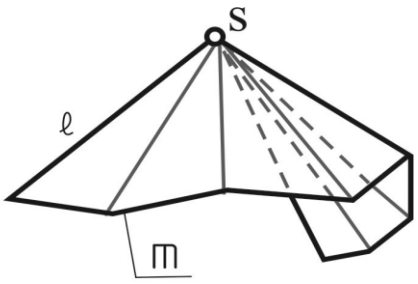


Рис. 69

3. *Пирамидальная поверхность.* Эта поверхность образуется движением прямолинейной образующей, скользящей по ломаной направляющей ***m*** и проходящей во всех своих положениях через одну и ту же неподвижную точку ***S*** (рис. 69).

4. *Цилиндрическая поверхность.* Данная поверхность образуется движением прямолинейной образующей ***ℓ***, по криволинейной направляющей ***m***, при условии, что S^{∞} бесконечно удалена (т.е. все образующие двигаются относительно друг друга параллельно) (рис. 70).

5. *Призматическая поверхность.* Эта поверхность образуется движением прямолинейной образующей, скользящей по ломаной направляющей ***m*** и проходящей во всех своих положениях через одну и ту же неподвижную точку S^{∞} (рис. 71).

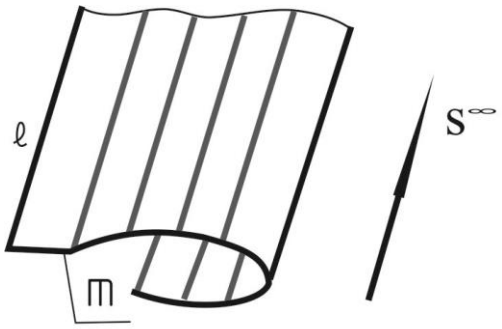


Рис. 70

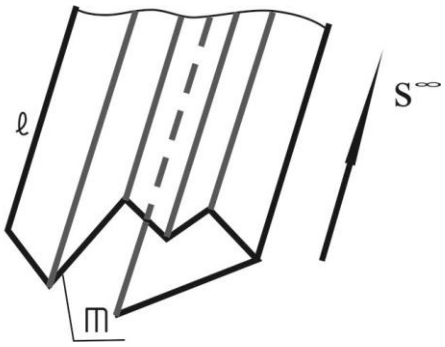


Рис. 71

6.2.2. Линейчатые поверхности с двумя направляющими и плоскостью параллелизма (поверхности Каталана)

Поверхности данной группы образуются при движении в пространстве прямой образующей ***ℓ*** по двум направляющим ***m*** и ***n***.

В этом случае необходимо добавить условие, которое должна выполнять прямолинейная образующая в процессе своего движения. Чаще всего в качестве такого условия применяется условие параллельности образующей ***l*** некоторой плоскости ***Г*** (рис. 72).

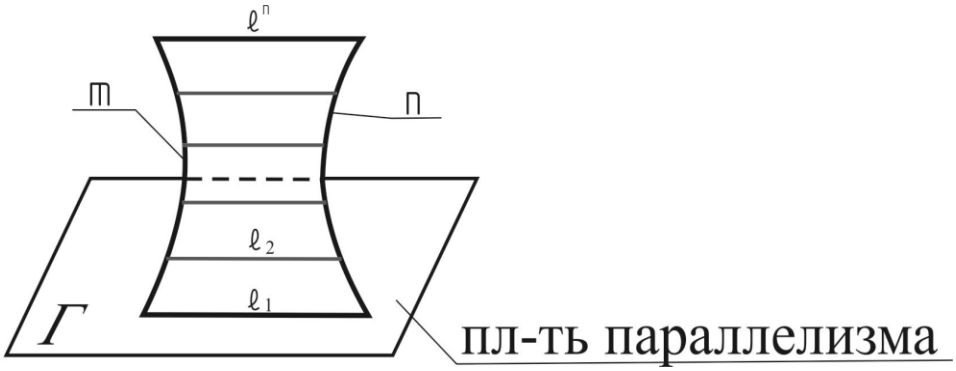


Рис. 72

Такая плоскость называется *плоскостью параллелизма*, а линейчатая поверхность, заданная таким способом – *линейчатой поверхностью с плоскостью параллелизма* или *поверхностью Каталана*.

Определитель данных поверхностей: **Σ (*m, n, Г*),** где **Σ** – поверхность; ***m*** и ***n*** – направляющие; ***Г*** – плоскость параллелизма.

В данную группу входят следующие поверхности.

1. *Поверхность прямого цилиндроида.* Такая поверхность может быть образована движением прямолинейной образующей по двум направляющим ***m*** и ***n*** в том случае, когда они – гладкие кривые линии, причем одна из них – плоская кривая, плоскость которой перпендикулярна плоскости параллелизма **Г** (рис. 73).

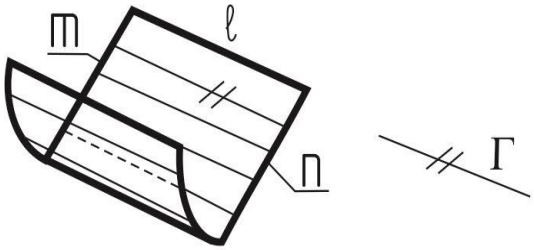


Рис. 73

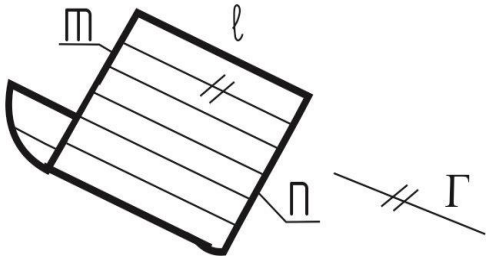


Рис. 74

2. *Поверхность прямого коноида.* Эта поверхность получается в том случае, когда одна направляющая – кривая линия, а вторая – прямая, причем она перпендикулярна плоскости параллелизма **Г** (рис. 74). Поверхность прямого коноида используется в гидротехническом строительстве для формирования поверхности устоев мостовых опор.

3. *Поверхность гиперболического параболоида (гипар).* Такая поверхность образуется в том случае, когда две направляющие – скрещивающиеся (рис. 75).

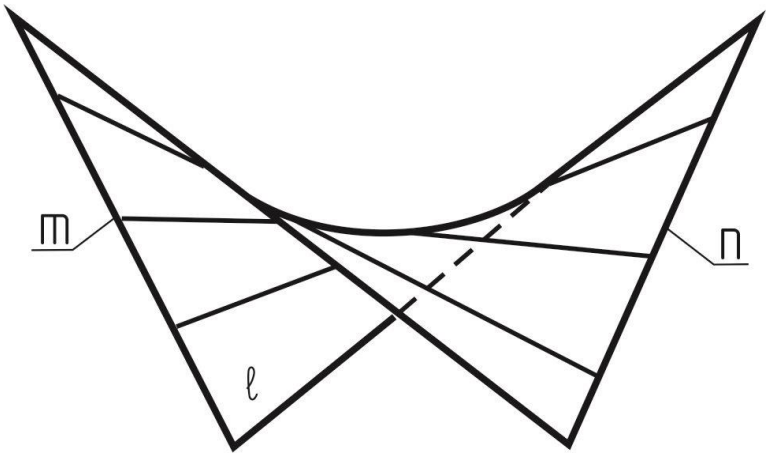


Рис. 75

Поверхность косой плоскости применяется в инженерно-строительной практике для формирования поверхностей откосов, насыпей, железнодорожных и автомобильных дорог, набережных, гидротехнических сооружений в местах сопряжения откосов, имеющих различные углы наклона.

6.2.3. Линейчатые поверхности с тремя направляющими

Поверхности данной группы образуются при движении в пространстве прямой образующей ***a*** по трем направляющим ***m***, ***n*** и ***ℓ***.

Определитель данных поверхностей: **Σ (*m, n, l*),** где **Σ** – поверхность; ***m***, ***n*** и ***ℓ*** – направляющие.

К данным поверхностям относятся следующие.

1. *Поверхность косого цилиндра.* Такая поверхность может быть образована движением прямолинейной образующей по трем криволинейным направляющим (рис. 76).

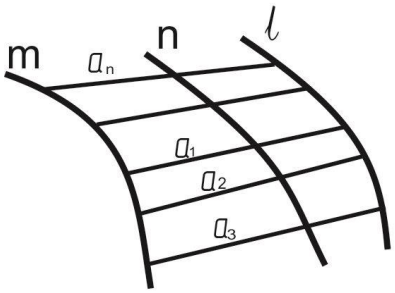


Рис. 76

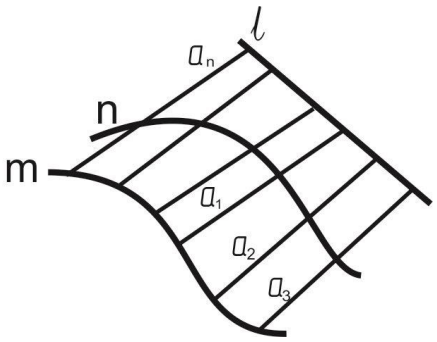


Рис. 77

2. *Поверхность дважды косого цилиндроида.* Эта поверхность образуется в том случае, когда две направляющие кривые, а третья – прямая линия (рис. 77).

3. *Поверхность дважды косого коноида* получается в том случае, когда одна из направляющих – кривая, а две других – прямые линии (рис. 78).

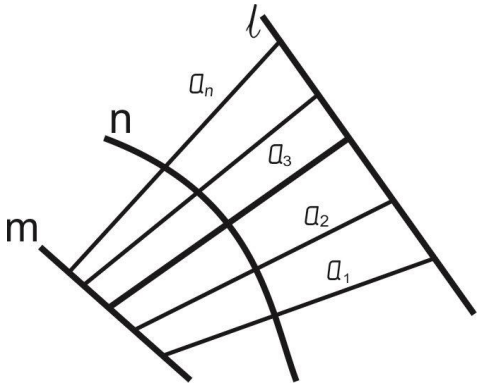


Рис. 78

4. *Поверхность однополостного гиперболоида* образуется в том случае, когда направляющие – три скрещивающиеся прямые, не параллельные одной плоскости.

6.3. Винтовые поверхности

Винтовые поверхности образуются при сложном винтовом движении прямой образующей, когда каждая точка этой образующей вращается вокруг неподвижной оси, а один конец этой образующей равномерно перемещается по этой оси. То есть это совокупность 2-х движений образующей – поступательного перемещения вдоль оси поверхности и вращательного вокруг оси.

Определитель винтовой поверхности: **Σ (*ℓ*, *i*, H, *φ*)**, где ***ℓ*** – образующая; ***i*** – ось; **H** – шаг винтовой линий; ***φ*** – угол наклона образующей к оси.

Поверхность, образованная при вращательном поступательном движении прямой образующей с постоянным шагом направляющей линии, называется *геликоидом* (рис. 79).

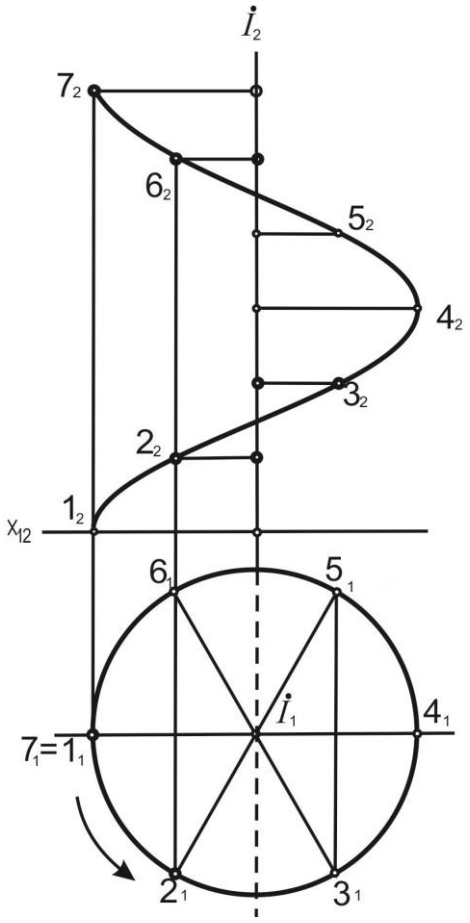


Рис. 79

Если угол образующей к оси вращения равен 90°, то называется *прямым,* если этот угол произвольный, отличный от 0 и 90°, то геликоид называется *косым (наклонным).*

Прямые и косые геликоиды могут быть *открытыми* и *закрытыми*. У открытого геликоида образующая и ось вращения – скрещивающиеся прямые, у закрытого – пересекающиеся прямые. На рис. 79 построен каркас прямого закрытого геликоида.

Винтовые поверхности широко используются в технике. Винты, пружины, сверла, шнеки для перемещения сыпучих материалов, винтовые лестницы – все они имеют винтовые поверхности.

6.4. Поверхности вращения

Поверхности вращения получили широкое применение в архитектуре и строительстве.

Поверхностью вращения называют поверхность, получаемую вращением какой-либо образующей линии вокруг неподвижной прямой – оси вращения поверхности.

Плоскости, перпендикулярные оси вращения, пересекают поверхность по окружностям – *параллелям.* Наименьшую параллель называют *горлом,* наибольшую – *экватором.* Линии, по которым плоскости, проходящие через ось вращения, пересекают поверхность, называют *меридианами.* Каждый меридиан разделяется на две симметричные относительно оси вращения линии, называемые полумеридианами. Меридиан, расположенный в плоскости, параллельной фронтальной плоскости проекций, называют *главным меридианом.*

Определитель поверхности вращения*:* Σ (***i***, ***ℓ***), где ***i*** **–** ось вращения; ***ℓ*** – образующая. На рис. 80 показана поверхность вращения.

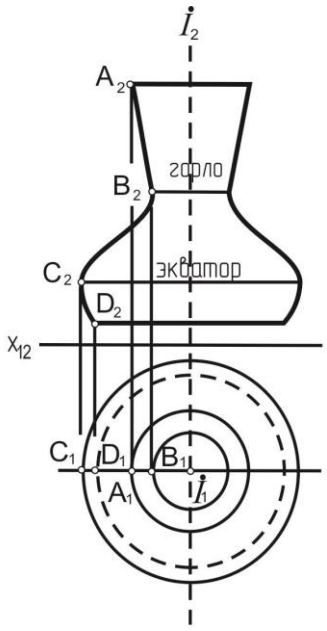


Рис. 80

Здесь образующей является плоская кривая ***ABCD***, ось вращения ***i*** расположена в одной плоскости с этой кривой.

Основные свойства поверхности вращения таковы.

1. Отрезок меридиана между двумя точками поверхности есть кратчайшее расстояние между этими точками.

2. Все меридианы равны между собой.

3. Каждая из параллелей поверхности вращения пересекает меридианы под прямым углом.

Поверхности вращения на чертеже удобно задавать очерками, проекциями ее характерных линий и точек. Фронтальным очерком поверхности вращения является фронтальная проекция главного меридиана, а горизонтальным – горизонтальная проекция экватора.

Рассмотрим основные виды поверхностей вращения.

1. *Цилиндрическая поверхность вращения.* Эта поверхность может быть получена вращением прямой, параллельной оси вращения ***i*** (рис. 81).

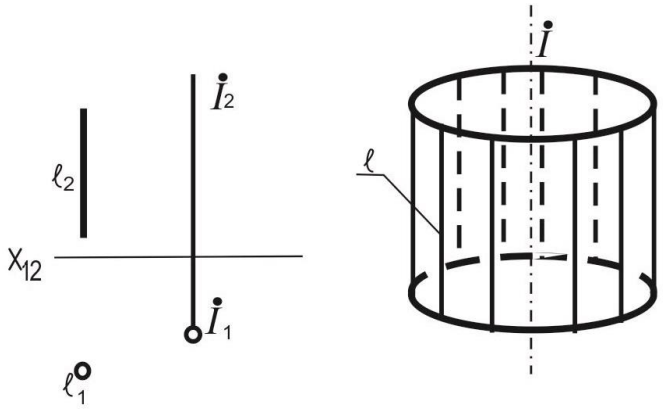


Рис. 81

2. *Коническая поверхность вращения.* Поверхность конуса вращения может быть получена вращением прямой, пересекающей ось вращения ***i*** (рис. 82).

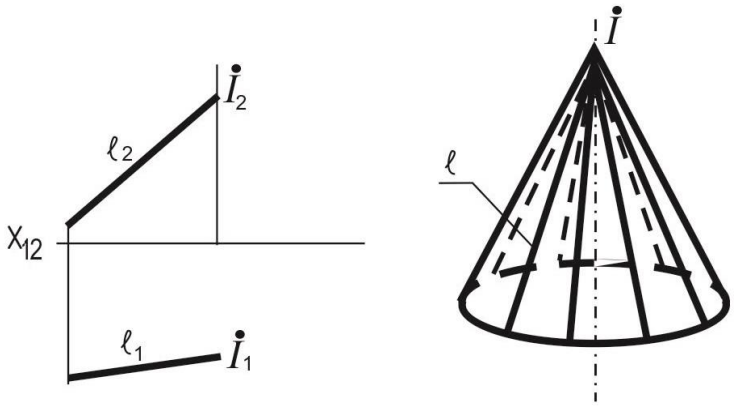


Рис. 82

3. *Однополостный гиперболоид вращения* образуется при вращении линии вокруг мнимой оси (рис. 83).

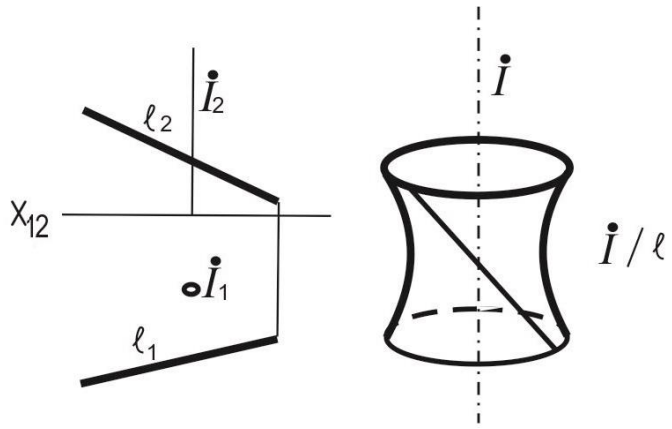


Рис. 83

4. *Сфера (шар).* Образующая сферы – окружность, центр которой *О* находится на оси вращения ***i*** (рис. 84).

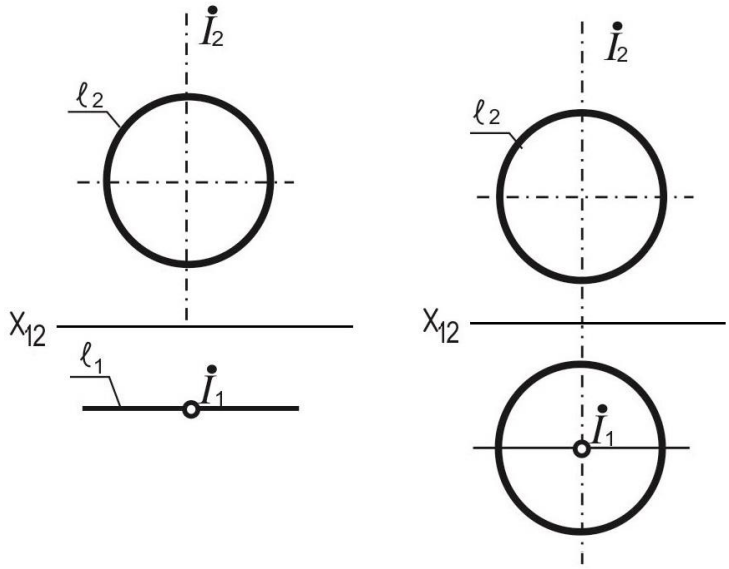


Рис. 84

5. *Тор.* Образующая тора – окружность или ее дуга. Ось вращения ***i*** лежит в плоскости этой окружности, но не проходит через ее центр (рис. 85).

Различают *открытый тор (круговое кольцо)* (рис. 85а, б), *закрытый* (рис. 85 б), *самопересекающийся* (рис. 85 в, г). Образующей для открытого (рис. 85 а) и закрытого тора (рис. 85 б) служит окружность, для самопересекающегося (рис. 85 в, г) – дуга окружности.

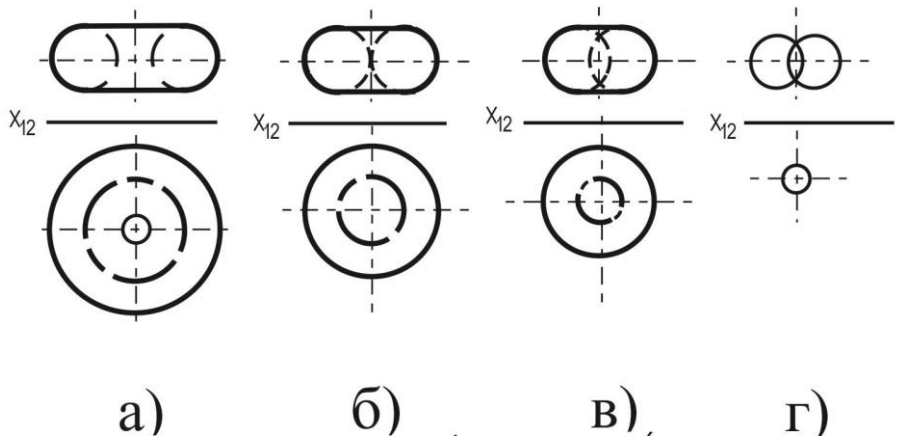


Рис. 85

6. *Параболоид вращения.* Такая поверхность образуется при вращении параболы вокруг ее оси (рис. 86). Поверхность параболоида используется в параболических антеннах и зеркалах рефлекторов.

7. *Гиперболоид вращения.* Эта поверхность образуется при вращении гиперболы вокруг оси. Различают *двуполостный* и *однополостный гиперболоид вращения.* Для двуполостного гиперболоида вращения осью вращения служит действительная ось гиперболы (рис. 87), для однополостного гиперболоида (рис. 88) – ее мнимая ось. Однополостный гиперболоид вращения также может быть образован вращением прямой линии в случае, если образующая и ось вращения – скрещивающиеся прямые.

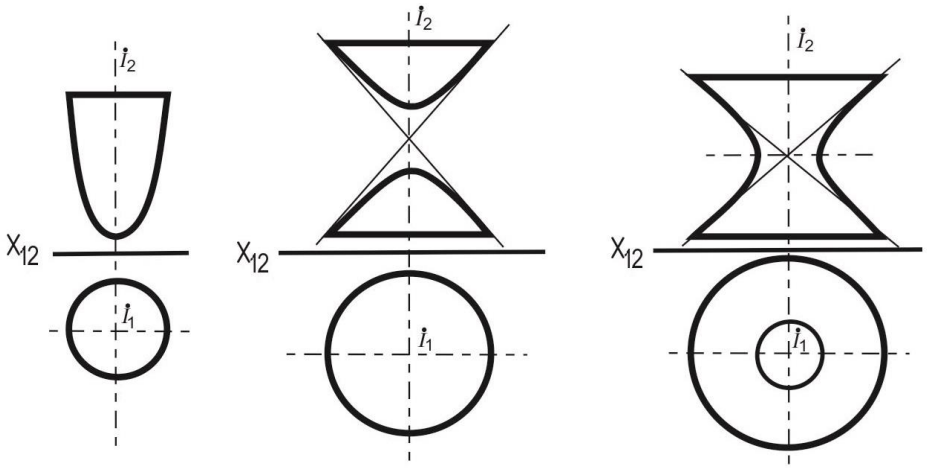


Рис. 86 Рис. 87 Рис. 88

8. Э*ллипсоид вращения* образуется, если сферу сжать или растянуть вдоль одного из диаметров, его меридианом является эллипс. Если эллипс вращается вокруг большой оси, эллипсоид называется *вытянутым* **(**рис. 89*а*); если вращение происходит вокруг малой оси, эллипсоид называется *сжатым* или *сфероидом* (рис. 89*б*).

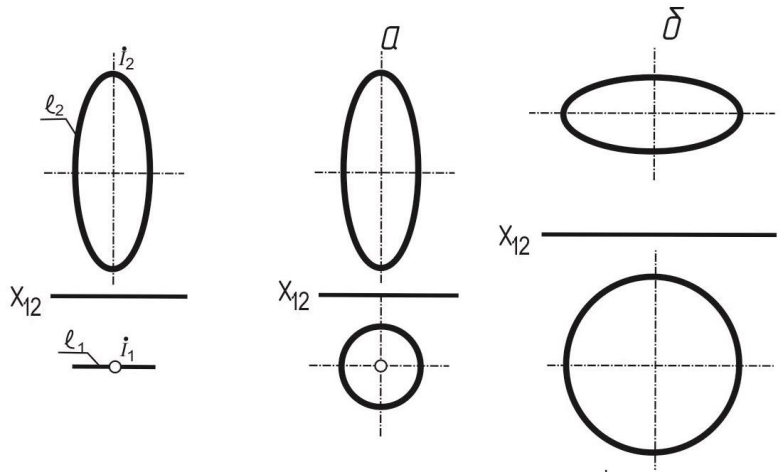


Рис. 89

Положение точки на поверхности вращения определяется с помощью окружности, которая проходит на поверхности вращения через эту точку. В случае линейчатых поверхностей вращения (цилиндр, конус) возможно использование для этой цели прямолинейных образующих.

6.5. Поверхности нелинейчатые

Поверхности нелинейчатые подразделяют на поверхности с образующей переменного вида (изменяющей свою форму в процессе движения) и на поверхности с образующей постоянного вида.

6.5.1. Нелинейчатые поверхности с образующей переменного вида

К нелинейчатым поверхностям с образующей переменного вида относятся следующие.

1. *Поверхность общего вида.* Такая поверхность образуется перемещением образующей переменного вида ***а*** по криволинейной направляющей ***т*** (рис. 90).

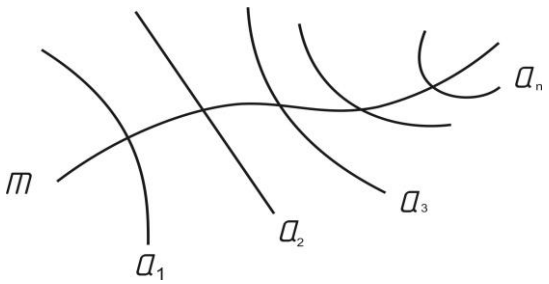


Рис. 90

2. *Каналовая поверхность.* Эта поверхность образуется движением

плоской замкнутой линии, плоскость которой определенным образом ориентирована в пространстве (рис. 91).

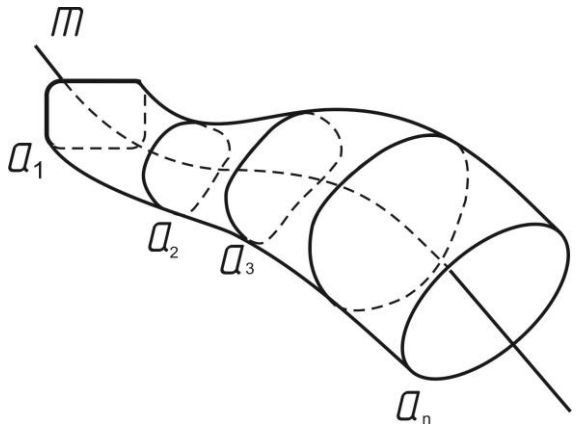


Рис. 91

Площадь, ограниченная образующей, монотонно изменяется в процессе ее движения по направляющей. Например, каналовую поверхность имеет переходный участок, соединяющий два трубопровода разной формы.

3. *Циклическая поверхность* – частный случай каналовой поверхности, когда образующая – окружность, радиус которой монотонно изменяется (рис. 92).

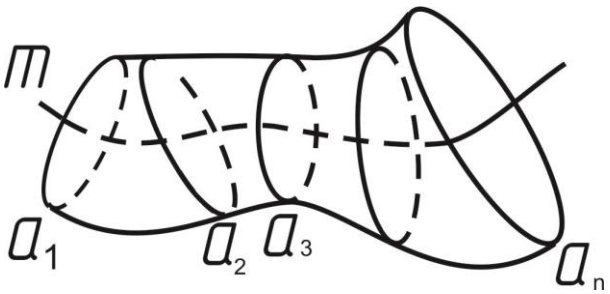


Рис. 92

Примером циклической поверхности может быть корпус духового музыкального инструмента.

6.5.2. Нелинейчатые поверхности с образующей постоянного вида

К нелинейчатым поверхностям с образующей постоянного вида относятся следующие.

1. *Поверхность общего вида.* Такая поверхность может быть образована движением произвольной кривой линии ***a*** по направляющей *m* (рис. 93).

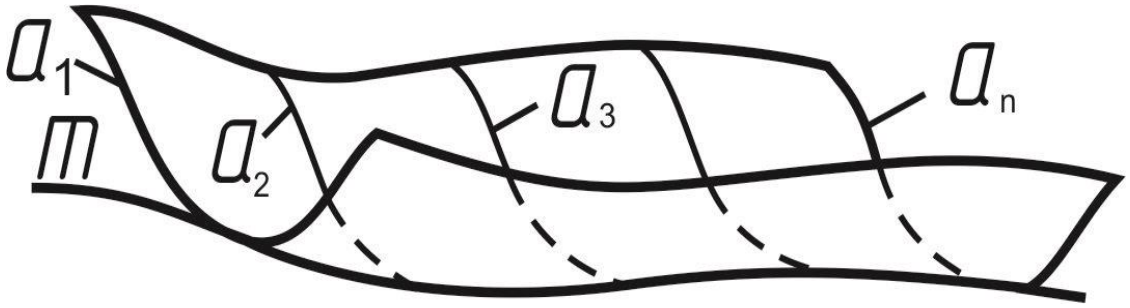


Рис. 93

2. *Трубчатая поверхность.* Образующей трубчатой поверхности является окружность постоянного радиуса. Плоскость окружности при ее движении остается перпендикулярной к направляющей (рис. 94). Примером трубчатой поверхности может быть поверхность проволоки круглого сечения.

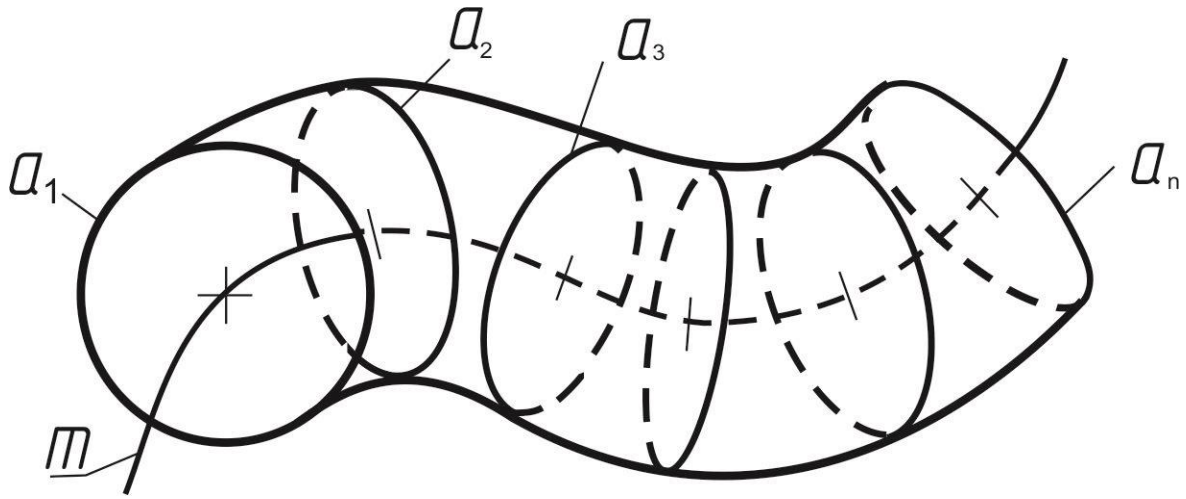


Рис. 94

ГЛАВА 7. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

В процессе проектирования и изготовления нового изделия инженерам часто приходится решать задачи, связанные с различными геометрическими объектами. Такие задачи делятся на *метрические* и *позиционные*.

Позиционными называются задачи, в которых требуется установить взаимное положение и взаимную принадлежность рассматриваемых геометрических объектов.

В результате решения позиционных задач определяются:

а) линии пересечения двух поверхностей;

б) точки пересечения линии и поверхности;

в) принадлежность точки поверхности.

Рассмотрим общий и частные случаи построения линии пересечения двух поверхностей.

7.1. Частный случай построения линии пересечения двух поверхностей

Существуют два случая частного пересечения поверхностей.

1. Обе пересекающиеся поверхности – проецирующие**.** В этом случае проекции линии пересечения поверхностей будут совпадать с соответствующими следами заданных поверхностей.

Пример 1. Построить линию пересечения двух плоскостей Σ и Γ (рис. 95).

Р е ш е н и е. Плоскость Σ является горизонтально проецирующей, а плоскость Γ фронтально проецирующей, следовательно, линия пересечения данных поверхностей совпадает с соответствующими следами данных плоскостей.

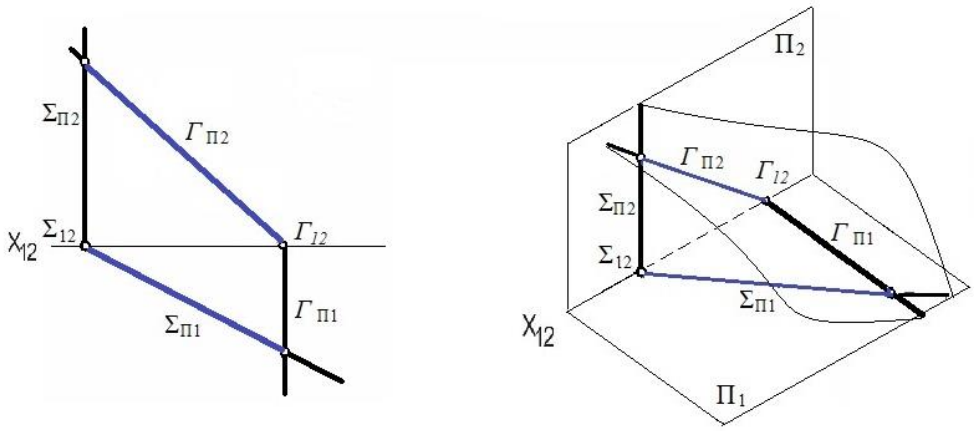


Рис. 95

2. Одна из пересекающихся поверхностей – проецирующая. В данном случае одна проекция линии пересечения на чертеже уже присутствует, вторая проекция линии пересечения строится из условия принадлежности этой линии другой пересекающейся поверхности.

Пример 2. Построить линию пересечения пирамиды Γ с фронтально проецирующей плоскостью Σ (рис. 96).

Р е ш е н и е. При пересечении пирамиды фронтально проецирующей плоскостью в сечении образуется треугольник Δ123.

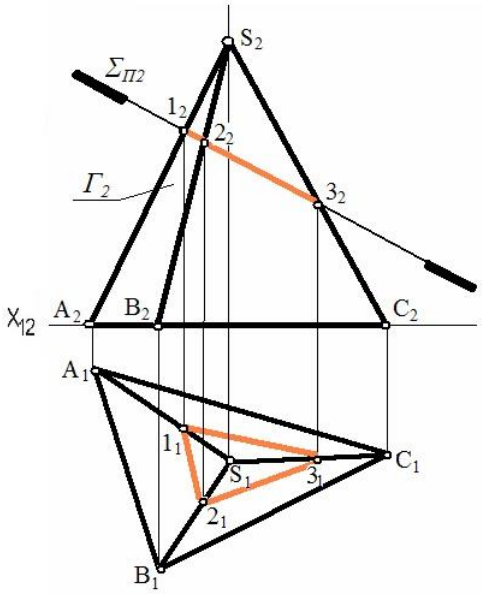


Рис. 96

7.2. Свойство проецирующей поверхности

Если одна из проекций линии принадлежит проецирующей поверхности, то другая проекция линии совпадает со следом этой поверхности (рис. 97).

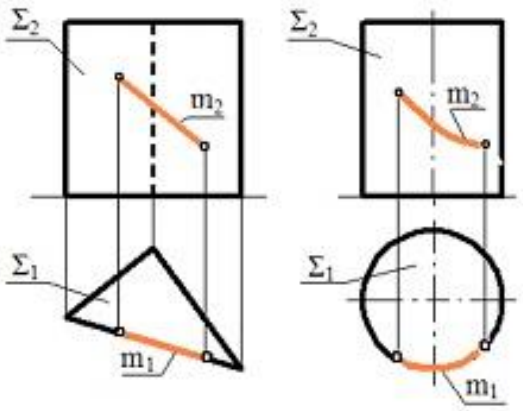


Рис. 97

7.3. Общий случай построения линии пересечения двух поверхностей

Линия пересечения двух поверхностей представляет собой в общем случае пространственную кривую. Любая точка этой линии принадлежит как первой, так и второй поверхностям и может быть определена в пересечении линий, проведенных на этих поверхностях. Исходя из этого, можно предложить следующие варианты решения задачи:

1) выбрать на одной из поверхностей конечное число линий и построить точки пересечения их с другой поверхностью (решение такой задачи см. выше);

2) выделить на заданных поверхностях два семейства линий и найти их точки пересечения. Во втором варианте выделение пересекающихся пар кривых выполняют с помощью вспомогательных поверхностей-посредников, из которых наибольшее применение нашли плоскости и сферы.

Секущие поверхности-посредники выбирают такие, чтобы проекции линий их пересечения с заданными поверхностями были простыми – прямыми или окружностями. В качестве поверхностей-посредников обычно используют плоскости или сферы.

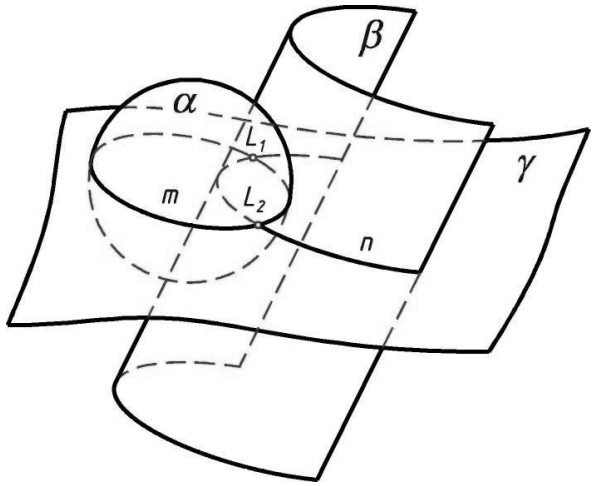


Рис. 98

В общем случае линия пересечения двух поверхностей представляет собой пространственную кривую, которая может распадаться на две и более части.

Пусть заданы две пересекающиеся поверхности α и β (рис. 98).

В общем случае для построения точек L_1 и L_2, принадлежащих линии пересечения двух кривых поверхностей, используется следующий алгоритм.

1. Ввести вспомогательную секущую поверхность-посредник γ.

2. Определить линии m и n пересечения поверхности-посредника γ с каждой из заданных поверхностей.

3. В пересечении линий m и n найти искомые точки L_1 и L_2.

4. Определить видимость линии.

Последовательно введя ряд поверхностей-посредников, найдем необходимое число точек, принадлежащих линии пересечения. Соединив в определенной последовательности найденные точки плавной линией, получим искомую линию пересечения двух поверхностей.

Видимость участков линии пересечения определяется с помощью конкурирующих точек. Видимые участки линии пересечения находятся на видимых частях пересекающихся поверхностей, невидимые – на невидимых.

Рассмотрим построение линии пересечения двух поверхностей способом вспомогательных секущих плоскостей.

Построение линии пересечения начинают с определения ее опорных точек (высшей, низшей, точек смены видимости и др.). Способы определения опорных точек зависят от вида пересекающихся поверхностей, их взаимного положения и положения относительно плоскостей проекций.

Высшая и низшая точки линии пересечения позволяют установить граничные положения вспомогательных секущих плоскостей.

Для уточнения вида линии пересечения находят ее промежуточные точки. При этом следует учесть, что проекции линии пересечения двух поверхностей всегда находятся в пределах контура наложения проекций этих поверхностей (заштрихованные области на рис. 99).

При построении линии пересечения двух поверхностей следует учитывать следующие особенности.

1. Если плоскость симметрии пересекающихся поверхностей параллельна одной из плоскостей проекций, то на ней совпадают проекции видимой и невидимой частей линии пересечения (рис. 99).

2. Если хотя бы одна из пересекающихся поверхностей линейчатая, то точки, принадлежащие линии пересечения находятся как точки пересечения прямолинейных образующих этой поверхности с другой поверхностью (рис. 100).

3. Если пересекающиеся поверхности имеют общую плоскость симметрии, то высшая **(В)** и низшая **(Н)** точки линии пересечения принадлежат этой плоскости и могут быть построены точно (рис. 99). В противном случае они строятся приближенно (рис. 100).

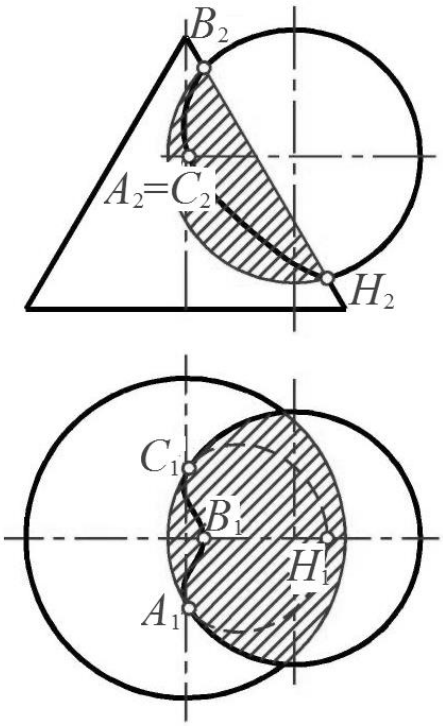


Рис. 99

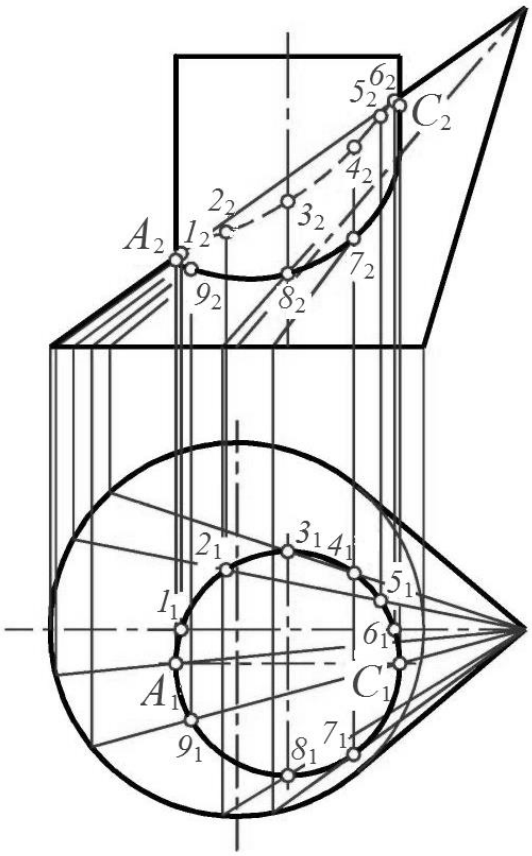


Рис. 100

Пример 3. Построить линию пересечения поверхностей конуса и сферы (рис. 101).

Р е ш е н и е . Определим опорные точки линии пересечения. Заданные поверхности имеют общую плоскость симметрии ***α,*** которая проходит через ось вращения конуса и центр сферы. В этой плоскости находятся высшая **(*B*)** и низшая **(*H*)** точки линии пересечения поверхностей. Для определения проекций этих точек воспользуемся способом замены плоскостей проекций – построим очерки заданных поверхностей на плоскость проекций Π_4, параллельную их общей плоскости симметрии ***α***. В пересечении очерков найдем проекции высшей **(B_4)** и низшей **(H_4)** точек линии пересечения поверхностей. Исходя из принадлежности этих точек поверхности конуса, найдем их проекции в исходной системе плоскостей.

Видимость горизонтальной проекции линии пересечения определяет сфера – на ее экваторе находятся точки смены видимости ***A*** и ***C***. Для определения этих и других точек используем общий алгоритм построения точек, принадлежащих линии пересечения двух поверхностей. При этом в качестве поверхностей-посредников используем вспомогательные секущие плоскости $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

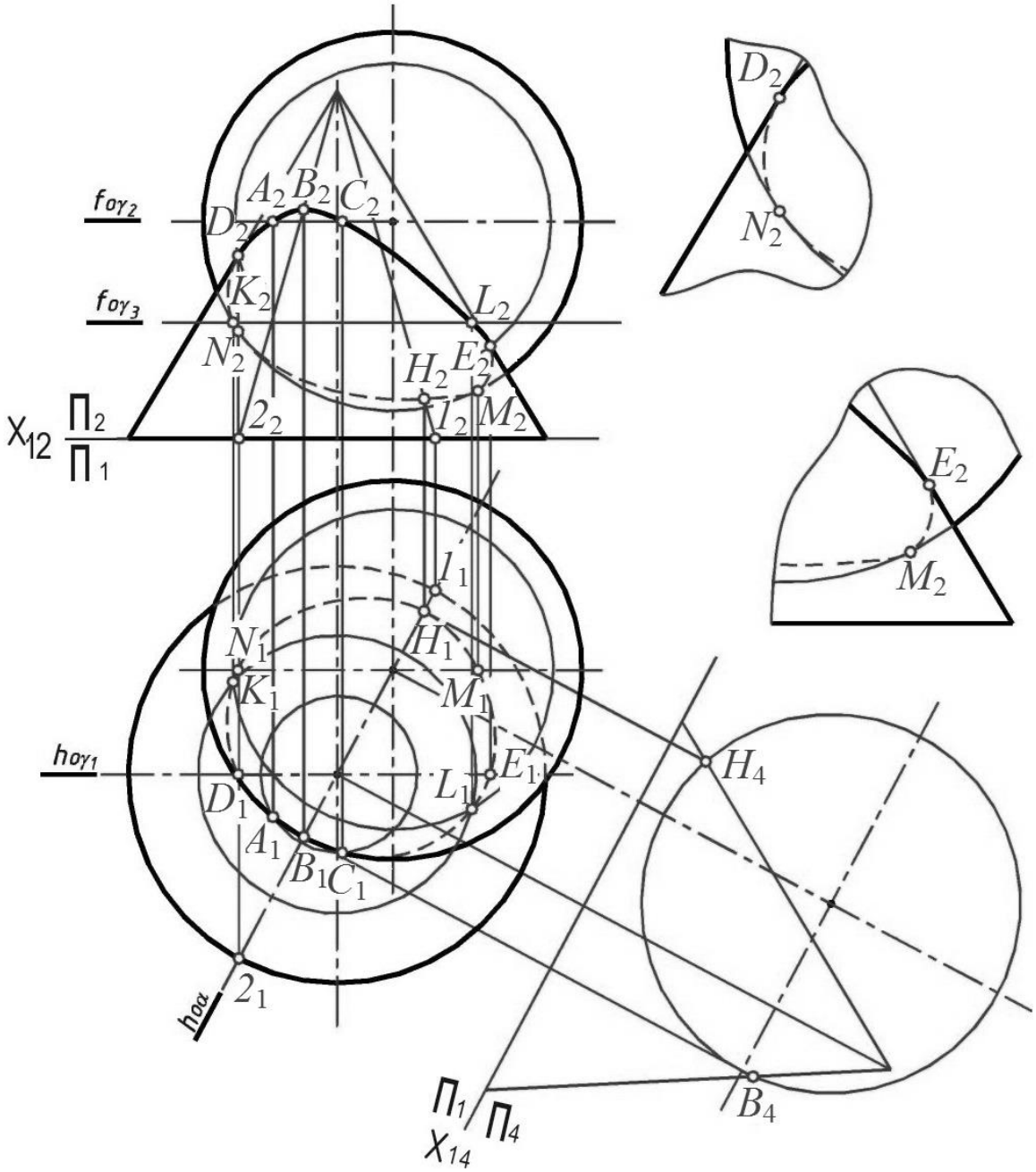


Рис. 101

Видимость фронтальной проекции линии пересечения определяет конус – точки смены видимости ***D*** и ***E*** находятся на главном меридиане конуса. Другими опорными точками линии пересечения являются точки ***M*** и ***N*** – на фронтальной плоскости проекций в этих точках линия пересечения касается очерка сферы. Горизонтальные проекции этих точек определяем в пересечении одноименных проекций главного меридиана сферы и найденной линии пересечения. Фронтальные проекции точек ***M*** и ***N*** находим из условия принадлежности их сфере.

7.4. Пересечение кривой поверхности плоскостью

Линия пересечения кривой поверхности с плоскостью представляет собой плоскую линию.

Построение линии пересечения следует начинать с определения ее *опорных точек* (высшей и низшей, точек смены видимости и др.). Способы определения опорных точек зависят от вида поверхности, положения поверхности и пересекающей ее плоскости в пространстве.

Видимость линии пересечения определяется по видимости поверхности, которой она принадлежит. Видимые участки линии пересечения находятся на видимой части поверхности, невидимые – на невидимой.

Если поверхность задана ее очерками, то точки смены видимости линии пересечения всегда лежат на очерках поверхности и делят проекцию линии пересечения на видимую и невидимую части.

При построении линии пересечения кривой поверхности плоскостью следует учитывать следующие особенности.

1. Если поверхность линейчатая, то точки, принадлежащие линии пересечения ее с плоскостью, удобно определить как точки пересечения образующих поверхности (прямых) с секущей плоскостью.

2. Если поверхность проецирующая (прямой цилиндр, прямая призма), то одна проекция линии пересечения ее с плоскостью известна – она совпадает с соответствующей проекцией поверхности.

3. Если секущая плоскость проецирующая, то одна проекция линии пересечения ее с поверхностью совпадает с соответствующим следом плоскости, вторая проекция линии пересечения находится из принадлежности ее точек поверхности.

Построение линии пересечения обычно упрощается, если преобразовать комплексный чертеж так, чтобы секущая плоскость заняла проецирующее положение.

Следует отметить, что приемы построения линии пересечения кривой поверхности плоскостью и линии пересечения многогранника плоскостью одинаковы, так как любую кривую поверхность можно аппроксимировать поверхностью многогранника. Так, цилиндрическую поверхность можно аппроксимировать поверхностью призмы, коническую – пирамидой.

7.5. Пересечение поверхности вращения плоскостью

Для построения точек, принадлежащих линии пересечения поверхности вращения плоскостью, целесообразно использовать вспомогательные плоскости, перпендикулярные к оси вращения. В этом случае вспомогательная плоскость будет пересекать поверхность по

окружности. Сечение поверхности вращения плоскостью является симметричной фигурой. Ось симметрии фигуры принадлежит общей плоскости симметрии поверхности и секущей плоскости. Плоскость симметрии проходит через ось вращения поверхности и перпендикулярна секущей плоскости.

Рассмотрим пересечение плоскостью поверхности прямого кругового конуса. В сечении прямого кругового конуса плоскостью может получиться точка, прямая, две прямых, парабола, эллипс, окружность.

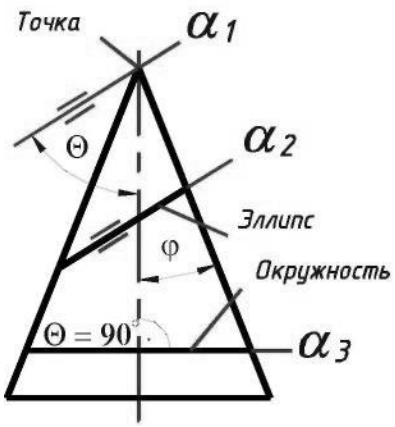


Рис. 102

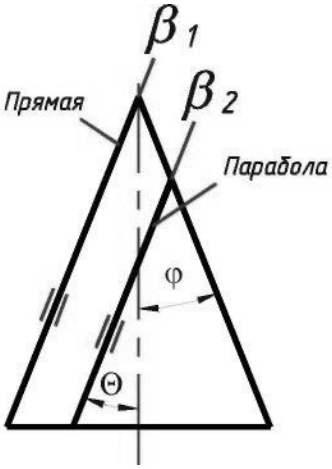


Рис. 103

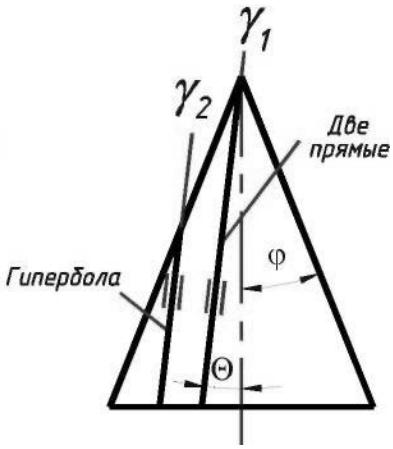


Рис. 104

Признаками, определяющими вид сечения, могут служить значения углов θ и φ наклона секущей плоскости и образующих конуса к оси вращения конуса (рис. 102–104).

Рассмотрим следующие случаи.

1. Секущая плоскость проходит через вершину конуса. В сечении конуса может получиться *точка* ($90° > \theta > \varphi$) (рис. 102), *прямая* ($\theta = \varphi$) (рис.103), *две прямые* ($\varphi > \theta > 0°$) (рис. 104).

2. Секущая плоскость не проходит через вершину конуса. Линиями пересечения могут быть: *эллипс* ($90° > \theta > \varphi$), *окружность* ($\theta = 90°$) (рис.102), парабола ($\theta = \varphi$)(рис.103), *гипербола* ($\varphi > \theta > 0°$) (рис. 104).

В общем случае, для построения линии пересечения прямого кругового конуса плоскостью, следует находить точки пересечения образующих конуса с секущей плоскостью.

Пример 4. Построить линию пересечения прямого кругового конуса фронтально проецирующей плоскостью α (рис. 105).

Решение. В сечении получаем эллипс, так как секущая плоскость пересекает все образующие конуса и не перпендикулярна его оси вращения. Фронтальная проекция линии пересечения известна – она совпадает с фронтальным следом плоскости h_α (точки B_2, H_2, A_2, C_2). Большая ось эллипса BH проецируется на плоскость Π_2 без искажения. Точка B_2 – высшая,

H_2 – низшая точки линии сечения. Проекция малой оси эллипса на плоскость $П_2$ вырождается в точку $A_2 = C_2$, расположенную в середине отрезка B_2H_2.

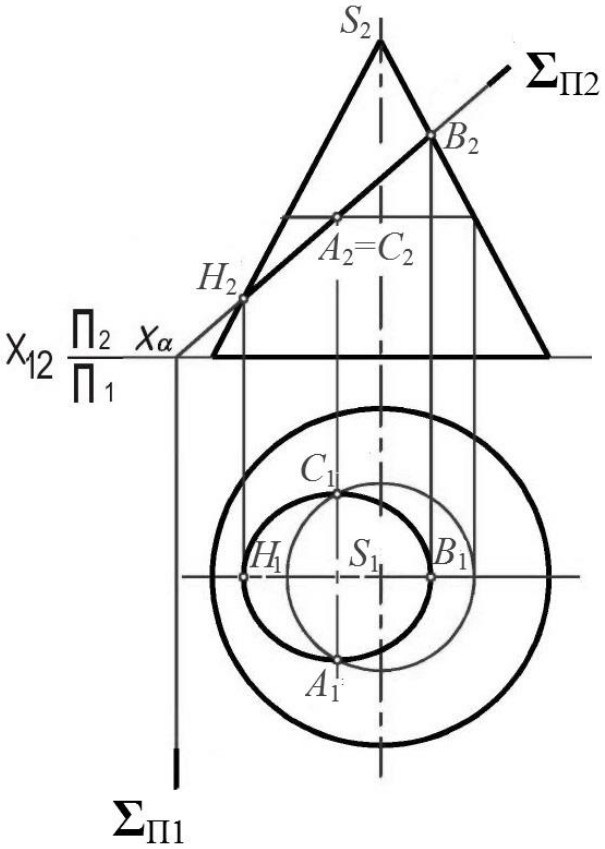


Рис. 105

Для определения горизонтальной проекции малой оси эллипса через известную ее фронтальную проекцию проводим горизонтальную плоскость γ. В сечении конуса получаем окружность, на горизонтальной проекции которой находим точки A_1, C_1. Проекции других точек линии пересечения можно найти с помощью вспомогательных горизонтальных плоскостей.

7.6. Пересечение кривой поверхности прямой линией

В общем случае для построения точек пересечения кривой поверхности прямой линией используется следующий алгоритм.

1. Прямую заключить во вспомогательную плоскость.
2. Найти линии пересечения (одну или две) вспомогательной плоскости с заданной поверхностью.
3. В пересечении найденных линий и заданной прямой найти искомые точки пересечения.
4. Определение видимости прямой.

Чтобы получить рациональное решение, следует использовать наиболее простой способ определения линии пересечения вспомогательной плоскости с заданной поверхностью путем подбора положения вспомогательной плоскости или перевода заданной прямой в частное положение.

Для определения видимости прямой можно использовать метод конкурирующих точек.

Пример 5. Найти точки пересечения прямой ***b*** с поверхностью конуса (рис. 106).

Р е ш е н и е. Так как прямая ***b*** проецирующая, то одна ее проекция – точка. Она совпадает с соответствующими проекциям точек пересечения прямой с поверхностью (***b*₁** =***K*₁** = ***N*₁**).

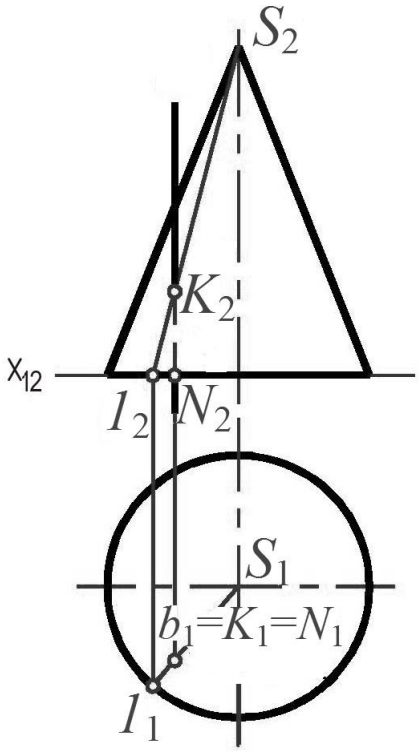


Рис. 106

Фронтальные проекции этих точек находятся из условия их принадлежности поверхности.

ГЛАВА 8. РАЗВЕРТКА ПОВЕРХНОСТЕЙ

Построение разверток является важной технической задачей, так как в промышленности широко применяются разнообразные изделия, выполненные из листового материала путем изгибания (сосуды, трубопроводы и др.). Если рассматривая поверхность как гибкую, нерастяжимую пленку, ее можно совместить с плоскостью без складок и разрывов путем изгибания, то такую поверхность называют развертываемой.

Плоская фигура, полученная совмещением данной поверхности с плоскостью без складок и разрывов, называется *разверткой поверхности*.

К развертываемым относятся гранные поверхности (например, пирамида, призма) и следующие кривые линейчатые поверхности: цилиндрические, конические, торсы.

Разверткой боковой поверхности прямого кругового цилиндра радиуса ***R*** и высотой ***H*** является прямоугольник с размерами сторон ***H*** и ***2ПR*** (рис. 107).

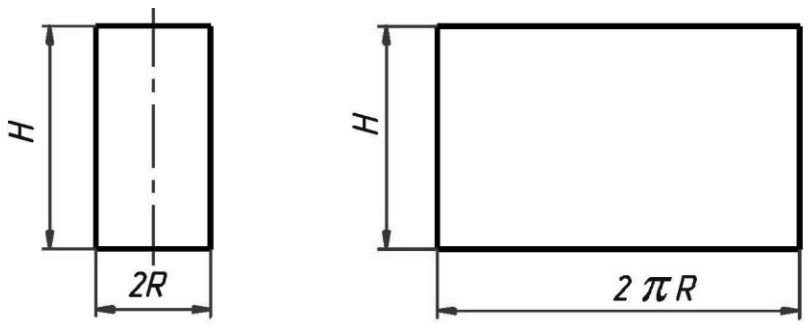


Рис. 107

Разверткой боковой поверхности прямого кругового конуса является сектор радиуса ***L***, центральный угол которого $\varphi^0 = 360^0 / L$, где ***R*** – радиус окружности основания конуса; ***L*** – длина образующей конуса (рис. 108).

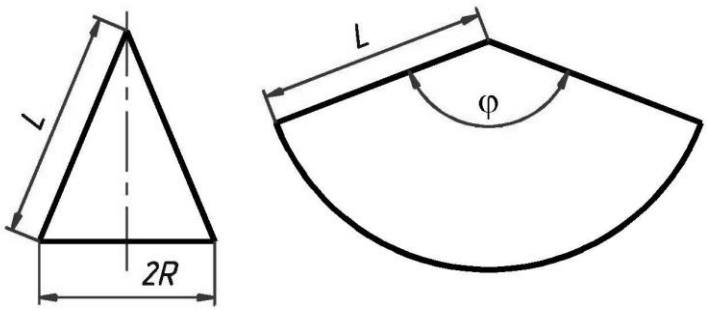


Рис. 108

Все остальные поверхности неразвертываемые.

Развертки бывают:

• точные. Точные развертки можно построить только для развертываемых поверхностей;

• приближенные. Сущность построения приближенных разверток заключается в том, что кривую поверхность аппроксимируют гранной поверхностью (например, коническую – пирамидой, цилиндрическую – призмой);

• условные. Условные развертки строят для неразвертываемых поверхностей. Для этого данная поверхность аппроксимируется отсеками развертывамой поверхности – гранной, цилиндрической, конической.

8.1. Основные свойства развертки поверхности

Если рассматривать поверхность и ее развертку как два множества точек, то между этими множествами устанавливается взаимно-однозначное соответствие; т.е. каждой точке на поверхности соответствует единственная точка на развертке, и наоборот. Отсюда вытекают следующие основные свойства развертки.

1. Длины двух соответствующих линий поверхности и ее развертки равны между собой.

2. Замкнутая линия на поверхности и соответствующая ей линия на развертке ограничивают одинаковую площадь.

3. Угол между линиями на поверхности равен углу между соответствующими линиями на развертке.

4. Прямой на поверхности соответствует также прямая на развертке.

5. Параллельным прямым на поверхности соответствуют также параллельные прямые на развертке.

8.2. Построение точных разверток многогранников

Так как все грани многогранной поверхности изображаются на развертке в натуральную величину, построение ее сводится к определению величины отдельных граней поверхностей – плоских многоугольников.

Для построения разверток многогранников применяются следующие способы:

• нормального сечения – для призм;

• раскатки – для призм;

• триангуляции (треугольников) – для любого многогранника.

Пример 1. Построить развертку пирамиды ***SABC***. Определить на развертке положение точки М (рис. 109).

Р е ш е н и е. Итак, для построения развертки поверхности необходимо знать натуральные величины всех составляющих данной поверхности – образующих и основания.

Основание пирамиды параллельно плоскости $П_1$, поэтому оно уже спроецировано на эту плоскость в натуральную величину. Необходимо найти натуральные величины боковых граней, которые являются плоскостями треугольников. Для построения натуральных величин треугольников определим натуральные величины боковых ребер ***SA*** и ***SB*** вращением вокруг проецирующей оси $\boldsymbol{i_1}$ ($\boldsymbol{i_1 \perp П_1}$). После определения натуральных величин всех элементов строится развертка пирамиды.

Для построения точки ***M*** на развертке, через данную точку проведем образующую пирамиды (***S*** – $\mathbf{1_1}$), и определим натуральную величину этой образующей вращением вокруг оси. Нанесем на развертку данную прямую и точку ***M***.

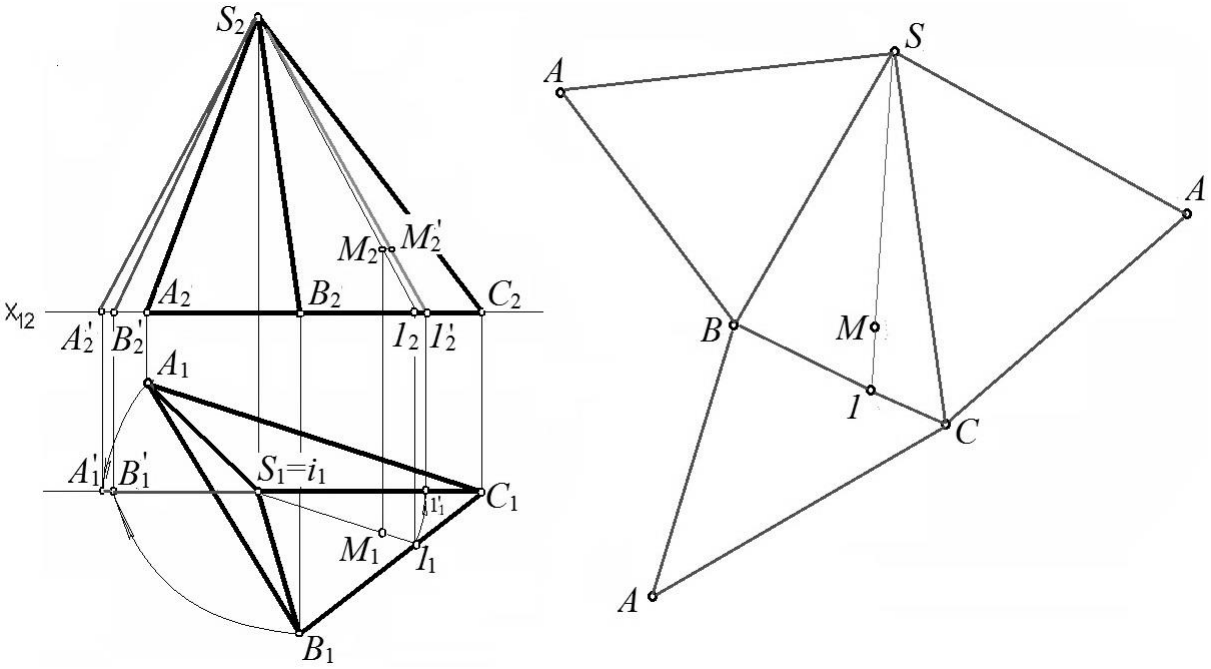


Рис. 109

Пример 2. Построить развертку призмы ***SAB*** методом нормального сечения.

Р е ш е н и е. *Способ нормального сечения* используется, когда основание призмы является плоскостью общего положения.

Ребра заданной призмы располагаются фронтально, поэтому проецируются на плоскость $\mathbf{П_2}$ в натуральную величину (рис. 110).

Необходимо определить натуральную величину бокового основания призмы. Для этого перпендикулярно к ребрам призмы проводим плоскость $\sum$ ($\sum_{\mathbf{П2}} \perp \mathbf{A_2A'_2}$, $\mathbf{B_2B'_2}$, $\mathbf{C_2C'_2}$).

С помощью преобразования чертежа (в данном случае заменой плоскостей проекций) определяем натуральную величину бокового основания призмы **123.**

На свободном месте чертежа проводим линию плоскости нормального сечения ∑, фиксируем точку 1, откладываем последовательно все стороны нормального сечения: **1-2**, **2-3**, **3-1**. Полученный отрезок **1-1** равен периметру нормального сечения призмы.

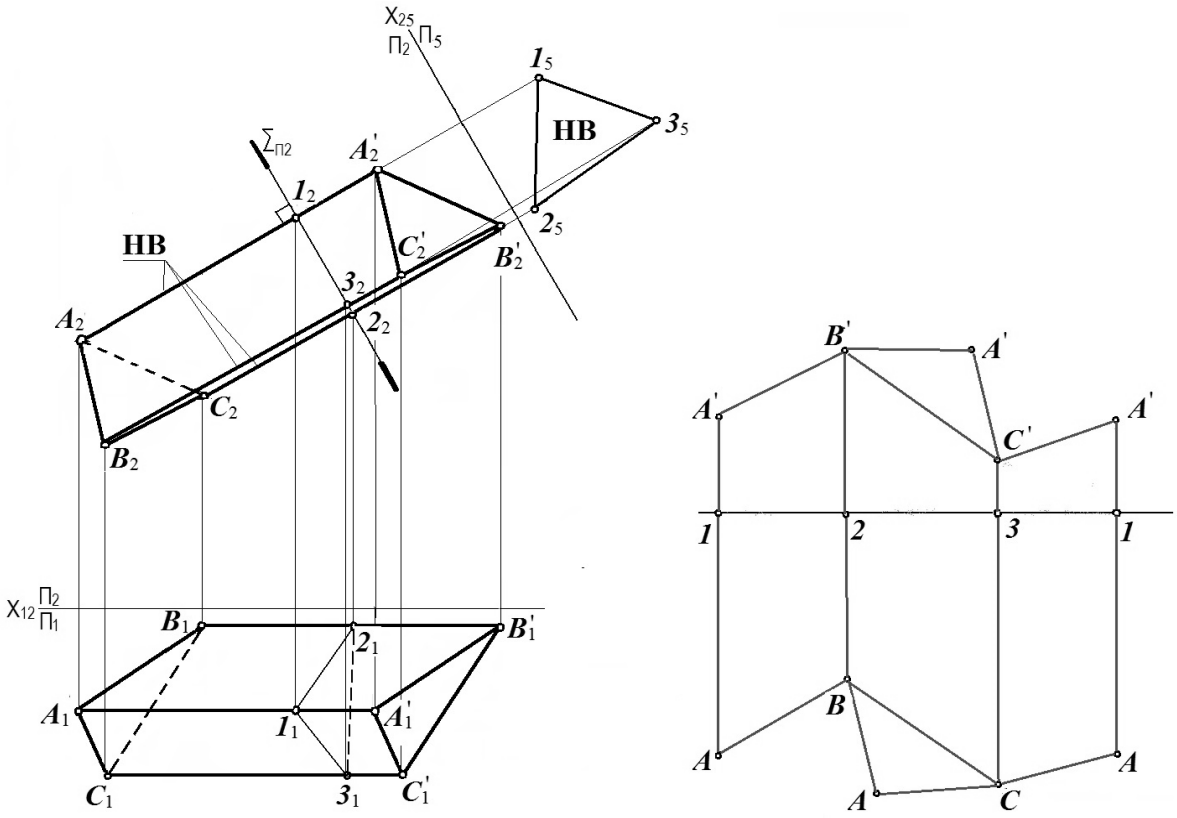


Рис. 110

Через точки 1, 2, 3, 1 проводим прямые, перпендикулярные к линии ∑. Откладываем на этих прямых натуральные величины ребер призмы: 1_2A_2, $1_2A'_2$, 2_2B_2 , $2_2B'_2$, 3_2C_2 , $3_3C'_2$ выше и ниже линии плоскости ∑.

Соединяем все полученные точки между собой. Таким образом, построили развертку боковой поверхности призмы.

Далее пристраивают два боковых основания, воспользовавшись натуральными величинами их сторон.

Пример 3. Построить развертку призмы способом раскатки (рис. 111).

Решение. *Способ раскатки* используется, когда основание призмы параллельно плоскости проекций, где спроецировано в натуральную величину.

Ребра призмы являются горизонталями, поэтому раскатку производят способом вращения вокруг горизонталей и, таким образом, определяются натуральные величины каждой грани призмы.

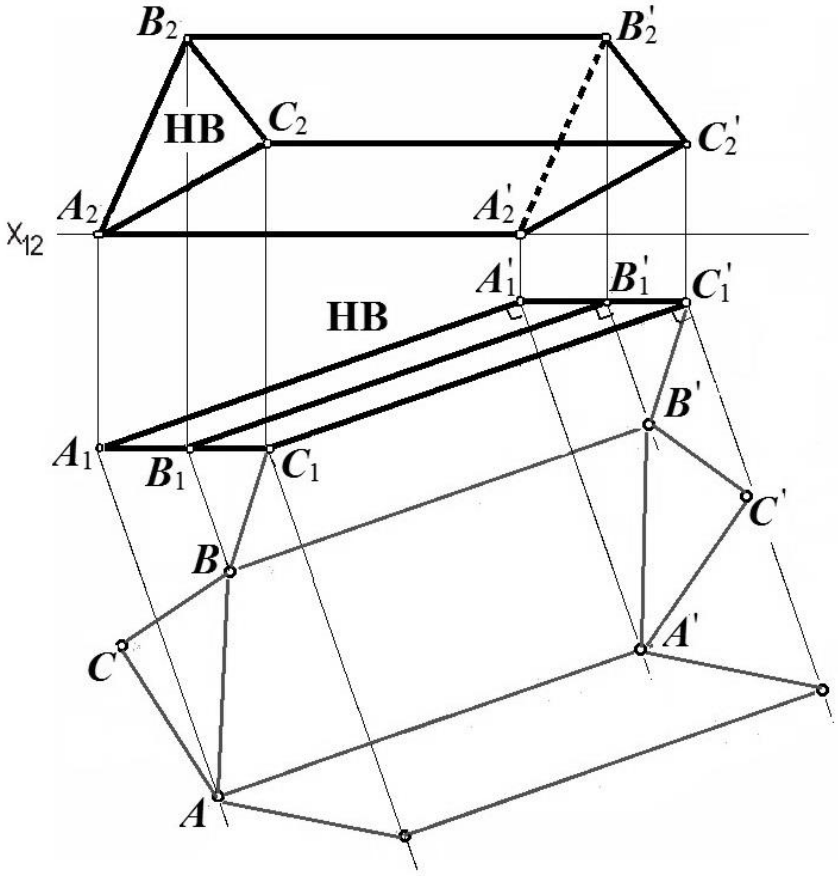


Рис. 111

Вращением вокруг горизонталей (ребер призмы) пристраиваем развертку поверхности. Для этого через каждую точку ребер призмы проводим перпендикулярные прямые – плоскости, в которых будут вращаться каждая образующая до положения, когда они совместятся с плоскостью $П_1$. То есть вся поверхность призмы превратится в одну плоскость.

8.3. Приближенная развертка развертываемых поверхностей

Построение приближенных разверток развертываемых кривых поверхностей (конических, цилиндрических, торсовых) сводится к построению точных разверток гранных поверхностей, вписанных в данные поверхности или описанных около них.

Алгоритм построения приближенной развертки таков.

1. Развертываемую поверхность аппроксимируют гранной поверхностью (пирамидой, призмой).

2. Строят точную развертку гранной поверхности.

3. На развертке ломаная линия (одна или две), аппроксимирующая направляющую поверхности, заменяется плавной кривой.

Пример 4. Построить развертку боковой поверхности наклонного кругового конуса (рис. 112).

Р е ш е н и е. Впишем в данную коническую поверхность пирамиду. Для этого окружность основания конической поверхности заменим правильным шестиугольником ***123456,*** а боковую поверхность – боковой поверхностью пирамиды с треугольными гранями ***S12, S23,...S61.*** Определим натуральные величины ребер пирамиды способом вращения вокруг оси, перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций и проходящей через вершину ***S.***

Зная натуральные величины сторон треугольных граней пирамиды, строим развертку ее боковой поверхности. Для этого сначала на свободном поле чертежа откладываем ребро ***S1*** и с помощью засечек строим треугольник ***S12,*** затем к нему последовательно пристраиваем остальные треугольники.

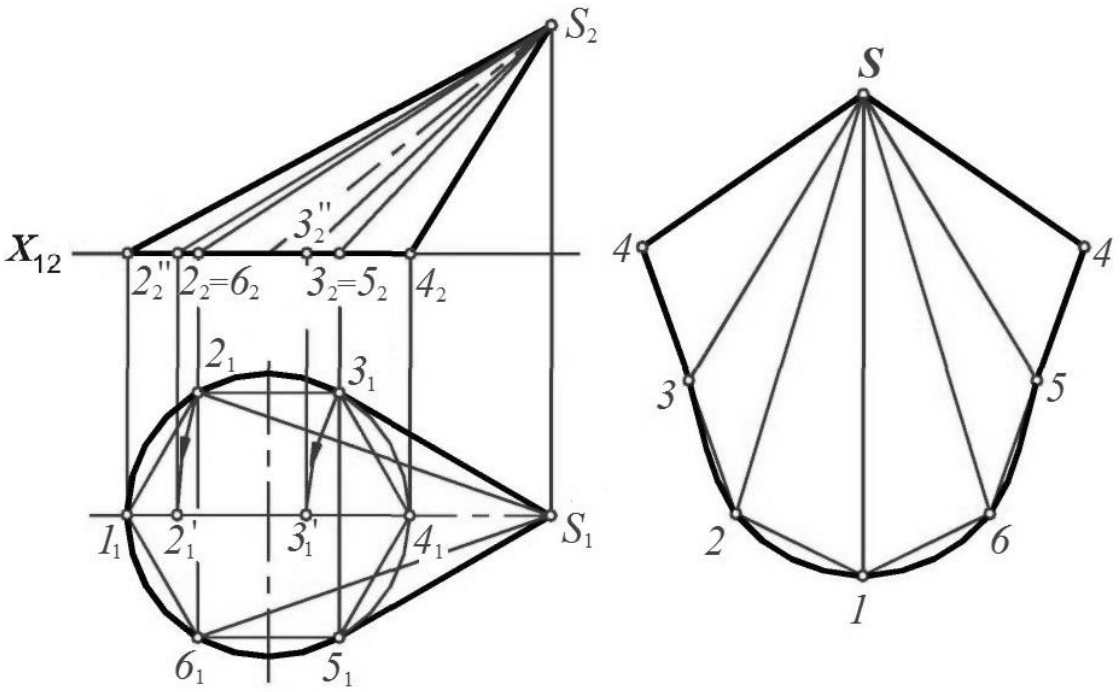


Рис. 112

Соединяя точки ***4,3,2,1,6,5,4*** плавной линией, получаем приближенную развертку боковой поверхности наклонного кругового конуса.

8.4. Условная развертка неразвертываемых поверхностей

Для неразвертываемых поверхностей строят условные развертки. Алгоритм их построения следующий.

1. Поверхность разрезают на несколько частей.

2. Каждую из этих частей аппроксимируют развертываемой поверхностью (гранной, цилиндрической, конической).

3. Строят развертки развертываемых поверхностей, которыми аппроксимируют данную поверхность.

Совокупность этих разверток и будет являться условной разверткой данной поверхности.

Пример 5 Построить условную развертку поверхности сферы (рис. 113).

Р е ш е н и е. Поверхность сферы разрезаем меридиональными плоскостями на равные части (доли), например, на шесть.

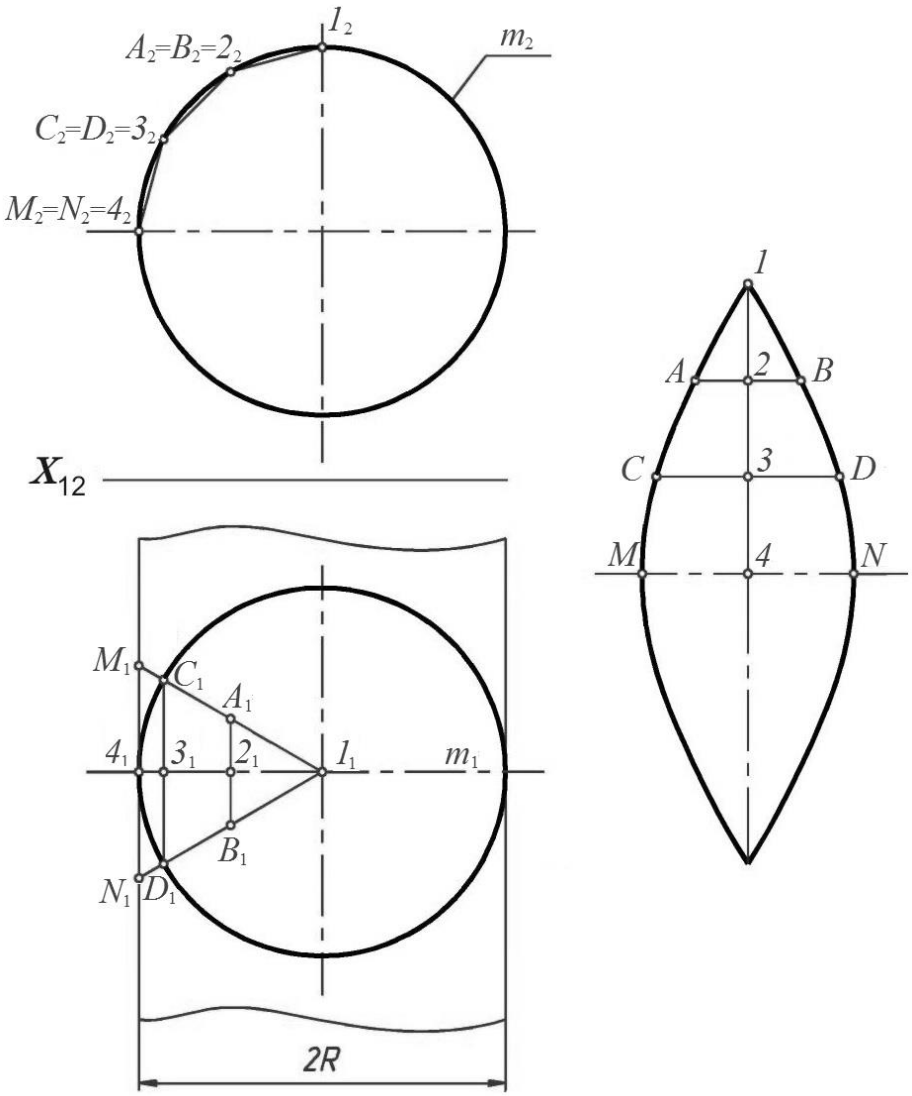


Рис. 113

Построим развертку доли сферы, средним меридианом которой является главный меридиан ***m***. Заменяем долю поверхности сферы отсеком цилиндрической поверхности, касающейся ее по главному меридиану (радиус цилиндра равен радиусу сферы).

Границами отсека цилиндрической поверхности будут плоскости меридианов, ограничивающие долю поверхности сферы. Разделив дугу ***14*** главного меридиана на *n* равных частей, например на три, построим образующие цилиндра ***AB***, ***CD*** и, ***MN***. Эти образующие проецируются на горизонтальную плоскость проекций в натуральную величину. Для построения приближенной развертки отсека цилиндрической поверхности дуга ***14*** аппроксимирована ломаной ***1234,*** состоящей из трех равных отрезков.

Строим развертку доли сферы. Для этого на свободном месте чертежа проводим горизонтальную прямую и на ней откладываем отрезок ***MN***. Через его середину (точку ***4***) проводим вертикальную прямую, на которой откладываем отрезки ***43, 32, 21.*** По обе стороны от вертикальной прямой через точки ***4, 3, 2*** строим соответственно горизонтальные отрезки ***M4 = 4N, C3 = 3D, A2 = 2B***.

Соединив точки ***M, C, A, 1*** и ***N, D, B, 1*** плавными линиями, получим фигуру, являющуюся условной разверткой половины доли поверхности сферы. Развертка доли поверхности сферы будет состоять из двух таких симметрично расположенных фигур.

Полная развертка поверхности сферы в нашем случае будет состоять из разверток шести ее долей.

Контрольные вопросы

1. Сущность операции проецирования. Виды проецирования.

2. Как строится центральная проекция точки?

3. В каком случае центральная проекция прямой линии представляет собой точку?

4. В чем заключается способ проецирования, называемый параллельным?

5. Общие свойства проецирования.

6. Как называются плоскости проекций $\mathbf{П_1, П_2, П_3}$?

7. В какой последовательности записываются координаты точки?

8. Какие знаки имеют координаты точки, расположенной в седьмом октанте?

9. Ортогональные проекции (метод Монжа).

10. Частные случаи расположения точек в пространстве.

11. Изображение линии на эпюре Монжа. Определитель линии. Прямая общего положения.

12. Перечислить и изобразить прямые частного положения в ортогональных проекциях.

13. Что называется следами прямой линии на плоскости проекций?

14. Условие принадлежности точки линии.

15. Взаимное расположение прямых линий на эпюре Монжа. Метод конкурирующих точек для определения видимости геометрических элементов.

16. Определители плоскости.

17. Плоскости частного положения.

18. Свойства плоскостей уровня и проецирующих плоскостей.

19. Условие принадлежности точки и прямой плоскости.

20. Главные линии плоскости.

21. Сущность способа перемены плоскостей проекций при решении метрических задач.

22. Сущность способа вращения при решении метрических задач. Вращение вокруг линии уровня.

23. Что такое образующая линия поверхности? Что такое направляющая линия? Что такое очерк поверхности?

24. Какая поверхность называется линейчатой? Линейчатые поверхности с одной направляющей и вершиной.

25. Поверхности, образованные двумя направляющими и плоскостью параллелизма.

26. Винтовые поверхности.

27. Как образуются поверхности вращения?

28. Перечислите основные свойства поверхности вращения.

29. Определитель поверхности вращения. Что называется параллелью, экватором, горлом и меридианом поверхности вращения?

30. Поверхности, образованные вращением плоской кривой.

31. Условие принадлежности точки поверхности.

32. Поверхности, образованные вращением прямой.

33. Поверхности, образованные вращением окружности.

34. Поверхности, образованные вращением кривых II порядка.

35. Какая поверхность называется нелинейчатой?

36. Какие бывают случаи пересечения поверхностей и чем они отличаются? Какие точки линии пересечения называются характерными?

37. Частные случаи пересечения поверхностей. Свойство проецирующей поверхности.

38. Конические сечения.

39. Общий случай пересечения поверхностей. Сущность метода. Алгоритм решения подобных задач.

40. Пересечение прямой с поверхностью (основная задача начертательной геометрии). Алгоритм решения задачи.

41. Какие поверхности относятся к развертываемым?

42. Какими свойствами обладают развертываемые поверхности?

43. Для каких поверхностей строятся приближенные и условные развертки?

44. Развертки гранных поверхностей.

45. Как строится развертки наклонного конуса.

46. Как строится развертка сферы.

П Р И Л О Ж Е Н И Я

Приложение 1

МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Метрическими называются задачи, в которых определяют расстояние или угол между геометрическими фигурами или их элементами. К метрическим относятся также задачи на построение угла или отрезка с наперед заданным значением соответственно градусной или линейной величины.

1. Определение угла между двумя пересекающимися прямыми

Известно, что если плоскость угла параллельна плоскости проекций, то угол проецируется на нее без искажения. Поэтому если плоскость угла занимает общее положение, то для определения его натуральной величины необходимо одним из способов преобразования чертежа перевести плоскость угла в положение, параллельное одной из плоскостей проекций. Наиболее рационально использовать для этого способ вращения плоскости угла вокруг линии уровня.

Пример 1. Определить натуральную величину угла между двумя пересекающимися прямыми ***a*** и ***b*** (рис. 114).

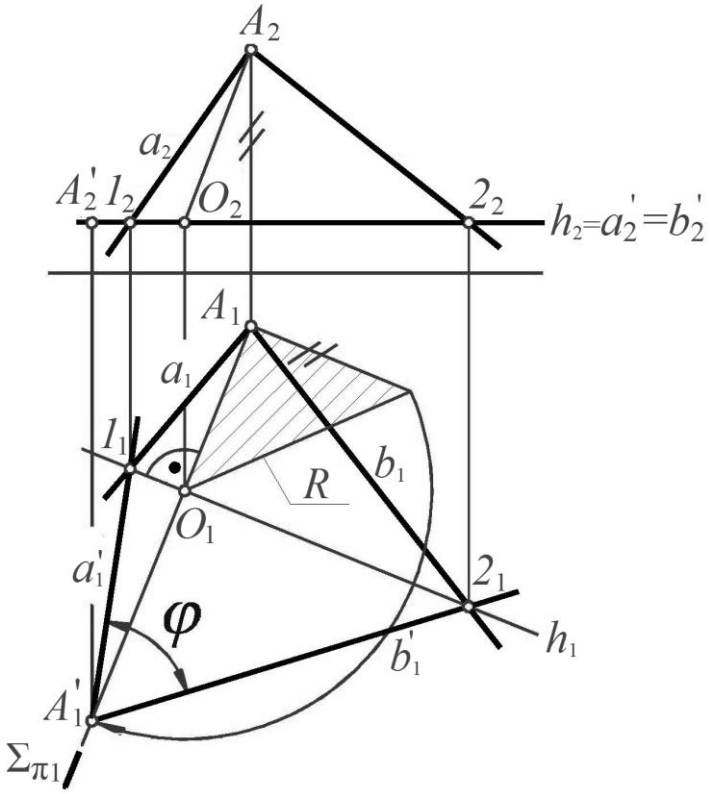


Рис. 114

Р е ш е н и е . Повернем плоскость, заданную двумя пересекающимися прямыми ***a*** и ***b***, вокруг принадлежащей ей горизонтали ***h*** так, чтобы плоскость заняла положение, параллельное горизонтальной плоскости проекций. Тогда искомый угол проецируется на эту плоскость без искажения. Точки ***1*** и **2**, принадлежащие оси вращения ***h***, не меняют своего положения в процессе преобразования.

Точка ***A*** вращается вокруг центра ***O*** в плоскости ***α***, перпендикулярной к оси вращения. Зная две проекции радиуса вращения точки ***A*** (A_1O_1, A_2O_2), способом прямоугольного треугольника найдем его натуральную величину *R*, новое положение точки ***A′*** (A_1', A_2').

Соединив точку A_1' с точками 1_1 и 2_1, определим натуральную величину угла **φ** между заданными пересекающимися прямыми.

2. Определение угла между двумя скрещивающимися прямыми

Мерой угла между двумя скрещивающимися прямыми служит плоский угол между двумя прямыми, проведенными из произвольной точки пространства параллельно данным скрещивающимся прямым.

Алгоритм решения задачи.

1. Взять в пространстве произвольную точку ***M***.
2. Через точку ***M*** провести две пересекающиеся прямые, параллельные двум заданным скрещивающимся прямым.
3. Определить натуральную величину плоского угла между проведенными прямыми.

3. Определение угла между прямой и плоскостью

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на данную плоскость.

Решение этой задачи значительно упрощается, если определить не угол между прямой и плоскостью (φ^0), а γ^0 – острый угол между прямой и перпендикуляром, опущенным из любой точки прямой на плоскость: $\varphi^0=90^0-\gamma^0$ (рис. 115).

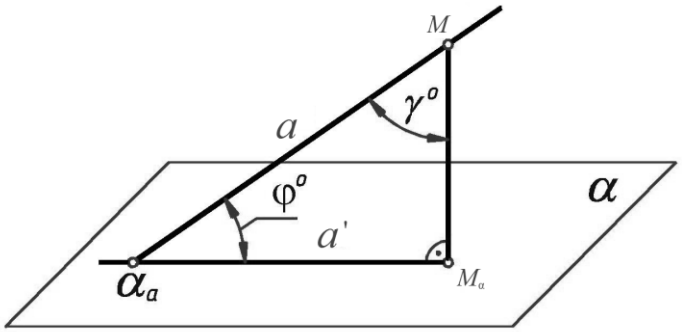


Рис.115

Алгоритм решения задачи.

1. На прямой выбрать произвольную точку ***M***.

2. Через точку ***M*** провести прямую, перпендикулярную плоскости.

3. Используя один из способов преобразования чертежа, определить натуральную величину угла γ – острого угла между заданной и проведенной прямыми.

4. Определить искомую величину угла между прямой и плоскостью: $\varphi^0=90^0-\gamma^0$.

Пример 2. Определить величину угла φ^0 между прямой ***a*** и плоскостью α, заданной треугольником ***ABC*** (рис. 116).

Р е ш е н и е . Строим проекции фронтали ***f*** и горизонтали ***h*** плоскости α. На прямой ***a*** выбираем произвольную точку ***M***, из которой опускаем перпендикуляр ***b*** на плоскость α ($b_1 \perp h_1'$; $b_2 \perp f_2'$). Величину угла γ^0 между прямыми ***a*** и ***b*** определим способом вращения вокруг линии уровня. Искомая величина угла между прямой ***a*** и плоскостью α равна: $\varphi^0=90^0-\gamma^0$.

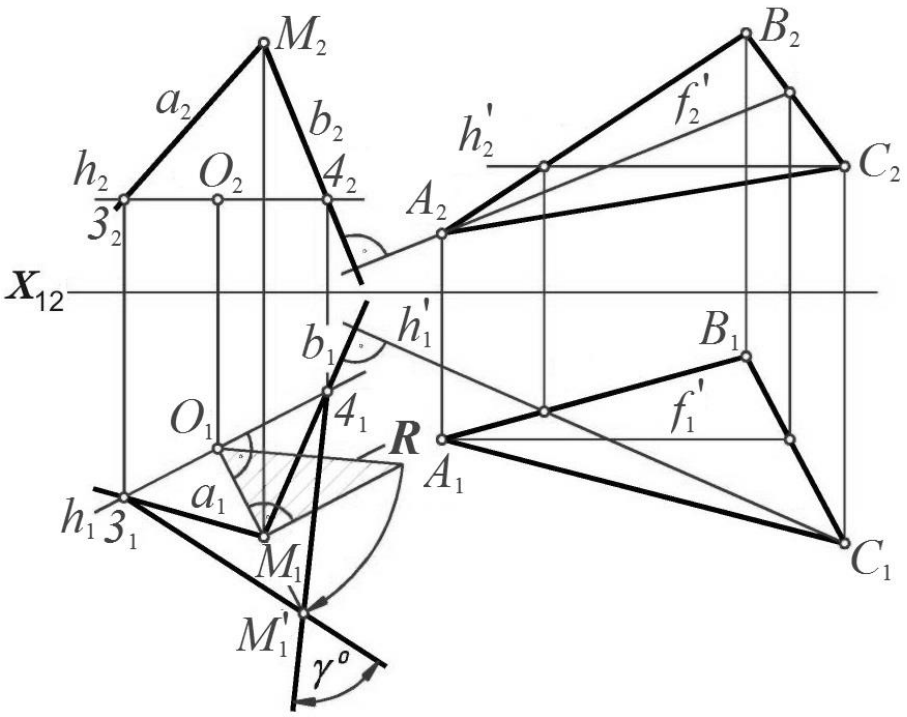


Рис. 116

4. Определение угла между двумя плоскостями

Мерой угла между двумя плоскостями φ^0 служит линейный острый угол, полученный от пересечения граней двугранного угла плоскостью, перпендикулярной к его ребру.

Если ребро двугранного угла известно, то для определения величины угла необходимо преобразовать чертеж так, чтобы ребро заняло проецирующее

положение (рис. 117). В этом случае обе грани проецируются на плоскость $\boldsymbol{П_5}$ в виде отрезков, острый угол между которыми равен искомому углу $\boldsymbol{\varphi^0}$ между двумя плоскостями.

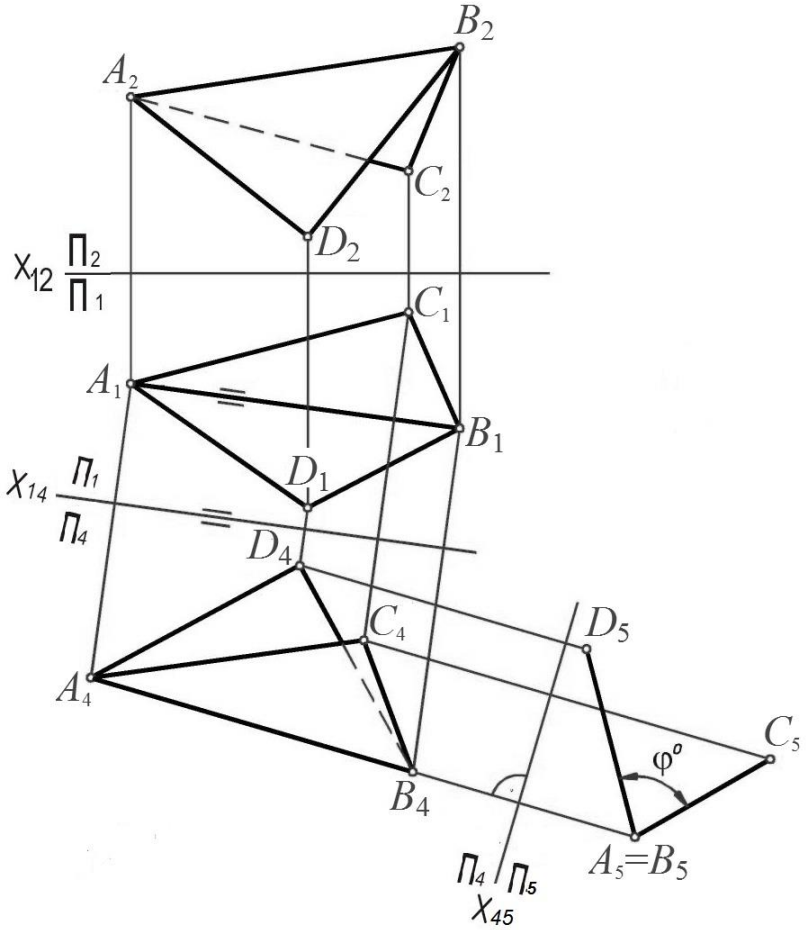


Рис. 117

Если ребро двугранного угла неизвестно, то в этом случае угол $\boldsymbol{\varphi^0}$ между двумя плоскостями проще определить как острый угол между двумя прямыми, проведенными из произвольной точки пространства перпендикулярно к заданным плоскостям.

5. Определение расстояния между двумя геометрическими фигурами

Расстояние между двумя геометрическими фигурами: точкой и прямой, двумя параллельными прямыми, плоскостью и параллельной ей прямой, двумя параллельными плоскостями – измеряется отрезком перпендикуляра между ними. Кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно отрезку их общего перпендикуляра, оно также равно расстоянию между параллельными плоскостями, в которых лежат скрещивающиеся прямые.

Для определения натуральной величины расстояния между двумя геометрическими фигурами удобно преобразовать чертеж так, чтобы одна или обе геометрические фигуры заняли проецирующее положение. В этом случае отрезок перпендикуляра между ними проецируется на соответствующую плоскость проекций без искажения.

Пример 3. Определить расстояние от точки ***D*** до плоскости, заданной треугольником ***ABC*** (рис. 118).

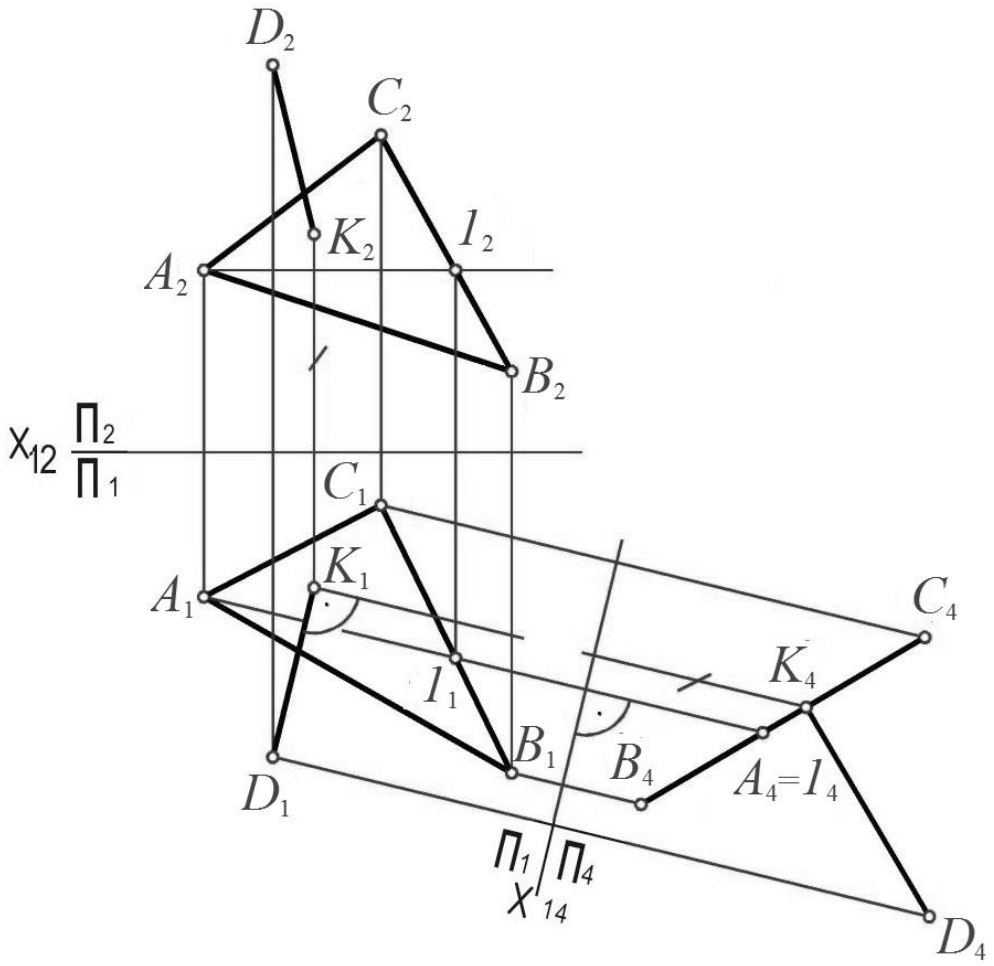


Рис. 118

Решение. Введем новую плоскость Π_4 так, чтобы плоскость треугольника ***ABC*** в системе плоскостей проекций Π_1 — Π_4 заняла проецирующее положение. Для этого построим новую ось x_{14} перпендикулярно горизонтали плоскости треугольника ***ABC***. В системе плоскостей Π_1 — Π_4 найдем проекции точки D_4 и вершин треугольника A_4, B_4, C_4. Искомое расстояние определится отрезком D_4K_4 перпендикуляра, проведенным из точки D_4 к прямой, в которую вырождается проекция треугольника на плоскость Π_4. Обратными преобразованиями найдем проекции основания ***K*** перпендикуляра в исходной системе плоскостей.

Пример 4. Определить кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми ***AB*** и ***CD*** (рис. 119).

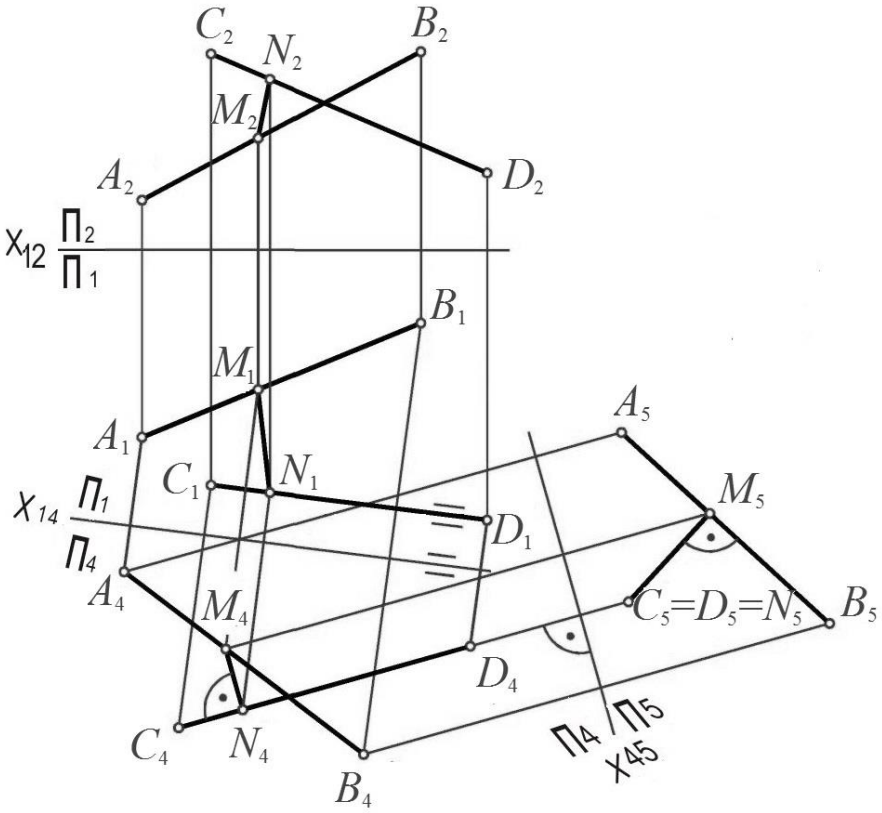


Рис. 119

Р е ш е н и е. Дважды сделаем замену плоскостей проекций так, чтобы в системе плоскостей **П4** — **П5** одна из прямых, например ***AB***, стала проецирующей.

Построим проекции перпендикуляра ***MN*** между прямыми ***AB*** и ***CD***, учитывая, что $M_5N_5 \perp A_5B_5$, а $M_4N_4 \perp C_4D_4$.

Искомое расстояние равно отрезку ***MN***, который проецируется на плоскость **П5** без искажения. Обратными преобразованиями найдем проекции отрезка ***MN*** в исходной системе плоскостей.

6. Построение линии пересечения двух плоскостей

Пример 5. Построить линию пересечения отсеков плоскостей, заданных треугольниками ***ABC*** и ***DEK.*** Определить видимость сторон треугольников относительно плоскостей проекций (рис. 120).

Р е ш е н и е. Способом замены плоскостей проекций переведем плоскость одного из треугольников, например ***ABC,*** в проецирующее положение. Для этого построим проекции ее горизонтали ***h*** и введем

плоскость проекций Π_4, перпендикулярную плоскости треугольника ABC и плоскости Π_1. Новая ось системы плоскостей Π_1 — Π_4 перпендикулярна h_1 – горизонтальной проекции горизонтали плоскости треугольника ABC.

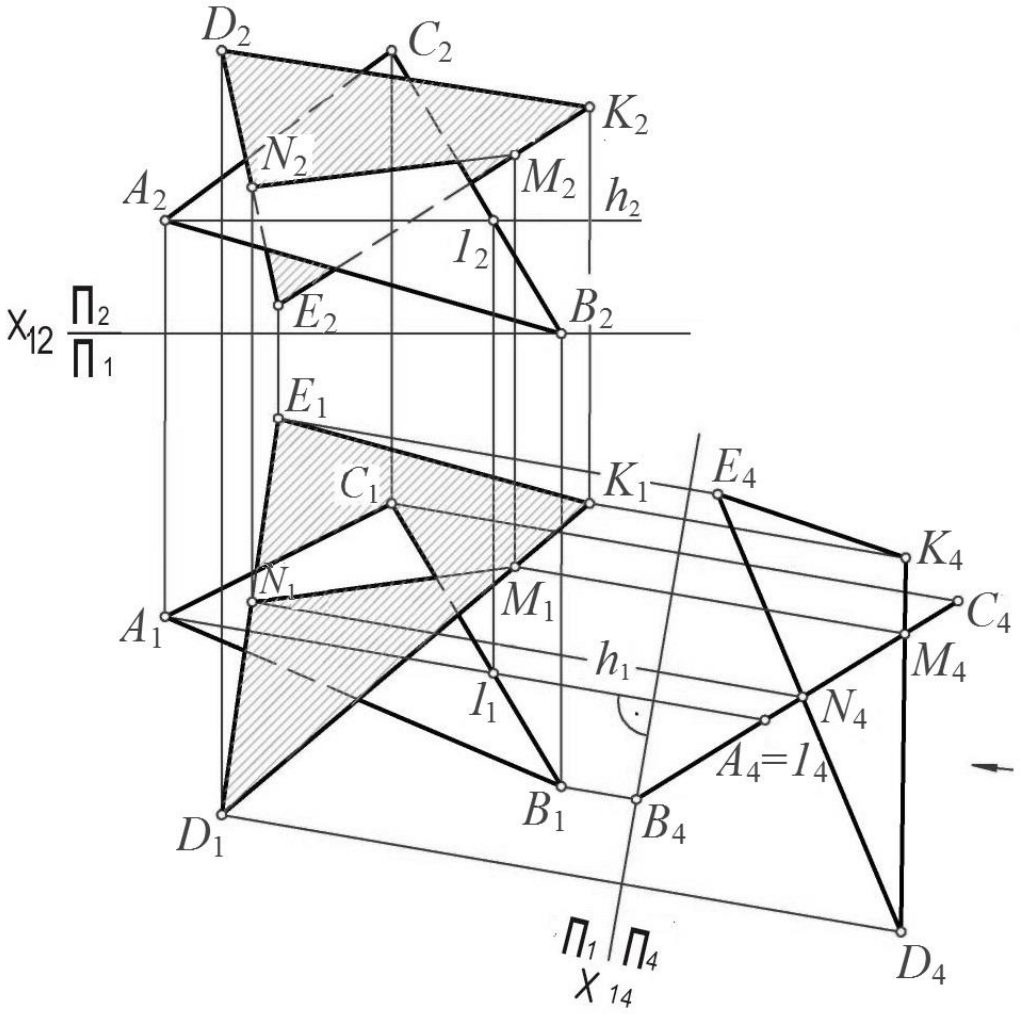


Рис. 120

Найдем проекции двух треугольников на плоскость Π_4 – $A_4B_4C_4$ и $D_4E_4K_4$. Проекция треугольника $A_4B_4C_4$ вырождается в прямую, совпадающую с фронтальным следом его плоскости. Плоскости заданных треугольников пересекаются по прямой линии. Одна проекция этой прямой линии известна – она совпадает с фронтальным следом плоскости треугольника ABC и пересекается в точках M_4 и N_4 с проекциями сторон D_4E_4 и D_4K_4.

Обратными преобразованиями в системе плоскостей Π_1 — Π_2 сначала находим проекции точек M и N, а затем и линии пересечения треугольников. Видимость сторон треугольников относительно плоскостей проекций определяется с помощью конкурирующих точек или по направлению стрелок.

Приложение 2

ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Задачи, связанные с решением вопросов взаимного расположения геометрических фигур на комплексном чертеже, называются позиционными.

Среди позиционных можно выделить две группы задач, представляющих наибольший практический интерес. К ним относятся задачи на взаимную принадлежность и задачи на взаимное пересечение.

Решение позиционных задач на принадлежность предполагает работу с линиями поверхности графически простыми, например прямой или окружностью. Это необходимо для того, чтобы не усложнять построений на комплексном чертеже. Для правильного выбора этих линий надо знать, какие семейства линий несет на себе та или иная поверхность.

Задачи на взаимное пересечение связаны с построением точек, принадлежащих одновременно двум рассматриваемым геометрическим образам, например прямой и плоскости, двум плоскостям, плоскости и поверхности, двум поверхностям. Каждую из этих точек строят в пересечении двух вспомогательных линий. Эти линии должны быть графически простыми и принадлежать одной вспомогательной плоскости или поверхности. Выбор вспомогательных, поверхностей (посредников), несущих в себе вспомогательные линии, зависит от формы пересекающихся поверхностей. Совокупность построенных общих точек позволяет построить линию пересечения геометрических образов.

1. Принадлежность точки поверхности

Условие принадлежности точки поверхности: *точка принадлежит поверхности, если она принадлежит какой-либо линии этой поверхности.* Тогда эта задача основывается на принадлежности точки линии. В качестве линии на поверхности, по возможности, следует выбирать графически простые линии или линии, которые проецируются в графически простые (прямые или окружности).

Пример 1. Даны поверхность вращения $\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{l}$) и проекции точек $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}_2)$ и $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}_2)$ – (проекции точек видимые) (рис. 121). Построить недостающие проекции точек $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}_1)$ и B($\boldsymbol{B}_1$), если известно, что они принадлежат поверхности.

Р е ш е н и е. Исходная поверхность – поверхность вращения. Графически простыми линиями на ней являются окружности, которые на $\boldsymbol{\Pi}_1$ проецируются без искажения, а на $\boldsymbol{\Pi}_2$ – в отрезки прямых, перпендикулярных оси $\boldsymbol{i}$ ($\boldsymbol{i}_2$).

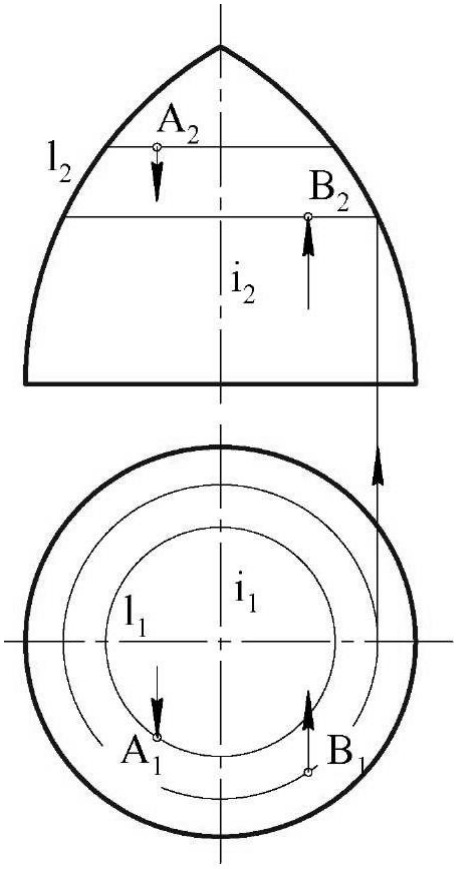


Рис. 121

Для построения недостающих проекций точек проведем проекции окружностей, принадлежащих поверхности и проходящих через заданные проекции точек. Построим недостающие проекции точек из условия принадлежности их проекциям окружностей.

2. Принадлежность линии поверхности

Данная задача принципиально не отличается от задачи на принадлежность точки поверхности. При ее решении на заданной проекции линии выделяют конечное число точек, недостающие проекции которых необходимо построить. Заметим, что в первую очередь следует построить характерные точки линии, к которым относят:

а) точки перемены видимости проекций линии, т.е. точки, задающие границы видимых и невидимых участков проекций линии относительно какой-либо плоскости проекций;

б) экстремумы проекций линии;

в) точки, удаленные на экстремальные расстояния от плоскостей проекций и т.п., а затем строят проекции других точек – промежуточных.

Пример 2. Даны коническая поверхность вращения и горизонтальная проекция линии $m(m_1)$, принадлежащей поверхности (рис. 122). Построить недостающие проекции линии.

Решение. На линии выделим характерные точки. К ним относятся точки ***1, 2, 3, 4*** и ***5***. Точки ***1*** и ***2*** лежат на основании отсека конической поверхности – граничные. Точки ***3*** и ***5*** принадлежат очерковым образующим поверхности – точки перемены видимости. Точка ***4*** – точка экстремума фронтальной и профильной проекций линии, она удалена на наибольшее расстояние от Π_1. Построения недостающих проекций точек ***1***, ***2***, ***4***, ***5*** выполним с помощью окружностей, а точки ***3*** – с помощью прямолинейной образующей.

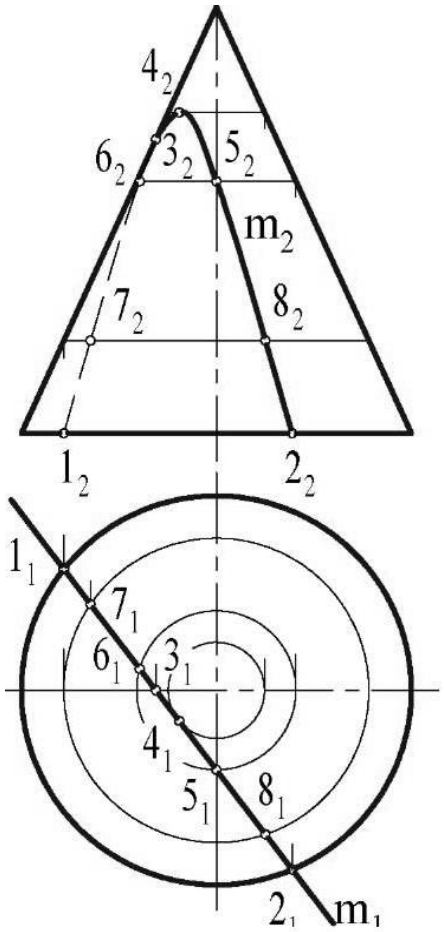


Рис. 122

Затем построим проекции промежуточных точек ***7***, ***8*** и соединим одноименные проекции точек с учетом видимости. На Π_2 невидимым является участок 1_2-7_2-3_2. Этот участок расположен на невидимых относительно соответствующей плоскости проекций части конической поверхности.

3. Пересечение прямой и плоскости

Пример 3. Даны плоскость ∑ и прямая ***AB*** (рис. 123, 124). Построить точку пересечения прямой и плоскости.

Р е ш е н и е . Прямая и плоскость пересекаются в некоторой точке ***M***. Следовательно, эта точка должна принадлежать как исходной прямой, так и плоскости ∑, а значит и некоторой прямой ***KL*** этой плоскости. Таким образом, поставленная задача сводится к отысканию некоторой прямой ***n***, принадлежащей плоскости ***Q*** и пересекающей заданную прямую ***m***.

Для этого заключим прямую ***AB*** в проецирующую плоскость ***Q*** (***Q***⊥**П₂**). След этой плоскости $Q_{П2}$ будет совпадать с A_2B_2. Отрезок K_2L_2 есть линия пересечения плоскостей ∑ и ***Q*** (рис. 124). Построим горизонтальную проекцию прямой K_1L_1 и найдем точку пересечения проекций прямых ***AB*** и ***KL***. Точка ***M*** (M_1, M_2) – искомая.

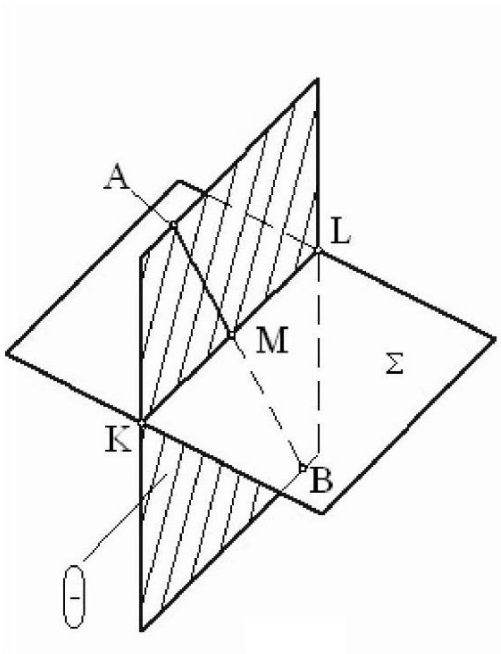


Рис. 123

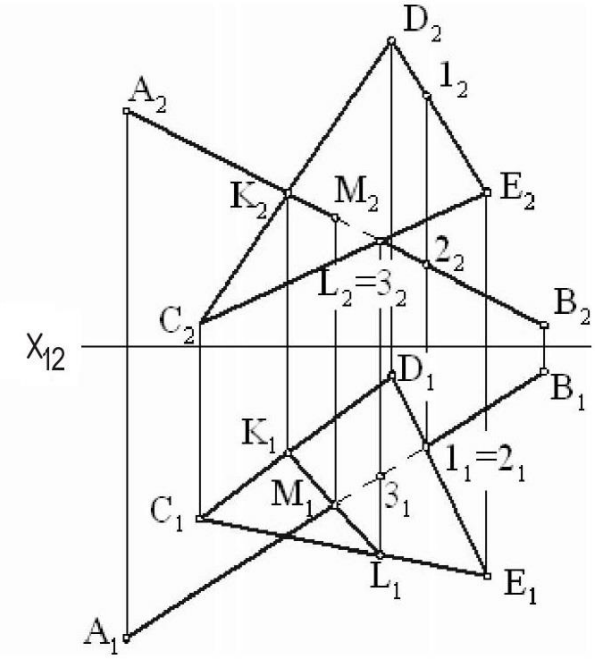


Рис. 124

Определим видимость прямой относительно плоскостей проекций. Для установления видимости прямой относительно **П₂** возьмем фронтально конкурирующие точки ***L*** и **3**, а при установлении видимости относительно **П₁** – горизонтально конкурирующие точки **1** и **2.**

Задача на пересечение прямой и плоскости упрощается, если прямая или плоскость занимают проецирующее положение.

Пример 4. Даны прямая ***EF*** общего положения и фронтально проецирующая плоскость ∑ (рис. 125). Построить точку пересечения прямой и плоскости.

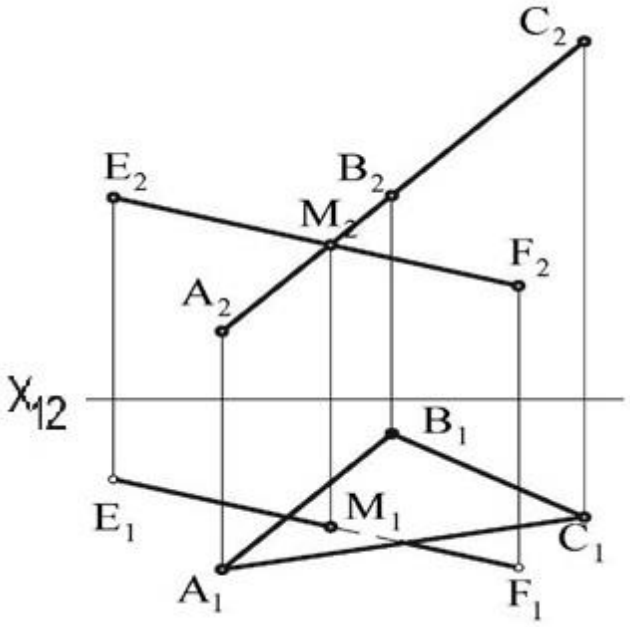


Рис. 125

Р е ш е н и е. Определим фронтальную проекцию точки ***M***(***M*₂**), расположенную в пересечении следа плоскости ∑ и **E₂F₂** (прямая, расположенная в плоскости ∑ и конкурирующая с ***EF***, на ***П*₂** совпадает со следом плоскости). Найдем горизонтальную проекцию точки ***M***(***M*₁**) и установим видимость проекций прямой, используя метод конкурирующих точек.

4. Пересечение линии и поверхности

Пример 5. Даны прямая ***n*** и сфера (рис. 126). Построить точки пересечения прямой и поверхности.

Р е ш е н и е. Через прямую ***n*** проведем секущую плоскость-посредник (***Q***) и построим линию пересечения этой плоскости с поверхностью сферы (эллипс). Определим точки пересечения построенного эллипса и прямой ***n***, которые, в свою очередь, являются точками пересечения прямой *n* с поверхностью сферы, и определим видимость прямой *n*. Введем на поверхности сферы линию ***m***, например горизонтально-конкурирующую с прямой ***n***. Кривая ***m*** – окружность.

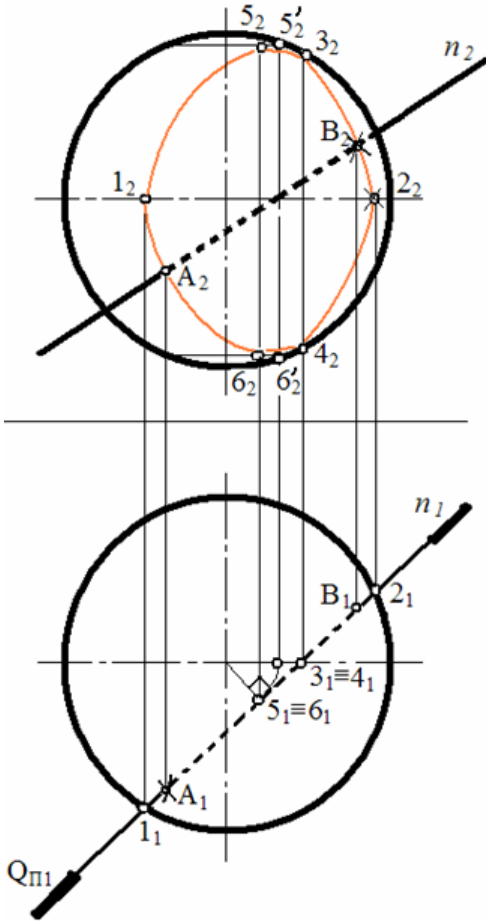


Рис. 126

Пример 5. Даны прямая ***n*** и коническая поверхность (рис. 127). Построить точки пересечения линии и поверхности.

Р е ш е н и е Поставленную задачу можно решить, задав на конической поверхности линию m, конкурирующую с прямой ***n*** относительно плоскости проекций $\mathbf{П_1}$ (или $\mathbf{П_2}$). Так как заданная поверхность линейчатая, то в качестве линии m на поверхности целесообразно взять прямую (или прямые) – образующую. Тогда алгоритм решения задачи будет следующим.

1. Спроецируем из точки ***S*** прямую ***n*** на плоскость $\mathbf{П_1}$, т.е. определим центральную проекцию прямой ***n*** на плоскость $\mathbf{П_1}$. Для этого проведем два проецирующих луча через точки **1** и **5** прямой n до пересечения с плоскостью проекций $\mathbf{П_1}$.

2. Построим образующие ***m*** и ***n*** на конической поверхности, конкурирующие с ***n*** относительно $\boldsymbol{П_1}$ при ее центральном проецировании. Для этого вначале определим точки $\mathbf{3(3_1 3_2)}$ и $\mathbf{4(4_1 4_2)}$, в которых проецирующая плоскость пересекает основание отсека конической поверхности.

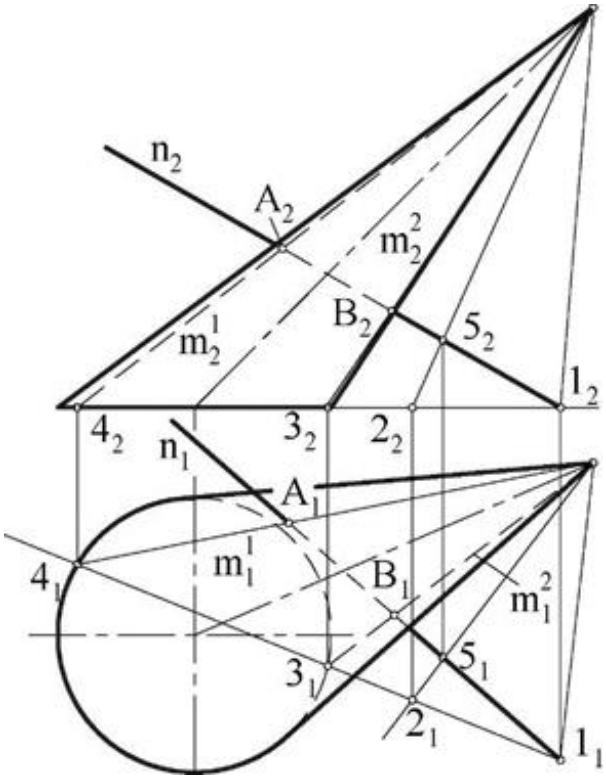


Рис. 127

3. Найдем точки ***A*** и ***B*** пересечения прямой ***n*** с образующими $\boldsymbol{m^1}$ и ***m***. Точки ***A*** и ***B*** – искомые.

4. Установим видимость проекций прямой.

5. Пересечение поверхности с плоскостью

Линия пересечения поверхности с плоскостью представляет собой плоскую кривую, называемую сечением. Точки этой кривой можно рассматривать как точки пересечения линий поверхности с плоскостью или прямых плоскости с поверхностью. Отсюда следует два варианта построения сечения: 1) выбираем конечное число линий на поверхности и определяем точки пересечения их с плоскостью; 2) выделяем конечное число прямых на плоскости и строим точки пересечения их с поверхностью.

Построение сечения существенно упрощается, если плоскость занимает проецирующее положение. Это связано с тем, что проецирующая плоскость характеризуется собирательным свойством.

Пример 6. Построить проекции сечения конической поверхности вращения с фронтально проецирующей плоскостью ***D*** (рис. 128).

Р е ш е н и е Заданная плоскость ***D*** пересекает исходную поверхность по эллипсу, фронтальная проекция которого расположена на следе этой плоскости.

Горизонтальную проекцию сечения строим по точкам в соответствии с задачей на принадлежность линии поверхности.

Проекцию эллипса на плоскость $\mathbf{П_1}$ можно построить также по его большой $\mathbf{A_1B_1}$ и малой $\mathbf{C_1D_1}$ осям.

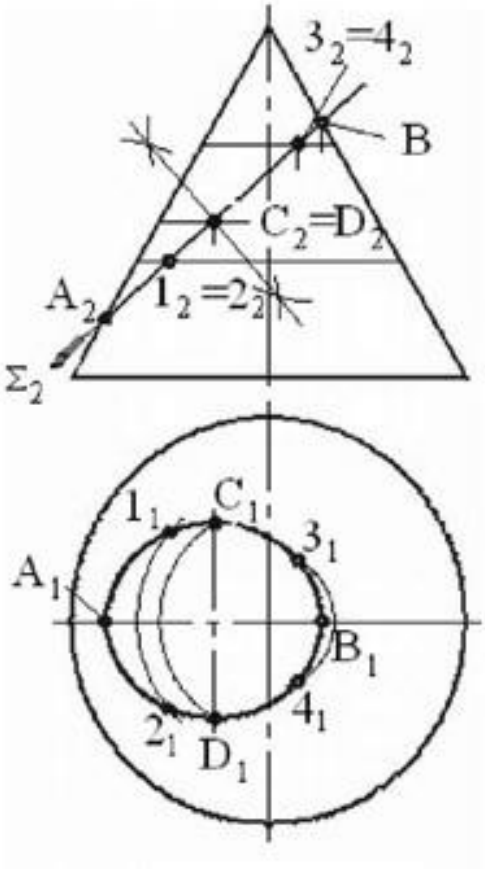


Рис. 128

Пример 7. Построить линию пересечения поверхности призмы ***Г*** с конусом ***Σ*** (рис. 129).

Р е ш е н и е . Три боковые грани призмы являются фронтально проецирующими плоскостями, следовательно, построение линии пересечения сводится к решению задачи на пересечение поверхности проецирующей секущей плоскостью и прямой линией. Линия пересечения данных поверхностей представляет собой ломаную линию, состоящую из трех плоских кривых. Грани призмы пересекают поверхность конуса по окружности, неполному эллипсу и неполной параболе.

В данном случае вспомогательными плоскостями можно не пользоваться, так как фронтальные проекции точек линии пересечения известны. Горизонтальные проекции линий пересечения строим по точкам с помощью трех параллелей конуса I, II, III, проведенных через характерные точки линии пересечения – ***1***$_2$, ***2***$_2$, ***3***$_2$.

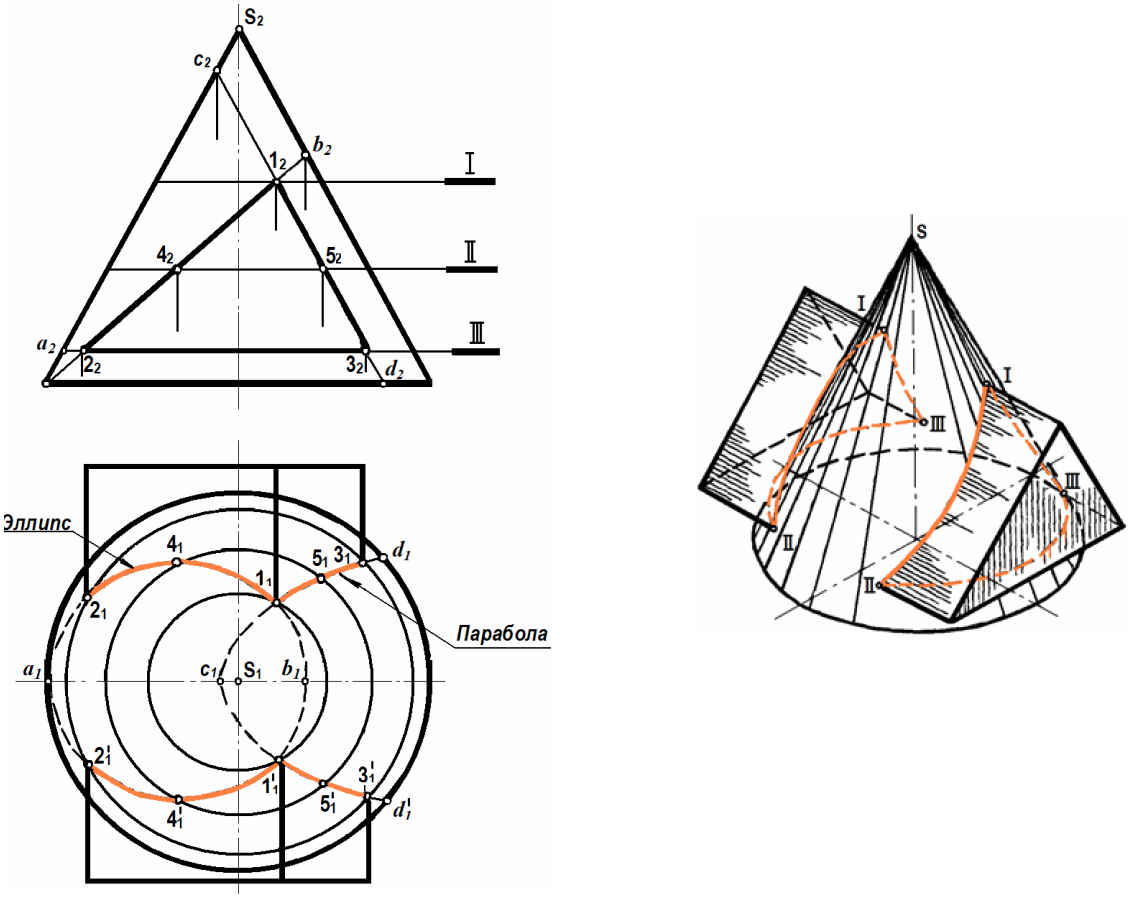


Рис. 129

Промежуточная точка ***4***$_1$, ***4***$_2$ выбрана посередине отрезка ***a***$_2$***b***$_2$, который является большой осью эллипса. Одновременно определим и дополнительную точку ***5***$_2$.

Приложение 3

ГРАФИЧЕСКИЕ И ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО КУРСУ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ «ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ, ПРЯМОЙ ЛИНИИ. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ»

Разработанная система тестовых задач включает индивидуальные задачи для самостоятельного выполнения.

ОБЩИЕ ЗАДАНИЯ. Выберите номер правильного ответа.

Задание 1. Оси **X** принадлежит точка:

1) ***A*** (0,0,10); 2) ***B*** (10,0,0); 3) ***C*** (0,10,0).

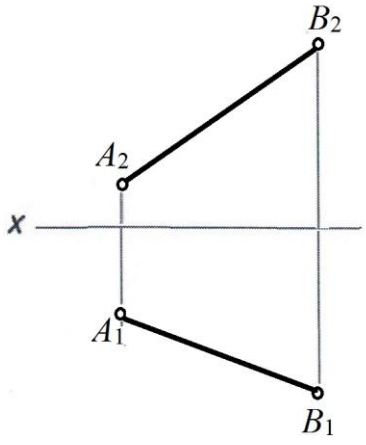
Задание 2. Точка **A** (20,30,0) принадлежит плоскости:

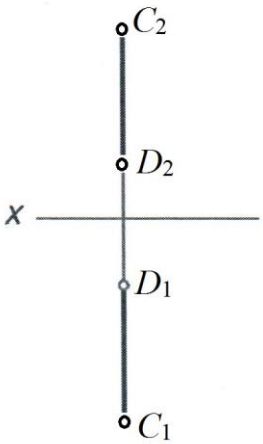
1) **П 1**; 2) **П 2**; 3) **П 3**.

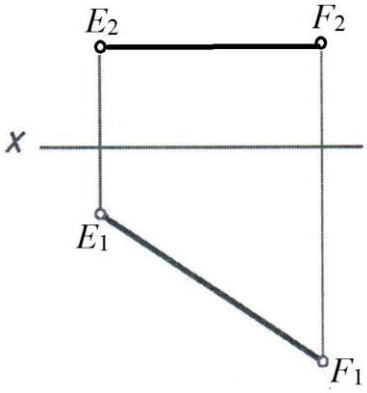
Задание 3. Профильную проекцию точки определяют координаты:

1) x, z; 2) x, y; 3) y, z.

Задание 4. Горизонтальная прямая изображена на эпюре:







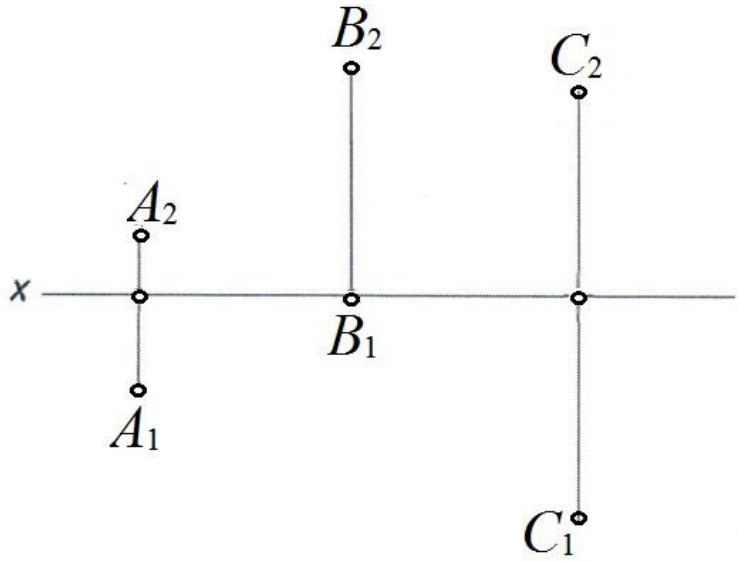
1) **A**; 2) **B**; 3) **C**.

Задание 5. Точка ***B*** (20,50,40) находится ближе к плоскости:

1) **П 1**; 2) **П 2**; 3) **П 3**.

Задание 6. Наиболее удалена от фронтальной плоскости проекций точка:

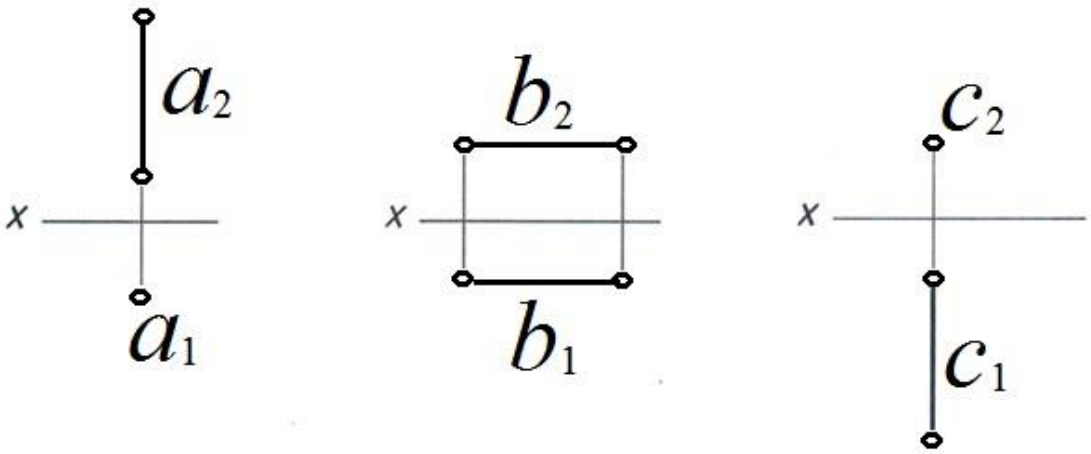
1) **A**; 2) **B**; 3) **C**.



Задание 7. Точка ***C*** (40,30,50) находится дальше от плоскости:

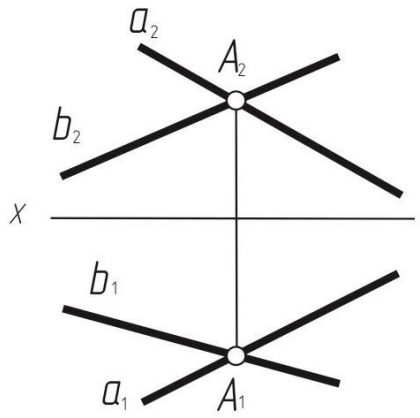
1) **П₁**; 2) **П₂**; 3) **П₃**.

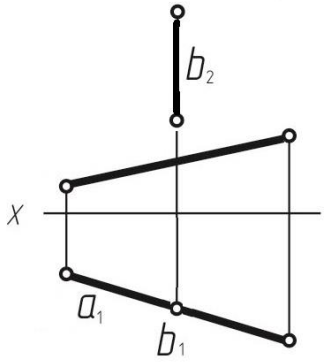
Задание 8. Фронтально проецирующая прямая изображена на эпюре:

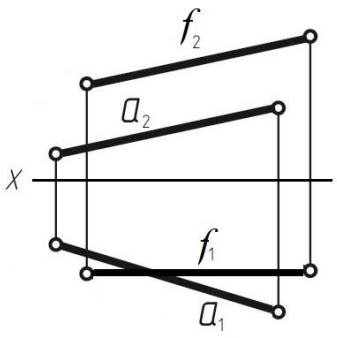


1) **A**; 2) **B**; 3) **C**.

Задание 9. Пересекающиеся прямые изображены на эпюре:

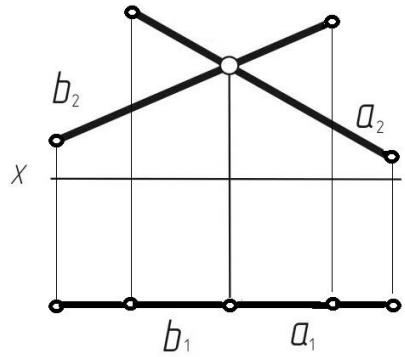


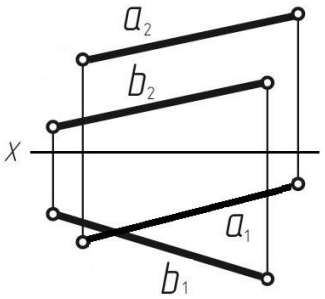


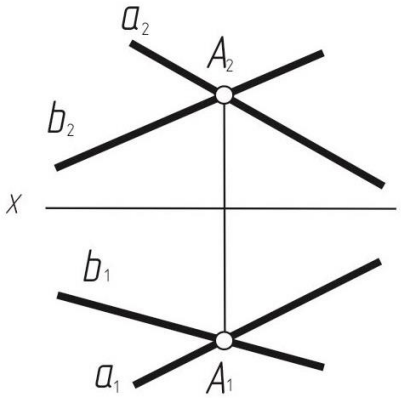


1) **A**; 2) **B**; 3) **C**.

Задание 10. Скрещивающиеся прямые изображена на эпюре:







1) **A**; 2) **B**; 3) **C**.

ЗАДАНИЯ № 1. Выберите номер правильного ответа

Задание 1. Оси **Z** принадлежит точка:

1) ***A*** (0,20,0); 2) ***B*** (20,0,0); 3) ***C*** (0,0,20).

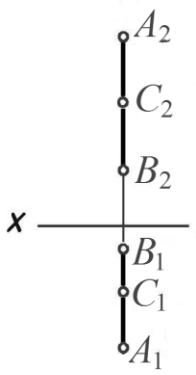
Задание 2. Горизонтальной плоскости проекций принадлежит точка:

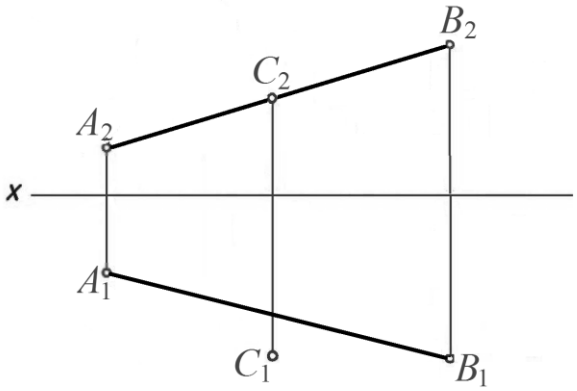
1) ***A*** (0,5,10); 2) ***B*** (10,5,0); 3) ***C*** (5,0,10).

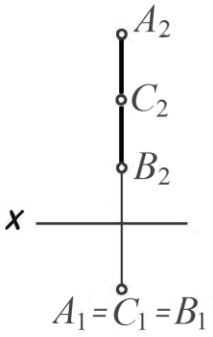
Задание 3. Фронтальную проекцию точки определяют координаты:

1) x, z; 2) x, y; 3) y, z.

Задание 4. Точка ***C*** не принадлежит прямой ***AB*** на эпюре:

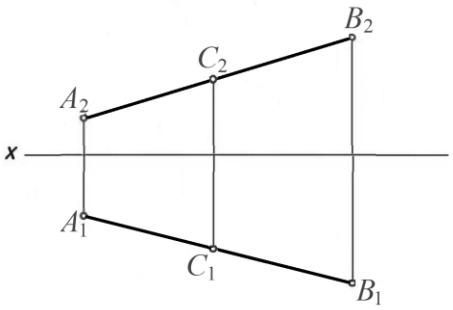


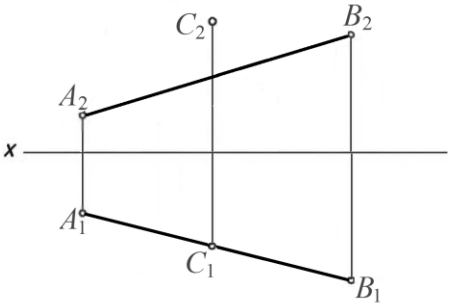


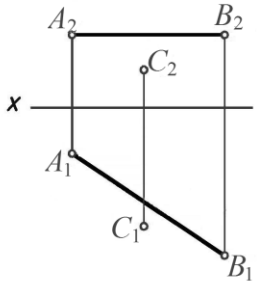


1) **A**; 2) **B**; 3) **C**.

Задание 5. Точка ***C*** находится выше прямой ***a*** на эпюре:





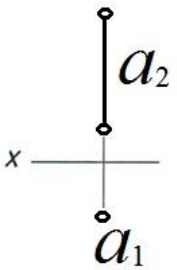


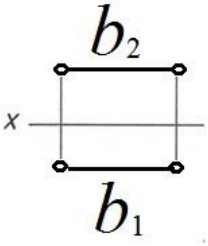
1) **A**; 2) **B**; 3) **C**.

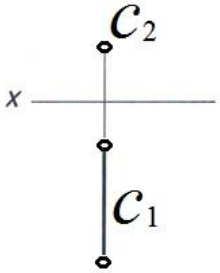
Задание 6. Наиболее близка к плоскости $\mathbf{П_3}$ точка:

1) ***A*** (30,10,20); 2) ***B*** (20,10,30); 3) ***C*** (10,20,30).

Задание 7. Профильно проецирующая прямая изображена на эпюре:







1) **A**; 2) **B**; 3) **C**.

Задание 8. Прямая ***DE*** является горизонтальной в случае:

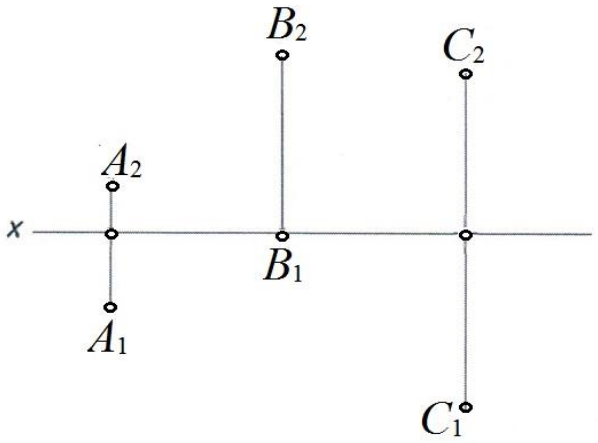
1) ***D*** (10,15,5), ***E*** (20,15,10);
2) ***D*** (15,20,10), ***E*** (10,20,20);
3) ***D*** (20,10,15), ***E*** (10,20,20).

ЗАДАНИЯ № 2. Выберите номер правильного ответа

Задание 1. На эпюре совпадают горизонтальная и фронтальная проекции точки, принадлежащей оси:

1) x; 2) y; 3) z.

Задание 2. Наиболее удалена от фронтальной плоскости проекций точка:



1) **A**; 2) **B**; 3) **C**.

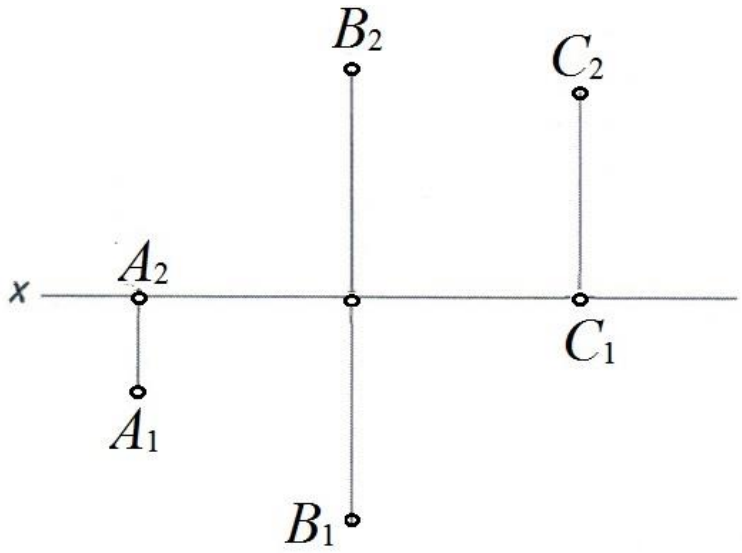
Задание 3. След прямой линии – это:
1) точка пересечения прямой с координатной осью;
2) точка пересечения прямой с плоскостью проекций;
3) точка в пространстве, через которую проходит прямая.

Задание 4. К плоскости $\mathbf{П_3}$ наиболее близка точка:

1) ***A*** (10,15,20); 2) ***B*** (15,10,5); 3) ***C*** (5,20,15).

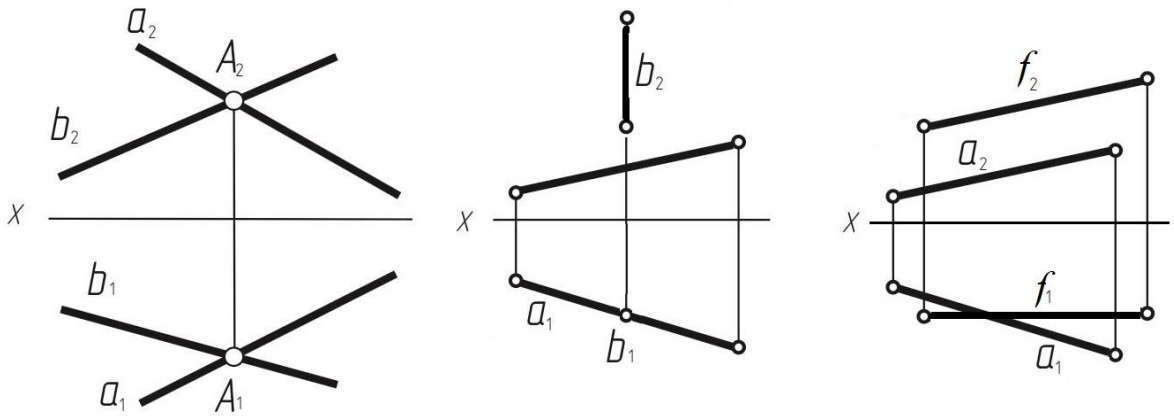
Задание 5. Если пара одноименных проекций параллельна, а другая пересекается, то прямые:
1) параллельны;
2) скрещиваются;
3) пересекаются.

Задание 6. Фронтальной плоскости проекций принадлежит точка:



1) **A**; 2) **B**; 3) **C**.

Задание 7. Пересекающиеся прямые изображены на эпюре:



1) **A**; 2) **B**; 3) **C**.

Задание 8. Длина проекции отрезка равна длине самого отрезка в случае прямой:

1) общего положения;
2) уровня;
3) проецирующей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ И РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Гордон В.О. Курс начертательной геометрии: учеб. пособие для вузов / В.О. Гордон, М.А. Семенцов-Огиевский; под ред. В.О. Гордон, Ю.Б. Иванова. – 24-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2000. – 272 с.

2. Тарасов Б.Ф. Начертательная геометрия: учебник для вузов / Б.Ф. Тарасов, Л.А. Дудкина, С.О. Немолотов. – 3-е изд., стереотип. – СПб.: Лань, 2003. – 231 с.

3. Соломонов К.Н. Начертательная геометрия: учебник для вузов / К.Н. Соломонов, Е.Б. Бусыгина, О.Н. Чиченева. – М.: МИСИС; ИНФРА-М, 2004. – 160 с.

4. Крылов Н.Н. Начертательная геометрия: учебник для вузов / под ред. Н.Н. Крылова. – 9-е изд., стереотип. – М.: Высш. шк., 2006. – 224 с.

5. Стрижаков А.В. Начертательная геометрия: учеб. пособие / А.Л. Мартиросов, А.Е. Кубарев. – Ростов н/Д: Феникс, 2004. – 320 с.

6. Бударин О.С. Начертательная геометрия: краткий курс: учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по напр. и спец. в области техники и технологии / О.С. Бударин. – 2-е изд., испр. – СПб.: Лань, 2009. – 368 с.

Дополнительная литература

1. Крылов Н.Н., Иконникова Г.С., Николаев В.Л., Васильев В.Е. Начертательная геометрия: учебник для вузов / под ред. Н.Н. Крылова. – 7-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 2000. – 224 с.: ил.

2. Короев Ю.И. Начертательная геометрия: учебник для вузов / Ю.И. Короев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Архитектура-С, 2004. – 424 с.

3. Сабирова Н.К., Степанов А.П., Золотоносов Я.Д. Тесты по начертательной геометрии: учеб. пособие по курсу «Начертательная геометрия. Инженерная графика». – Казань: КГЭУ, 2003. – 98 с.

4. Муртазина Д.Н. Начертательная геометрия: конспект лекций. – Казань: КГЭУ, 2003. – 116 с.

5. Степанов А.П., Золотоносов Я.Д. Теория и практика организации дифференцированной графической подготовки студентов в техническом вузе / А.П. Степанов, Я.Д. Золотоносов. – Казань: КГЭУ, 2006. – 144 с.

Учебно-методическое обеспечение

1. Фролов С.А. Сборник задач по начертательной геометрии / С.А. Фролов. – М.: Машиностроение, 1980. – 142 с.

2. Гордон В.О. Сборник задач по курсу начертательной геометрии: учеб. пособие для вузов / В.О. Гордон, Ю.Б. Иванов, Т.Е. Солнцева. – М.: Высш. шк., 2000. – 320 с.

3. Керн Т.А. Сборник задач и заданий по начертательной геометрии. – Казань: КГАСА, 2001. – 122 с.

4. Галлямова З.О. Начертательная геометрия (краткий курс). – Казань: КГАСУ, 2010. – 104 с.

Интернет-источники

1. htlp://graph.power.nstu.m/wohlcin/umm/GraphbookybooMndex.htm.
2. http ://traffic. spb.ru/geom/menu.html.
3. http://www.informika.ru/text/database/geom/.
4. http://agd.mmf.spbstu.ru/Tasks/ToolBookyBook.htm.
5. http://innov.ncic.ru/bases/u/showbook.html?id=405.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение……3
Глава 1. Основы теории проецирования.....….……...4
1.1. Центральное проецирование……...…..…4
1.2. Параллельное проецирование……....……....……6
1.3. Основные инвариантные свойства параллельного проецирования ….....…..7
Глава 2. Точка……8
2.1. Проекции точки (прямоугольные проекции или метод Монжа)……..…8
2.2. Частные случаи расположения точек в пространстве……....…..…10
2.3. Построение дополнительной профильной плоскости проекций…..……...10
Глава 3. Прямая…….……..…13
3.1. Проекции прямой линии ……...……..….13
3.2. Прямые общего положения…….…...14
3.3. Прямые частного положения……14
3.3.1. Прямые уровня……..……..……..……15
3.3.2. Проецирующие прямые……..……..……16
3.4. Следы прямой…….……17
3.5. Взаимное положение двух прямых……18
3.6. Определение видимости геометрических элементов . ……..…19
Глава 4. Плоскость……...……21
4.1. Способы задания плоскости на комплексном чертеже……..……21
4.2. Положения плоскости в пространстве……...……...23
4.2.1. Плоскости общего положения……23
4.2.2. Плоскости уровня……..……...24
4.2.3. Проецирующие плоскости……..…..…..……....25
4.3. Прямая и точка в плоскости.……....…..…….26
4.4. Главные линии плоскости……27
Глава 5. Способы преобразования комплексного чертежа…….……30
5.1. Способ замены плоскостей проекций……30
5.1.1. Замена одной плоскости проекций……..……30
5.1.2. Замена двух плоскостей проекций……..……32
5.2. Способ вращения……...……34
5.2.1. Способ вращения вокруг линии уровня……..……34
5.2.2. Способ вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций……..……...36
Глава 6. Поверхность ……..38
6.1. Основные понятия и определения……38
6.2. Поверхности линейчатые……..…...……40
6.2.1. Линейчатые поверхности с одной направляющей…..…...……..40

6.2.2. Линейчатые поверхности с двумя направляющими и плоскостью параллелизма (поверхности Каталана)……..…...……..41
6.2.3. Линейчатые поверхности с тремя направляющими…..……....……43
6.3. Винтовые поверхности……...……...…….44
6.4. Поверхности вращения…….....……...45
6.5. Поверхности нелинейчатые……...……49
6.5.1. Нелинейчатые поверхности с образующей переменного вида…...…….49
6.5.2. Нелинейчатые поверхности с образующей постоянного вида…...……50
Глава 7. Позиционные задачи……..…..52
7.1. Частный случай построения линии пересечения двух поверхностей…….. 52
7.2. Свойство проецирующей поверхности…….…….53
7.3. Общий случай построения линии пересечения двух поверхностей…….54
7.4. Пересечение кривой поверхности плоскостью……..……..…….58
7.5. Пересечение поверхности вращения плоскостью…….58
7.6. Пересечение кривой поверхности прямой линией……60
Глава 8. Развертка поверхностей……...……...…….62
8.1. Основные свойства развертки поверхности……..……..63
8.2. Построение точных разверток многогранников……...……..63
8.3. Приближенная развертка развертываемых поверхностей…..……...66
8.4. Условная развертка неразвертываемых поверхностей…….68
Контрольные вопросы……...…….70
Приложения……....……...72
Приложение 1. Метрические задачи…….…..……..……...73
Приложение 2. Позиционные задачи……...……..……..……80
Приложение 3. Графические и тестовые задания по курсу начертательной геометрии «Проекции точки, прямой линии. Взаимное положение прямых в пространстве»…….89
Список использованной и рекомендуемой литературы……..……95

Белавина Татьяна Владимировна
Золотоносов Яков Давидович

ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА
КУРС НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебно-методическое пособие

Редактор Е.А. Кириллович

Издательство
Казанского государственного архитектурно-строительного университета
Подписано в печать 18.08.14 Формат 60x84/16
Заказ № 310 Печать ризографическая Усл.-печ. л. 6,2
Тираж 120 экз. Бумага офсетная № 1 Уч.-изд. л. 6,2

Отпечатано в полиграфическом секторе
Издательства КГАСУ.
420043, Казань, ул. Зеленая, 1.