

Олимпиада «Юный инженер», 2-й тур

1. Материальная точка начинает соскальзывать с верхней точки поверхности полусферы радиуса $R = 75$ см. На какой высоте h она оторвется от поверхности полусферы? Трением пренебречь. Ответ выразите в метрах и округлите до сотых. (Макс. балл 10).
2. Человек массой $m_1 = 70$ кг движется по лодке массой $m_2 = 130$ кг от кормы к носу со скоростью $v = 4$ м/с относительно лодки. С какой скоростью u будет двигаться лодка относительно воды? Силу сопротивления не учитывать. Ответ выразите в м/с и округлите до сотых. (Макс. балл 10).
3. Тяжёлый шарик подвешен на нити длиной $l = 1$ м. Нить равномерно вращается в пространстве, образуя с вертикалью угол $\alpha = 60^\circ$ (конический маятник). Сколько **полных** оборотов сделает шарик за время $t = 1$ мин? Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с². Ответ округлите до целых. (Макс. балл 25).
4. Конденсатор ёмкостью $C_1 = 1$ мкФ заряжен до напряжения $U_1 = 100$ В. Другой конденсатор ёмкостью $C_2 = 2$ мкФ заряжен до напряжения $U_2 = 200$ В. Конденсаторы соединили **разноимёнными** обкладками. Найти напряжение U на конденсаторах после их соединения. (Макс.балл 15).
5. Трубка длиной $l = 1$ м, открытая с обоих концов, наполовину погружена в ртуть. Трубку сверху закрывают пальцем и вынимают из ртути. Чему равна длина столбика ртути h , оставшегося в трубке? Атмосферное давление равно $H = 760$ мм.рт.ст. Процесс считать изотермическим. Ответ выразите в метрах и округлите до сотых. (Макс.балл 25).
6. Два шарика одинаковых масс и радиусов с одинаковыми зарядами, подвешенные в одной точке на нитях одинаковой длины, опускают в жидкий диэлектрик, диэлектрическая проницаемость которого $\epsilon = 3$ и плотность $\rho_0 = 900$ кг/м³. Какова должна быть плотность вещества шарика ρ , чтобы угол расхождения нитей в воздухе и диэлектрике был один и тот же? (Макс.балл 15).

Олимпиада «Юный инженер», 2-й тур

1. Материальная точка начинает соскальзывать с верхней точки поверхности полусферы радиуса $R = 75$ см. На какой высоте h она оторвется от поверхности полусферы? Трением пренебречь. Ответ выразите в метрах и округлите до сотых. (Макс. балл 10).
2. Человек массой $m_1 = 70$ кг движется по лодке массой $m_2 = 130$ кг от кормы к носу со скоростью $v = 4$ м/с относительно лодки. С какой скоростью u будет двигаться лодка относительно воды? Силу сопротивления не учитывать. Ответ выразите в м/с и округлите до сотых. (Макс. балл 10).
3. Тяжёлый шарик подвешен на нити длиной $l = 1$ м. Нить равномерно вращается в пространстве, образуя с вертикалью угол $\alpha = 60^\circ$ (конический маятник). Сколько **полных** оборотов сделает шарик за время $t = 1$ мин? Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с². Ответ округлите до целых. (Макс. балл 25).
4. Конденсатор ёмкостью $C_1 = 1$ мкФ заряжен до напряжения $U_1 = 100$ В. Другой конденсатор ёмкостью $C_2 = 2$ мкФ заряжен до напряжения $U_2 = 200$ В. Конденсаторы соединили **разноимёнными** обкладками. Найти напряжение U на конденсаторах после их соединения. (Макс.балл 15).
5. Трубка длиной $l = 1$ м, открытая с обоих концов, наполовину погружена в ртуть. Трубку сверху закрывают пальцем и вынимают из ртути. Чему равна длина столбика ртути h , оставшегося в трубке? Атмосферное давление равно $H = 760$ мм.рт.ст. Процесс считать изотермическим. Ответ выразите в метрах и округлите до сотых. (Макс.балл 25).
6. Два шарика одинаковых масс и радиусов с одинаковыми зарядами, подвешенные в одной точке на нитях одинаковой длины, опускают в жидкий диэлектрик, диэлектрическая проницаемость которого $\epsilon = 3$ и плотность $\rho_0 = 900$ кг/м³. Какова должна быть плотность вещества шарика ρ , чтобы угол расхождения нитей в воздухе и диэлектрике был один и тот же? (Макс.балл 15).

Решения

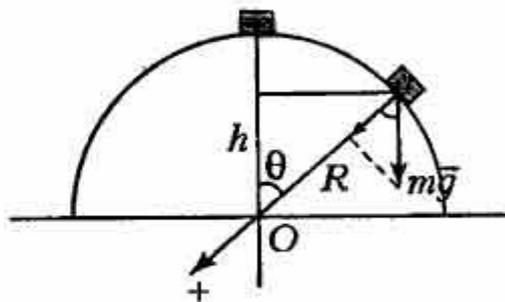
1.

В момент отрыва тело перестает давить на поверхность полусферы — обращается в ноль сила реакции и на тело действует только сила тяжести. В то же время, в этот момент движение тела можно еще считать происходящим по окружности радиусом R . Оба эти обстоятельства учитывает проекция уравнения движения на ось, проведенную вдоль радиуса от тела к центру полусферы

$$mg \cos \theta = m \frac{v^2}{R},$$

где θ — угол между этим радиусом и вертикалью. Второе уравнение получим, приравняв энергию в момент отрыва к энергии в начальный момент

$$mgR = mgh + \frac{mv^2}{2}$$



(высота отсчитывается от поверхности, на которой лежит полусфера). Выражая v^2 из первого уравнения и учитывая, что $\cos \theta = h/R$, получим

$$h = \frac{2}{3} R = 50 \text{ см.}$$

2. Рассмотрим движение лодки и человека в системе отсчёта, связанной с водой. Начальный импульс системы лодка — человек равен нулю, т.е. $\vec{p}_1 = 0$. Если человек приходит в движение относительно лодки, то лодка начнёт двигаться в противоположном направлении. Поэтому скорость \vec{v}_1 человека относительно воды равна: $\vec{v}_1 = \vec{u} + \vec{v}$ а конечный импульс \vec{p}_2 системы равен: $\vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}$. Согласно закону, сохранения импульса $\vec{p}_2 = \vec{p}_1$. Подставляя в это уравнение выражения для импульсов системы, получаем: $m_1 (\vec{u} + \vec{v}) + m_2 \vec{v} = 0$. Направим координатную ось x в сторону движения лодки. Тогда $\vec{v} = v \vec{i}$. Проекция скорости \vec{u} отрицательная, так

как лодка движется в сторону противоположную движению. Отсюда
$$u = -\frac{m_2 v}{m_1 + m_2} = -1,4 \text{ (м/с)}.$$

3. Число оборотов N за время t зависит от периода T одного оборота, т.е. $N = \frac{t}{T}$. Но

$\nu = \frac{1}{T}$ — частота вращения шарика. Поэтому $N = t\nu$. (1) В данном случае движение происходит по окружности радиусом R под действием сил тяжести $m\vec{g}$ (m — масса шарика, \vec{g} — ускорение свободного падения) и натяжения нити \vec{Q} , которые сообщают ему

центростремительное ускорение \vec{a}_c , направленное к центру окружности. Следовательно, векторная сумма сил \vec{Q} и $m\vec{g}$, равная \vec{F} , должна быть направлена к

центру окружности O (рис.). Применим второй закон Ньютона: $\vec{a} = \frac{\vec{Q} + \vec{F}}{m}$ или

в скалярном виде в проекции на ось y : $a_c = \frac{F}{m}$. Но $a_c = \omega^2 R$, где ω — угловая скорость

вращения, $R = l \cdot \sin \alpha$ и $F = mg \cdot \sin \alpha$. С учётом этого получаем: $\omega^2 = \frac{g}{l \cdot \cos \alpha}$. Отсюда

$\omega = \sqrt{\frac{g}{l \cdot \cos \alpha}}$. Угловая скорость связана с частотой вращения соотношением: $\omega = 2\pi \nu$.

Подставляя это выражение в предыдущую формулу, находим: $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l \cdot \cos \alpha}}$ (2) Из

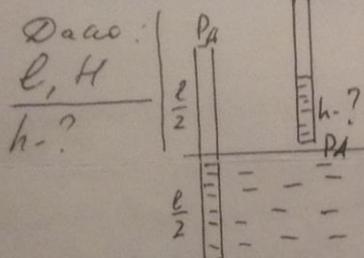
формул (1) и (2) получаем: $N = \frac{t}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l \cdot \cos \alpha}} = 42$ оборота

4. Применяя закон сохранения заряда, запишем: $q_1 + q_2 = q$ Используя формулу ёмкости, запишем: ~~$C_1 U_1 = C_2 U_2$~~

Подставляя эти выражения, получаем: ~~$U = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} q$~~ и ~~$U = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} q$~~

Делаем подсчёт: ~~$U = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} q$~~

5) Трубка длиной l , открытая с обоих концов, полностью погружена в ртуть. Трубку закрывают пальцем и вытаскивают из ртути. Чему равна длина столбика ртути, оставшегося в трубке? Если давление равно H мм рт.ст.



Решение:
Крестик переходить при постоянном ρ -ре (изотермический процесс). До погружения в верхней части трубки было атмосферное давление $P_A = \rho g H$, а объем воздуха равнялся $V_1 = \frac{l}{2} S$ (где S - сечение трубки)

После погружения сила гидростатического давления столбика ртути $\rho g h$ и воздуха P_2 такая равна P_A , т.е. $\rho g h + P_2 = P_A$. Отсюда $P_2 = P_A - \rho g h = \rho g H - \rho g h = \rho g (H - h)$. Объем воздуха в верхней части трубки стал $V_2 = (l - h) S$.

Подставим эти данные в 3-й Закон Бойля-Мариотта $P_1 V_1 = P_2 V_2$. Имеем: $\rho g H \cdot \frac{l}{2} S = \rho g (H - h) \cdot (l - h) S$ или

$$\frac{Hl}{2} = (H - h)(l - h). \text{ Делает преобразование: } \frac{Hl}{2} = Hl - Hh + h^2 - hl$$

$h^2 - h(H + l) + \frac{Hl}{2} = 0$. Получим квадратное уравнение относительно h .

Решаем его: $h_{1,2} = \frac{(H+l) \pm \sqrt{(H+l)^2 - 2Hl}}{2} = \frac{(H+l) \pm \sqrt{H^2 + l^2}}{2}$

Но ответ со знаком "+" не имеет физ. смысла, т.к. в этом случае получалось $h > l$. Поэтому окончательно

получаем ответ:
$$h = \frac{(H+l) - \sqrt{H^2 + l^2}}{2}$$

6.В воздухе: $\text{tg} \alpha = \frac{F_{e1}}{mg}$. В диэлектрике действует сила Архимеда. Поэтому

$$\text{tg} \alpha = \frac{F_{e2}}{mg - F_A}. \text{ Отсюда } \frac{F_{e1}}{mg} = \frac{F_{e2}}{mg - F_A}. \text{ Здесь } F_{e1} \text{ и } F_{e2} \text{ — сила отталкивания шариков в}$$

воздухе и диэлектрике, mg — сила тяжести, F_A — сила Архимеда. Но $F_{e1} = \epsilon F_{e2}$, $m = \rho V$ и $F_A = \rho_0 V$, где ρ и ρ_0 — плотность вещества шарика и диэлектрика.

Получаем:
$$\frac{\epsilon F_{e2}}{\rho V g} = \frac{F_{e2}}{\rho V g - \rho_0 V g} \Rightarrow \frac{\epsilon}{\rho} = \frac{1}{\rho - \rho_0} \Rightarrow \rho = \frac{\rho \epsilon}{\epsilon - 1} = 900 \cdot 3 / (3 - 1) = 1350 \text{ кг/м}^3$$